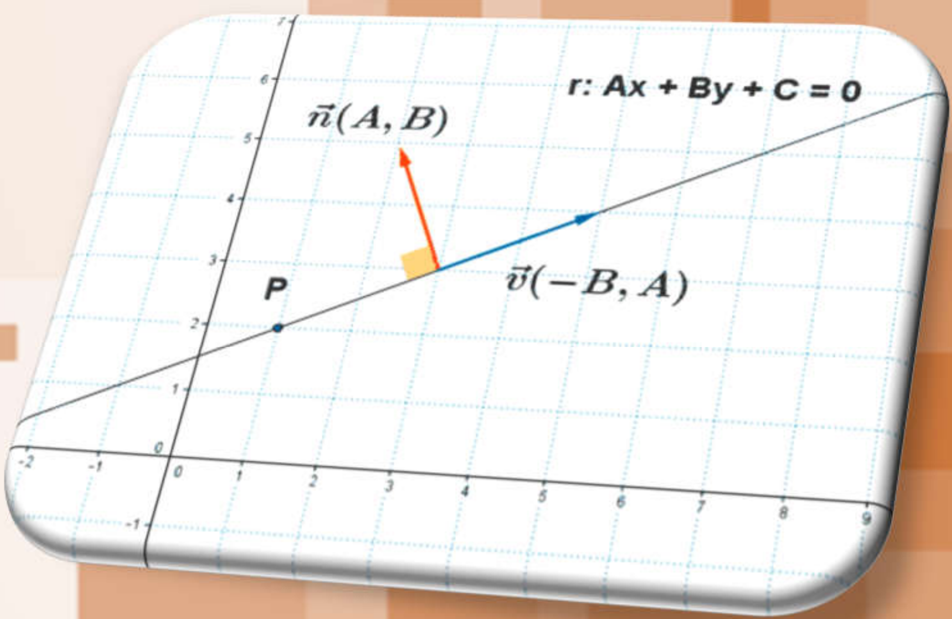
Unidad Didáctica 8

# GEOMETRÍA PLANA

## 4º ESO



## En esta unidad vas a:

1. Identificar los elementos de un vector.
2. Realizar operaciones con vectores.
3. Expresar las rectas mediante sus diferentes ecuaciones.
4. Saber obtener el vector director, la pendiente y la ordenada en el origen de una recta cualquiera.
5. Estudiar las posiciones relativas de dos rectas.
6. Resolver diferentes problemas con la ayuda de vectores o rectas.

## SUMARIO

## 8.00.- Lectura Comprensiva

### Destino: el futuro

El agudo silbido despertó al monstruo, que comenzó a moverse lentamente entre chirridos metálicos y nubes de vapor. Apenas la locomotora hubo iniciado la marcha, dos jóvenes, Sonia y Fedia, abandonaron el compartimento donde estaban sus padres y su hermana mayor, y atravesando algunos vagones llegaron al furgón de cola, desde donde vieron alejarse su ciudad, Palibino.

Para Fedia, el único hijo varón, el viaje a San Petersburgo era una auténtica aventura; a sus doce años le habían contado tantas maravillas del lugar, que quería conocerlo de pé a pá.

La cara de Sonia, una adolescente de quince años, también reflejaba felicidad, pero sus motivos eran diferentes a los de su hermano; para ella, San Petersburgo representaba la posibilidad de continuar profundizando en sus estudios, y años más tarde, ya convertida en la señora Kovalevskaya, todavía recordaba este momento.

Al tiempo que los dos hermanos iban sumergiéndose cada uno en sus propios pensamientos, la ciudad se convertía en un pequeño punto, desde donde nacían los rectos raíles que los llevaban al futuro.

Los raíles del tren se pueden considerar como dos rectas paralelas. ¿En cuántos puntos se cortan? ¿Y si no fueran paralelas?

Dos rectas paralelas no se cortan en ningún punto. Si las rectas no fueran paralelas, se pueden cortar en un punto cuando son secantes, o en todos los puntos cuando son coincidentes.

**Lee nuevamente el texto anterior y responde a las cuestiones:**

1.- ¿Quién es el monstruo?

2.- ¿De qué cuidad se alejaban Sonia y Fedia?

3.- ¿Qué parentesco tenían ambos?

## 8.01.- Introducción.

Geometría (del griego geo, "tierra"; metrein, "medir"), rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. En su forma más elemental, la geometría se preocupa de problemas métricos como el cálculo del área y perímetro de figuras planas y de la superficie o volumen de cuerpos sólidos.

El origen del término geometría es una descripción precisa del trabajo de los primeros geómetras, que se interesaban en problemas como la medida del tamaño de los campos o el trazado de ángulos rectos para las esquinas de los edificios. Este tipo de geometría empírica, que floreció en el Antiguo Egipto, Sumeria y Babilonia, fue refinada y sistematizada por los griegos. En el siglo VI a.C. el matemático **Pitágoras** colocó la piedra angular de la geometría científica al demostrar que las diversas leyes arbitrarias e inconexas de la geometría empírica se podían deducir como conclusiones lógicas de un número limitado de axiomas, o postulados.

Estos postulados fueron considerados por Pitágoras y sus discípulos como verdades evidentes; sin embargo, en el pensamiento matemático moderno se consideran como un conjunto de supuestos útiles pero arbitrarios. Un ejemplo típico de los postulados desarrollados y aceptados por los matemáticos griegos es la siguiente afirmación: "una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos".

Un conjunto de teoremas sobre las propiedades de puntos, líneas, ángulos y planos se puede deducir lógicamente a partir de estos axiomas. Entre estos teoremas se encuentran: "la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a la suma de dos ángulos rectos", y "el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados".

La geometría demostrativa de los griegos, que se ocupaba de polígonos y círculos y de sus correspondientes figuras tridimensionales, fue mostrada rigurosamente por el matemático griego Euclides, en su libro Los elementos. El texto de Euclides, a pesar de sus imperfecciones, ha servido como libro de texto básico de geometría hasta casi nuestros días.

Los griegos introdujeron los problemas de construcción, en los que cierta línea o figura debe ser construida utilizando sólo una regla de borde recto y un compás. Ejemplos sencillos son la construcción de una línea recta dos veces más larga que una recta dada, o de una recta que divide un ángulo dado en dos ángulos iguales. Tres famosos problemas de construcción que datan de la época griega se resistieron al esfuerzo de muchas generaciones de matemáticos que intentaron resolverlos: la duplicación del cubo (construir un cubo de volumen doble al de un determinado cubo), la cuadratura del círculo (construir un cuadrado con área igual a un círculo determinado) y la trisección del ángulo (dividir un ángulo dado en tres partes iguales).

Ninguna de estas construcciones es posible con la regla y el compás, y la imposibilidad de la cuadratura del círculo no fue finalmente demostrada hasta 1882. Los griegos, y en particular Apolonio de Perga, estudiaron la familia de curvas conocidas como cónicas y descubrieron muchas de sus propiedades fundamentales. Las cónicas son importantes en muchos campos de las ciencias físicas; por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol.

Arquímedes, uno de los grandes científicos griegos, hizo un considerable número de aportaciones a la geometría. Inventó formas de medir el área de ciertas figuras curvas así como la superficie y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas, como paraboloides y cilindros. También elaboró un método para calcular una aproximación del valor de pi (π), la proporción entre el diámetro y la circunferencia de un círculo y estableció que este número estaba entre 3 10/70 y 3 10/71.


La geometría avanzó muy poco desde el final de la era griega hasta la edad media. El siguiente paso importante en esta ciencia lo dió el filósofo y matemático francés René Descartes, cuyo tratado El Discurso del Método, publicado en 1637, hizo época. Este trabajo fraguó una conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Éste es un fundamento de la geometría analítica, en la que las figuras se representan mediante expresiones algebraicas.

Otro desarrollo importante del siglo XVII fue la investigación de las propiedades de las figuras geométricas que no varían cuando las figuras son proyectadas de un plano a otro.

La geometría sufrió un cambio radical de dirección en el siglo XIX. Los matemáticos Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevski, y János Bolyai, trabajando por separado, desarrollaron sistemas coherentes de geometría no euclídea. Estos sistemas aparecieron a partir de los trabajos sobre el llamado "postulado paralelo" de Euclides, al proponer alternativas que generan modelos extraños y no intuitivos de espacio, aunque, eso sí, coherentes. Casi al mismo tiempo, el matemático británico Arthur Cayley desarrolló la geometría para espacios con más de tres dimensiones.

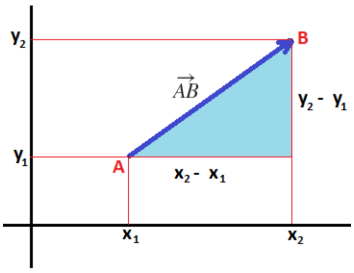
El uso de conceptos con más de tres dimensiones tiene un importante número de aplicaciones en la física, en particular en el desarrollo de teorías de la relatividad. Esta geometría se conoce como geometría estructural. Un ejemplo sencillo de este enfoque de la geometría es la definición de la figura geométrica más sencilla que se puede dibujar en espacios con cero, una, dos, tres, cuatro o más dimensiones. En los cuatro primeros casos, las figuras son los bienconocidos punto, línea, triángulo y tetraedro respectivamente.

Otro concepto dimensional, el de dimensiones fraccionarias, apareció en el siglo XIX. En la década de 1970 el concepto se desarrolló como la geometría fractal.

## 8.02.- Vectores

Existen magnitudes, como la temperatura o la masa, que quedan perfectamente determinadas completamente dando un valor, o un escalar. Decimos que este tipo de magnitudes son **magnitudes escalares**. Sin embargo, existen otras muchas magnitudes, como la fuerza, que para determinarlas completamente ha de indicarse su módulo, su sentido y su dirección. Estas magnitudes se llaman **magnitudes vectoriales**. Las magnitudes vectoriales se representan mediante vectores, como, por ejemplo:

Fuerza : $\vec{F}$ Velocidad : $\vec{V}$ Aceleración : $\vec{a}$ Posición : $\vec{r}$




- Un **vector** es un segmento orientado en el plano $\mathbb{R}^2$, determinado por dos puntos, un **origen** A, de coordenadas $(x_1,y_1)$, y un **extremo** B de coordenadas $(x_2,y_2)$.

El vector que une los puntos A y B se denomina vector $\overrightarrow{AB}$ y sus coordenadas o componentes vienen determinadas por la diferencia entre las coordenadas del extremo menos las del origen.

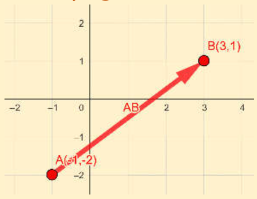
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

**Ejemplo**

1.- Calcula las coordenadas del vector cuyo origen es el punto (−1,−2) y cuyo extremo es el punto (3,1) y represéntalo.

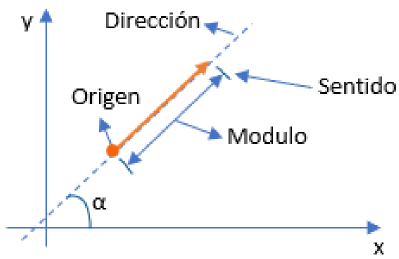
Si el Origen es el punto A (−1,−2) y el extremo el punto B (3,1) para calcular el vector $\overrightarrow{AB}$ haremos la diferencia entre B y A:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (b_x - a_x, b_y - a_y) = (3-(-1), 1-(-2)) = (3+1, 1+2) = (4,3)$$




Por tanto, el vector $\overrightarrow{AB}$ = (4,3).

Así pues, **todo vector viene caracterizado por un módulo, una dirección y un sentido.**

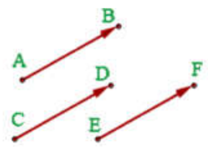



- **Módulo:** es la longitud del segmento AB, y coincide con la **distancia entre los puntos A y B** y se representa por $\|\overrightarrow{AB}\|$ y se calcula:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$$

- **Dirección:** es la **recta sobre la que está situada el vector**. Una recta y todas sus paralelas determinan la misma dirección.

- **Sentido:** es la forma de recorrer el segmento AB, es decir de fijar el origen y el extremo. (queda **determinado por la punta de la flecha**)




Decimos que **dos** o más **vectores** son **equipolentes** cuando tienen igual módulo, dirección y sentido, como por ejemplo en el dibujo de la derecha donde $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ son equipolentes.

**Piensa y practica**

1.- Calcula las coordenadas de los vectores de los que sabemos su origen A y su extremo B y represéntalos:

a) A (1,4) y B (3,−2) b) A (9,−1) y B (5,7) c) A (2,3) y B (1,6) d) A (−3,−5) y B (0,0)

2.- Representa un triángulo de vértices A(1,1), B(3,3) y C(6,0), y calcula los vectores que unen los tres vértices.

3.- Dado el vector (5,3) indica dos posibles orígenes y extremos.

**Ejemplo**

2.- Calcula el módulo del vector cuyo origen es el punto (1,0) y cuyo extremo es el punto (4,4).

Si su origen es el punto A (1,0) y su extremo el B (4,4) para calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ antes hemos de calcular el vector haciendo la diferencia entre B y A:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(b_x - a_x, b_y - a_y\right) = (4-1, 4-0) = (3,4)$$

y su módulo viene dado por:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Por tanto, el vector $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 5$

Es evidente que, si el módulo de un vector es la distancia entre su origen y su extremo, ocurre que: $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|$

## Piensa y practica

4.- Calcula el perímetro del rectángulo de vértices A (1,1), B (7,3), C (6,6) y D (0,4) y comprueba que para calcular el módulo de un vector nos da igual quien sea el origen y quien el extremo.

Hemos dicho con anterioridad que la dirección de un vector es la recta que lo contiene y todas sus paralelas, por tanto:

- Dos vectores son paralelos cuando tienen la misma dirección (misma recta o rectas paralelas). Para comprobar si dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son paralelos basta con comprobar si sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{ó} \quad \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_1}{v_1}$$

Una forma sencilla de encontrar un vector paralelo a $\vec{v} = (v_1, v_2)$, es multiplicar sus componentes por un mismo número k:

$$\vec{v} = (v_1, v_2) \text{ es paralelo al vector } \overrightarrow{kv} = (kv_1, kv_2)$$

**Ejemplo**

3.- Comprueba si los vectores $\vec{u} = (1,3)$ y $\vec{v} = (4,12)$ son paralelos.

Este caso es bastante sencillo de comprobar puesto que vemos que $\vec{v} = 4 \cdot \vec{u}$, por tanto son paralelos. Aunque de todas maneras vamos a comprobarlo de la otra forma:

$$\frac{u_2}{v_2} = \frac{u_1}{v_1} \quad \rightarrow \quad \frac{u_2}{v_2} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \frac{u_1}{v_1} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son vectores paralelos}$$

- Dos vectores son perpendiculares cuando sus direcciones se cortan formando un ángulo recto. Para saber si dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son perpendiculares, tiene que ocurrir que:

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$

**Ejemplo**

4.- Comprueba si los vectores $\vec{u} = (4,2)$ y $\vec{v} = (-1,2)$ son perpendiculares.

Para ver si dos vectores son perpendiculares, multiplicamos la componente x del primero por la del segundo y le sumamos el producto de las componentes y del primero por la del segundo, y si el resultado es nulo, los vectores son perpendiculares:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \leftrightarrow \quad u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = 0 \quad \rightarrow \quad 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = -4 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son perpendiculares}$$

## Piensa y practica

5.- Decide si los siguientes pares de vectores son paralelos o perpendiculares — a) //; b) //; c) ⟂

a) $\vec{u} = (1,3)$ y $\vec{v} = (-1,-3)$ b) $\vec{u} = (3,2)$ y $\vec{v} = (-6,-4)$ c) $\vec{u} = (2,4)$ y $\vec{v} = (2,-1)$

6.- ¿Los vectores paralelos son equipolentes?

En general, dado un vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$, podemos encontrar otro vector $\vec{v}$ que sea:

- ✓ Paralelo a $\vec{v}$, multiplicando ambas coordenadas por un número distinto de cero: $\vec{v}=(\lambda\cdot v_1,\lambda\cdot v_2)$
- ✓ Perpendicular a $\vec{v}$, invirtiendo sus coordenadas y cambiando el signo de una de ellas: $\vec{v}=(-v_2,v_1)$

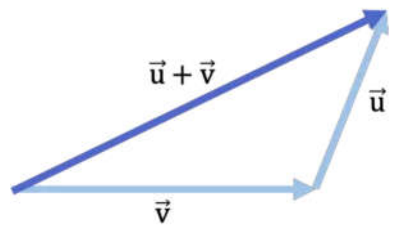
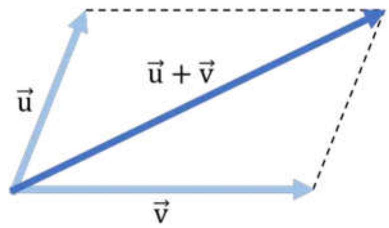
| Piensa y practica |
|---|
| 7.- Dado el vector $\vec{v}$ =(5,−2) da tres vectores que sean paralelos y otros tres que sean perpendiculares a él. |
| 8.- Comprueba, sin usar el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices A(−2, −1), B(3, 1) y C(1, 6) es rectángulo. |

## 8.03.- Operaciones con vectores.

En el conjunto de vectores del plano $\mathbb{R}^2$ se definen las dos operaciones siguientes:

### 8.3.1.- Suma de Vectores

Llamamos suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y la representaremos por $\overrightarrow{u+v}$, al vector que se obtiene de dos formas:

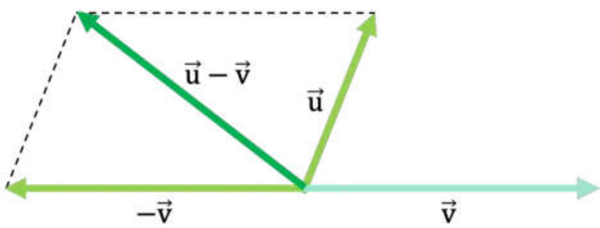
| Regla del triángulo | Regla del paralelogramo |
|---|---|
| Dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$, hacemos que el origen de $\vec{v}$, coincida con el extremo de $\vec{u}$, de forma que el vector suma es aquel cuyo origen es el de $\vec{v}$ y cuyo extremo es el de $\vec{u}$. | Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de origen común, trazando líneas paralelas a ambos vectores desde sus extremos, la diagonal del paralelogramo será el vector suma. |
|  |  |



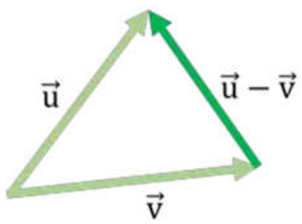
Propiedades de la suma de vectores:

- Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- Elemento neutro: es el vector nulo, que representaremos por $\vec{0}$
  $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
- Elemento Opuesto: $(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
- Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

La existencia de un elemento opuesto para la suma de vectores, permite **restar vectores**. Así, dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para obtener $\overrightarrow{u-v}$ basta con sustituir el vector $\vec{v}$, por el vector $-\vec{v}$ y sumárselo al $\vec{u}$ tal y como se indica en la figura de la derecha.







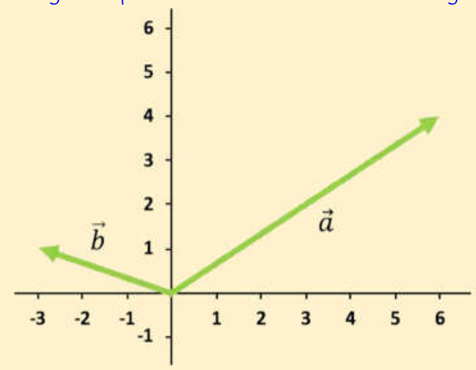
**Ejemplo**

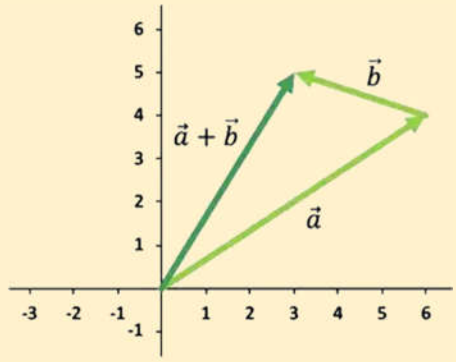
5.- Dados los vectores $\vec{a}=(6,4)$ y $\vec{b}=(-3,1)$ calcula su suma de forma analítica y de forma gráfica.

Para sumar dos vectores, basta con sumar sus coordenadas:

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y)=(6-3,4+1)=(3,5) \quad \rightarrow \quad \vec{a}+\vec{b}=(3,5)$$

De forma gráfica podemos resolverlo mediante la regla del triángulo:



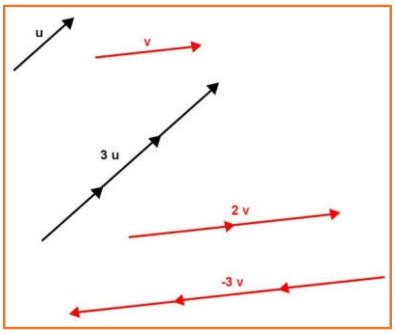

## Piensa y practica

9.- Determina de forma gráfica y analítica la suma de los vectores:

a) $\vec{u}=(-7,1)$ y $\vec{v}=(0,-4)$ b) $\vec{u}=(3,2)$ y $\vec{v}=(2,-5)$ c) $\vec{u}=(-4,3)$, $\vec{v}=(1,-2)$ y $\vec{w}=(3,-5)$

## 8.3.2.- Producto por un escalar

El producto de un escalar k, distinto de cero, por un vector $\vec{u}$ es otro vector $\vec{ku}$ con:




- **Dirección:** La misma que el vector $\vec{u}$
- **Sentido:** el mismo que $\vec{u}$ si k>0 y su opuesto si k<0.
- **Módulo:** Proporcional al de $\vec{u}$. $\|k\cdot\vec{u}\|=|k|\cdot\|\vec{u}\|$

Propiedades del producto de un vector por un escalar:
$$\begin{cases} \bullet\ k\cdot(\vec{u}+\vec{v})=k\cdot\vec{u}+k\cdot\vec{v} \\ \bullet\ (k_1+k_2)\vec{u}=k_1\cdot\vec{u}+k_2\cdot\vec{u} \\ \bullet\ (k_1\cdot k_2)\cdot\vec{u}=k_1\cdot(k_2\cdot\vec{u}) \\ \bullet\ 1\cdot\vec{u}=\vec{u} \end{cases}$$

**Ejemplo**

6.- Dado el vector $\vec{v}=(5,-4)$ calcula de forma analítica su producto por −1 y por 3.

Para multiplicarlo por −1, multiplicaremos ambas coordenadas por −1:

$$-1\cdot\vec{v}=(-1\cdot v_x,-1\cdot v_y)=(-1\cdot 5,-1\cdot(-4))=(-5,4) \quad \rightarrow \quad -1\cdot\vec{v}=(-5,4)$$

Y para multiplicarlo por 2 procederemos de igual forma:

$$2\cdot\vec{v}=(2\cdot v_x,2\cdot v_y)=(2\cdot 5,2\cdot(-4))=(10,-8) \quad \rightarrow \quad 2\cdot\vec{v}=(10,-8)$$

## Piensa y practica

10.- Determina de forma gráfica y analítica el producto del vector $\vec{v}=(2,-5)$ por los escalares −3 y 5.

11.- Dados los vectores $\vec{u}=(-4,3)$, $\vec{v}=(1,-2)$ y $\vec{w}=(3,-5)$, calcula: a) $\vec{s}=3\vec{u}-5\vec{v}+4\vec{w}$ y b) $\vec{r}=-2\vec{u}-4\vec{v}-9\vec{w}$

## 8.04.- Simétrico de un punto respecto de otro punto

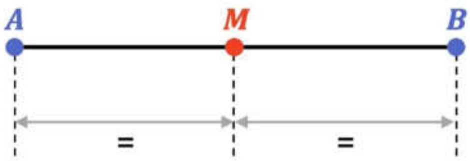
Para calcular el simétrico de un punto respecto de otro, necesitamos primero conocer el punto medio de un segmento.

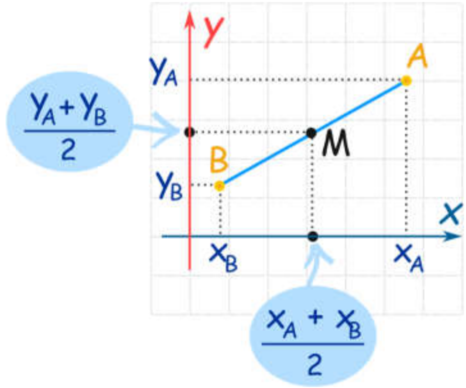
### 8.4.1.- Punto medio de un segmento

Consideremos el segmento de extremos $A=(a_x, a_y)$ y $B=(b_x, b_y)$.

Si M tiene por coordenadas $(m_x,m_y)$ en su punto medio, se verifica:

$$\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{AM}$$



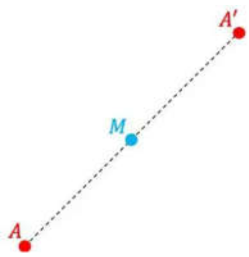

Y por tanto, si sustituimos las componentes de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AM}$ obtenemos:

$$M=\left(\frac{a_x+b_x}{2},\frac{a_y+b_y}{2}\right)$$

| Piensa y practica |
|---|
| 12.- Dado el triángulo de vértices A(4,4), B(0,0) y C(0,4), calcula el punto medio del lado AB, y la longitud de la mediana de ese mismo lado (la mediana es el segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto). (2,2) y 2√2 |
| 13.- El punto medio de A(−1, 3) y B(x, y) es M(2, 1). ¿Cuáles son las coordenadas del punto B? (5,−1) |
| 14.- Dado el paralelogramo de vértices A(1,1); B(5,1); C(7,3) y del que sabemos que M es el punto de corte de sus diagonales, calcula las coordenadas del vértice D utilizando la fórmula del punto medio. D (11,3) |

### 8.4.2.- Simétrico de un punto, respecto de otro

Una aplicación del punto medio de un segmento, es el cálculo del punto simétrico de un punto con respecto de otro.




Si A' es el **simétrico** de M respecto de A, entonces M es el **punto medio** del **segmento** AA'. Por lo que se verificará igualdad:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MA'}$$

El punto A' es el punto simétrico del punto A respecto a otro punto M si el punto A' está situado simétricamente a la misma distancia del punto M que la distancia que hay entre los puntos A y M. Por tanto, M es el punto medio del segmento formado por los puntos A y A'.

Entonces, para calcular las coordenadas del punto simétrico, utilizaremos la fórmula del punto medio de un segmento:

$$M=\frac{A+A'}{2}$$

De donde despejamos el punto incógnita A' y obtenemos la **fórmula del punto simétrico respecto a otro punto**:

$$A'=2M-A$$

**Ejemplo**

7.- Hallar el simétrico del punto P (7, 4) respecto del punto Q (3, −11).

Sea el punto simétrico P'(x,y), tenemos que:

$$(-4,-15)=(x-3,y+11) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3=-4 \\ y+11=-15 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-26 \end{cases}$$

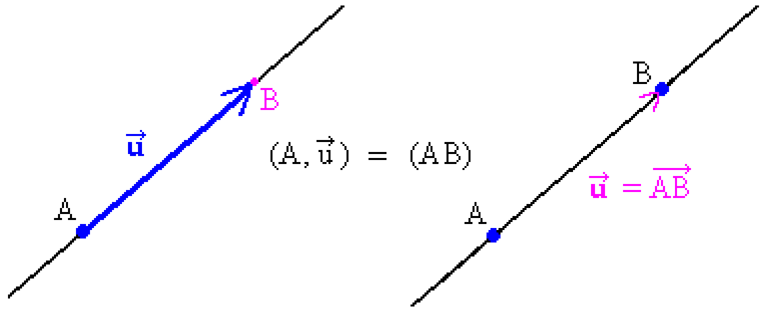
Por tanto, el simétrico de P, es el punto P' (−1,−26)

**Piensa y practica**

15.- Calcular las coordenadas del punto S, simétrico del punto A (2, 6) con respecto B (4, 5)

## 8.05.- Ecuaciones de la recta

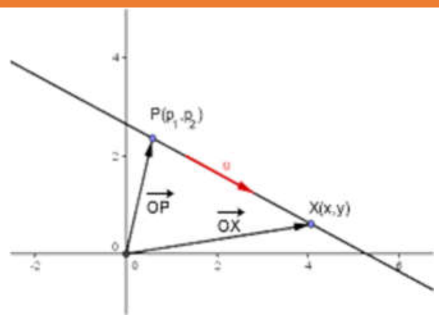
Para determinar la ecuación de una recta en el plano son necesarios un punto y un vector.




Aunque si son dan dos puntos, rápidamente podemos calcular el vector que los une y con esto ya tendremos un punto y un vector.

### 8.5.1.- Ecuación Vectorial

Sea **r** una recta del plano determinada por un punto **P** ($p_1$,$p_2$) y un vector $\vec{r}$ . Cualquier punto **X** (x,y) de la recta queda determinado por el vector $\overrightarrow{OX}$ que se puede escribir como la suma del vector $\overrightarrow{OP}$ más un vector proporcional a $\vec{r}$ de la siguiente manera:




$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\lambda\cdot\vec{r}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro que, al variar, va generando los distintos puntos de la recta.

Esta expresión vectorial recibe el nombre de ecuación vectorial de la recta **r**.

Ecuación, que, escrita en componentes quedaría de la siguiente forma:

$$(x,y)=(p_x,p_y)+\lambda\left(r_x,r_y\right)$$

Al vector de la recta r, se le llama vector director de **r**: $\vec{r}$

**Ejemplo**

8.- Calcula la ecuación vectorial de la recta ,r, que pasa por los puntos A (−1, 2) y B(0, 5).

El vector de la recta r viene nado por: $\vec{r}=B-A=(1,3)$

Cualquier punto de la recta X (x,y) se puede escribir como: $(x,y)=(A_x,A_y)+k\left(r_x,r_y\right) \quad \rightarrow \quad (x,y)=(-1,2)+k(1,3)$

Por tanto, la ecuación vectorial es: (x, y) = (−1, 2) + k·(1, 3)

## 8.5.2.- Ecuaciones Paramétricas

Si separamos en componentes la ecuación vectorial, llegamos a: $\begin{cases} x = p_x + \lambda \cdot v_x \\ y = p_y + \lambda \cdot v_y \end{cases}$ que es la expresión de las ecuaciones paramétricas de una recta.

**Ejemplo**

9.- Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta ,r, que pasa por P (3, 5) y cuyo vector director es $\vec{v}$ (2,-3).

Sabemos que las ecuaciones paramétricas de una recta son de la forma $\begin{cases} x = p_x + t \cdot v_x \\ y = p_y + t \cdot v_y \end{cases}$ por lo que bastaría con poner las coordenadas del punto P y las componentes del vector $\vec{v}$ .

Ecuaciones Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$

## 8.5.3.- Ecuación Continua

Si despejamos el parámetro $\lambda$ de cada una de las ecuaciones paramétricas, $\begin{cases} x = p_x + \lambda \cdot v_x \\ y = p_y + \lambda \cdot v_y \end{cases}$, tenemos

de $x = p_x + \lambda \cdot v_x \rightarrow \lambda = \frac{x - p_x}{v_x}$ y de $y = p_y + \lambda \cdot v_y \rightarrow \lambda = \frac{y - p_y}{v_y}$, y que por igualación da:

$$\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y}$$

Donde ($p_x$, $p_y$) son las componentes del punto P y ($v_x$,$v_y$) las componentes de vector $\vec{v}$ .

A esta expresión que se la conoce como ecuación continua de una recta.

**Ejemplo**

10.- Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta ,s, que pasa por P (2, -7) y cuyo vector director es $\vec{v}$ (1, 3).

Sustituyendo directamente en la ecuación continua las coordenadas del punto P y las componentes del vector v, llegamos a:

$$\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y} \rightarrow \text{Ecuación continua: } \frac{x-2}{1} = \frac{y+7}{3}$$

## 8.5.4.- Ecuación General

Partiendo de la ecuación continua: $\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y}$

y multiplicando en cruz, obtenemos: $v_y \cdot (x - p_x) = v_x \cdot (y - p_y)$

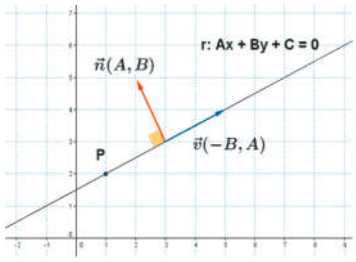
Operando y agrupando todo a la izquierda: $x \cdot v_y - v_y \cdot p_x - y \cdot v_x + v_x \cdot p_y = 0$

Y si en esta expresión hacemos el siguiente cambio $\begin{cases} v_y = A \\ -v_x = B \\ v_x p_y - v_y p_x = C \end{cases}$, da lugar a: $Ax + By + C = 0$

Que es conocida como ecuación general de la recta, y donde, si nos fijamos en el cambio realizado, el vector director de dicha recta, viene dado por: $\vec{r} = (-B, A)$ .

Esta ecuación, también se le llama ecuación cartesiana o **ecuación implícita** de una recta.

Dada una recta en su forma general, $ax+by+c=0$, de ella podemos obtener la siguiente información:




Vector Director: $\vec{r}=(-b,a)$ Vector Perpendicular: $\vec{n}=(a,b)$

Pendiente: $\frac{-a}{b}$ y Ordenada en el origen: $\frac{-c}{b}$

**Ejemplo**

11.- Calcula la ecuación general de la recta, r, que pasa por los puntos A (-1, 2) y B(0, 5).

Sabemos que, de la ecuación general de una recta, $ax+by+c=0$, las componentes del vector director son: $\vec{r}=(-b,a)$

Pues empezamos calculando el vector director de la recta que pasa por A y B: $\vec{r}=B-A=(1,3)$

Comparándolo con el vector $\vec{r}=(-b,a)$ vemos que a=3 y que b=-1, por tanto la ecuación general de nuestra recta será:

$$ax+by+c=0 \quad \rightarrow \quad 3x-y+c=0$$

Falta calcular el valor del término independiente, que lo haremos sustituyendo alguno de los dos puntos, por ejemplo, el B (0,5)

$$3x-y+c=0 \quad \rightarrow \quad 3\cdot 0-5+c=0 \quad \rightarrow \quad -5+c=0 \quad \rightarrow \quad c=5$$

Por tanto, la ecuación general de la recta es: 3x – y + 5 =0

12.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por P (-4,3) y es perpendicular a 3x - 2y - 4 = 0.

El vector director de una recta perpendicular a 3x – 2y – 4 = 0 es de la forma $\vec{n}=(a,b)$, por tanto, $\vec{n}=(3,-2)$ y con él ya podemos escribir la ecuación general de la perpendicular: 2x + 3y + c = 0 y con el punto P (-4,3) calculamos el término independiente:

$$2x+3y+c=0 \quad \rightarrow \quad 2(-4)+3\cdot 3+c=0 \quad \rightarrow \quad -8+9+c=0 \quad \rightarrow \quad c=-1$$

Por tanto, la ecuación de la recta pedida es: 2x + 3y - 1 =0

## 8.5.4.- Ecuación Explícita

Si de la ecuación general $Ax+By+C=0$, despejamos y, llegamos a: $y=\frac{-Ax-C}{B}=\frac{-A}{B}\cdot x-\frac{C}{B}$

Si llamamos $m=\frac{-A}{B}$ y $n=\frac{-C}{B}$, y sustituimos ambas, tenemos: $y=mx+n$

Que es la ecuación explícita de una recta, y donde $m=\frac{-A}{B}$, es la pendiente de la recta y se corresponde con el cociente entre la componente y del vector director y la componente x. $m=\frac{v_y}{v_x}$

**Ejemplo**

13.- Calcula la ecuación explícita de la recta, r, que pasa por P (2, -7) y cuyo vector director es $\vec{v}$ (1, 3).

La ecuación explícita es de la forma $y=mx+n$, donde m es la pendiente y n la ordenada en el origen. Sabemos que la pendiente m es el cociente de las componentes y y x del vector director, por tanto: $m=\frac{v_y}{v_x}=\frac{3}{1}=3$

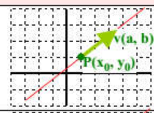
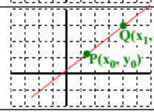
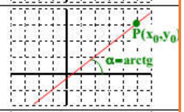
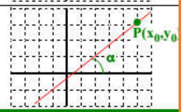
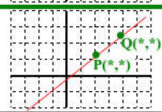
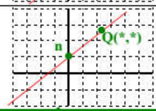
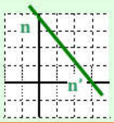
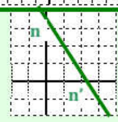
Con esto, tenemos que, $y=3x+n$, bastaría calcular el valor de n, que lo haríamos sustituyendo el punto p:

$$y=3x+n \quad \rightarrow \quad -7=3\cdot 2+n \quad \rightarrow \quad -7-6=n \quad \rightarrow \quad n=-13$$

Por tanto, la ecuación explícita de la recta es: y = 3x – 13

Como acabamos de ver en los ejemplos anteriores, podemos calcular cualquier ecuación de la recta sin necesidad de empezar por la vectorial, pasar por las paramétricas para llegar a la continua y después, multiplicar en cruz para obtener la general y de ésta última despejar la y para llegar a la explícita.

En el cuadro siguiente, trato de resumir las diferentes ecuaciones de la recta:

| GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL PLANO | Ecuación y Características de una RECTA | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| DATOS | INCÓGNITAS | | | | | | |
| Pasa por $(x_0, y_0)$ y ... | Vector | Otro punto | Pendiente | Áng con OX | Ec. general | Ec. implícita | Gráfica |
| Vector (a, b) | **(a, b)** | $(x_1,y_1)=(x_0,y_0)+(a,b)$ | $m=\frac{b}{a}$ | $\alpha = \text{arc tg } m$ | $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$ forma continua | Despejar y |  |
| Otro punto $(x_1, y_1)$ | $(a,b)=(x_1,y_1)-(x_0,y_0)$ | **$(x_1, y_1)$** | $m=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ | | | |  |
| Pendiente m | $(a,b)=(1,m)$ | $(x_1,y_1)=(x_0,y_0)+(1,m)$ | **m** | $\alpha = \text{arc tg } m$ | Agrupar términos | $y-y_0=m(x-x_0)$ |  |
| Ángulo con OX $\alpha$ | | | **m = tg α** | **α** | | |  |
| Ecuación general: $Ax+By+C=0$ | $(a,b)=(-B,A)=(B,-A)$ | $\begin{array}{c\|c} x & y \\ \hline \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}$ | $m=-\frac{A}{B}$ | $\alpha = \text{arc tg } m$ | $Ax+By+C=0$ | Despejar y |  |
| Ecuación implícita: $y=mx+n$ | $(a,b)=(1,m)$ | $\begin{array}{c\|c} x & y \\ \hline 0 & n \\ \cdot & \cdot \end{array}$ | **m** | $\alpha = \text{arc tg } m$ | Agrupar términos | $y=mx+n$ |  |
| Gráfica:  | | (n', 0)<br>(0, n) | | | $\frac{x}{n'}+\frac{y}{n}=1$ forma canónica | |  |

## Piensa y practica

16.- Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua, general y explícita de la recta que pasa por el punto (–2,3) y cuyo vector de director es $\vec{v}$ = (3,4). Halla, si existe, un punto de la recta que su abscisa sea 6. Hallar también, si existe, un punto de la recta con ordenada –4.

17.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto P (–5,0), y por el punto de corte de las rectas r y s dadas por: $r: x-2y+2=0$ y $s:\begin{cases} x=1-t \\ y=3t-2 \end{cases}$

18.- Halla el vector director y un punto de cada una de las siguientes rectas:

$r: 3x+y-1=0$ $\quad s:\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \end{cases}$ $\quad t: \frac{1-x}{1}=\frac{y+2}{2}$ $\quad \Omega: y=3x+1$

19.- Halla la ecuación de cada una de las rectas que pasan por los vértices del triángulo de vértices A(0, 0) y B(5, 1) y C(1, 4) y exprésalas de distintas formas: Sol: AB (Gen): x – 5y =0; AC (Exp): y = 4x; BC(Vect) : (x,y)=(–5,1) + t(–4,3)

# 8.06.- Posiciones Relativas de dos rectas

Sabemos de cursos anteriores que para ver cuál es la posición relativa de dos rectas, bastaría con resolver el sistema formado por sus ecuaciones generales.

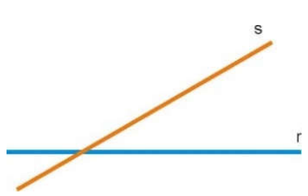
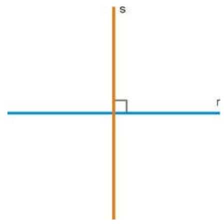
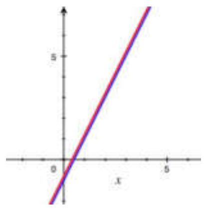
- ✓ Si tiene solución única, las rectas son secantes. (S.C.D.)
- ✓ Si no tiene solución, son paralelas. (S.I.)
- ✓ Si existen infinitas soluciones, son coincidentes. (S.C.I.)

Sin embargo, para determinar la posición relativa de dos rectas en forma general, no es necesario resolver el sistema formado por sus ecuaciones, sino que bastaría con observar los coeficientes de sus ecuaciones.

Dadas las rectas **r** y **s**, de las que conocemos o un punto y un vector, o sus ecuaciones generales o explícitas:

| Recta | Vector director | Punto | Ec. General | Ec. Explícita |
|---|---|---|---|---|
| r | $\vec{r}=(r_x,r_y)$ | $P(p_x, p_y)$ | $ax + by + c = 0$ | $y = mx + n$ |
| s | $\vec{s}=(s_x,s_y)$ | $Q(q_x, q_y)$ | $a'x + b'y + c' = 0$ | $y = m'x + n'$ |

Sus posiciones relativas pueden ser:

| Secantes | | Paralelas | |
|---|---|---|---|
| Si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ no son paralelos: $\vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$ | | Si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son paralelos $\vec{r}=k\cdot\vec{s}$ | |
| No perpendiculares | Perpendiculares | No Coincidentes | Coincidentes |
|   |   |   |  |
| $\vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$ y $\vec{r}\cdot\vec{s}\neq 0$ | $\vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$ y $\vec{r}\cdot\vec{s}=0$ | $\vec{r}=k\cdot\vec{s}$ y $Q\notin r$ | $\vec{r}=k\cdot\vec{s}$ y $Q\in r$ |
| $\frac{r_x}{s_x}\neq\frac{r_y}{s_y}$ | $\frac{r_x}{s_x}\neq\frac{r_y}{s_y}$ | $\frac{r_x}{s_x}=\frac{r_y}{s_y}$ | $\frac{r_x}{s_x}=\frac{r_y}{s_y}$ |
| $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ | $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ y $a\cdot a'=b\cdot b'$ | $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ | $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ |
| $m\neq m'$ | $m\neq m'$ y $m\cdot m'=-1$ | $m=m'$ y $n\neq n'$ | $m=m'$ y $n=n'$ |

**Ejemplo**

13.- Determina la posición relativa de las rectas r: $-x + y = -1$ y s: $2x + 3y + 3 = 0$.

El vector director de cada una de ellas es: $\left.\begin{array}{l}\vec{r}=(-1,-1)\\ \vec{s}=(-3,2)\end{array}\right\}$ y como no son proporcionales: $\vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$ las rectas son secantes.

Por tanto, las rectas r y s son secantes

14.- Halla la ecuación general de una recta paralela a $y=3-\frac{x}{2}$ y que corta al eje de ordenadas en el punto y=-3.

Si operamos un poco la ecuación explícita:

$$y=3-\frac{x}{2}\ \rightarrow\ y-3=-\frac{x}{2}\ \rightarrow\ 2y-6=-x\ \rightarrow\ x+2y-6=0$$ conseguimos la ecuación general.

La recta paralela a ésta, tiene que tener la misma pendiente, por tanto, a y b no varían y la recta sería de la forma: $x+2y+c=0$
Calcularemos c, sabiendo que la recta pasa por el punto (0,-3).

$$x+2y+c=0\ \xrightarrow[(0,-3)]{Sustituimos}\ 0+2\cdot(-3)+c=0\ \rightarrow\ -6+c=0\ \rightarrow\ c=6$$

Por tanto, la recta buscada es $x + 2y + 6 = 0$

## Piensa y practica

20.- Dadas las rectas r: $ax + y-2 = 0$ y s: $x + 2y + b = 0$, halla los valores que deben tomar a y b para que: a) Sean paralelas, b) Sean coincidentes y c) Sean perpendiculares. Sol: a) a=1/2; b) a=1/2 y b=-4; c) a=- 2

21.- Dada la recta s: $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$ halla:

a) La ecuación continua de una recta $r_1$ perpendicular a s que pase por P (5, −3).
b) La ecuación implícita de $r_2$ paralela a s que pase por Q (0, 4).
b) La ecuación explícita de $r_3$ perpendicular a s que pase por P (−3, 0).

22.- Indica si las siguientes rectas son secantes, paralelas o coincidentes y encuentra también algún punto de intersección entre ellas (si tiene). r: $2x - 4y + 6 = 0$; s: $y = 4x - 5$

## 8.07.- Resolución de problemas

El diccionario de la R.A.E. define el término problema, entre otras acepciones, como: "Cuestión que se trata de aclarar". Desde el punto de vista matemático, señala que es: "Proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado cuando ciertos datos son conocidos".

En la resolución de problemas es importante el proceso seguido en la busqueda y validación de la solución, puesto que dicha resolución conlleva un aprendizaje de los procesos matemáticos tales como conjeturar, particularizar, generalizar, abstraer, probar y establecer relaciones, tan importantes como el conocer conceptos, algoritmos, relaciones y hechos matemáticos.
Polya (1965) distingue, entre otros, los siguientes tipos de problemas:

- **Problemas de Rutina:** En esta categoría de problemas se incluyen todos aquellos problemas que se resuelven por la simple sustitución de nuevos datos en los de un problema ya resuelto, o bien siguiendo paso a paso la traza de otro problema, es decir, mediante la aplicación de una receta.

- **Problemas por resolver:** Son aquellos cuya finalidad es descubrir un objeto. Este objeto puede ser de distinta naturaleza, como incógnita numérica, o un elemento o propiedad geométrica, ente otras. Un ejemplo de un problema de este tipo sería encontrar la suma de los n primeros números impares.

- **Problemas por demostrar:** Se refiere a los problemas cuya meta es mostrar de modo concluyente la verdad o falsedad de una proposición enunciada. Se abre así la puerta a la refutación como un elemento demostrativo. Demostrar que la suma de dos números impares es par, es un ejemplo de este tipo de problemas.

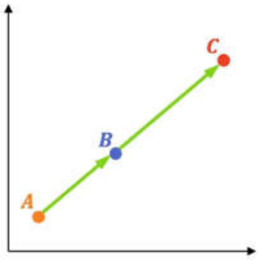
El primer tipo hace referencia a lo que podríamos llamar ejercicios, mientras que los dos últimos serían bien entendidos como problemas. Como te habrás dado cuenta, a lo largo del curso hemos hecho muchos de ellos, tanto ejercicios como problemas, y en este capítulo no iba a ser menos.

La resolución de los problemas de geometría presupone fundamentalmente el conocimiento de las principales relaciones, fórmulas y teoremas necesarios. Es por ello la importancia del conocimiento de la teoría antes de afrontar un problema. Para su resolución es conveniente seguir el siguiente esquema:

- ✓ Lectura y comprensión del enunciado.
- ✓ Traducción del problema al lenguaje matemático con la ayuda de un croquis.
- ✓ Planteamiento del problema.
- ✓ Resolución con precisión.
- ✓ Evaluación e interpretación de los resultados con los datos del enunciado.

## 8.7.1.- Algunos problemas resueltos

**1.- Comprueba si los puntos A (2, 7), B (5, –1) y C (15, –25) están alineados.**

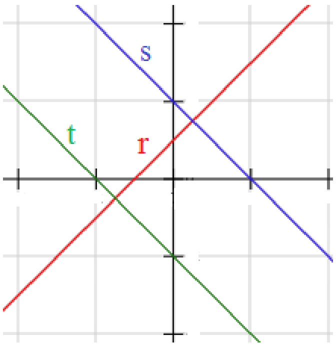



Una forma sencilla de comprobar si tres puntos están alineados es calcular los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y ver si son paralelos (proporcionales). Si lo son, esto indica que los 3 puntos están en la misma línea.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=B-A=(3,-8)\\ \overrightarrow{AC}=C-A=(13,-32)\end{array}\right\} \rightarrow \text{ Veamos si son proporcionales: } \frac{3}{13}=\frac{-8}{-32}$$

Queda claro que no lo son, por tanto los puntos A, B y C no están alineados.

**2.- La recta s pasa por el punto (3, 0), mientras que la recta t, por el (–5, 3). Ambas son perpendiculares a la recta r de ecuación general: 4x + 2y – 7 = 0. Halla las ecuaciones de las rectas t y s.**




Si las rectas s y t son ambas perpendiculares a r, es poque ambas son paralelas. Además, si son perpendiculares a r, las restas s y t tendrán por ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}s:2x-4y+p=0\\ t:2x-4y+q=0\end{array}\right\}$$ Para calcular p y q, utilizaremos los puntos (3,0) y (–5,3)

$$s:2x-4y+p=0 \xrightarrow{\text{Sustituimos el (3,0)}} 2\cdot 3-4\cdot 0+p=0 \rightarrow 6+p=0 \rightarrow p=-6 \rightarrow \text{La ecuación de la recta s es: } 2x-4y-6=0$$

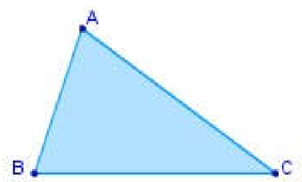
$$t:2x-4y+q=0 \xrightarrow{\text{Sustituimos el (-5,3)}} 2\cdot(-5)-4\cdot 3+q=0 \rightarrow -10-12+q=0 \rightarrow q=22 \rightarrow \text{La ecuación de la recta t es: } 2x-4y+22=0$$

Por tanto, las ecuaciones de s y t son, s: 2x – 4y – 6 =0   t: 2x – 4y + 22 =0

**3.- Halla el área del triángulo de vértices A(–3, 8), B (–3, 2), C(5, 2) con la fórmula de Herón.**

La fórmula de Herón halla el área de un triángulo del cual se conocen todos sus lados. El área se calcula a partir del semiperímetro del triángulo s y de la longitud de los lados (a, b y c).

$$Área=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$




Para calcular el área necesitamos la medida de todos los lados, y para ello calculamos los módulos de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(8,0) \rightarrow a=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{8^2+0^2}=\sqrt{64+0}=\sqrt{64}=8 \rightarrow a=8$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(8,-6) \rightarrow b=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10 \rightarrow b=10$$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,-6) \rightarrow c=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{0^2+(-6)^2}=\sqrt{0+36}=\sqrt{36}=6 \rightarrow c=6$$

El semiperímetro es: $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{10+8+6}{2}=\frac{24}{2}=12 \rightarrow s=12$ y el área:

$$Área=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \rightarrow A=\sqrt{12\cdot(12-10)\cdot(12-8)\cdot(12-6)}=\sqrt{12\cdot 2\cdot 4\cdot 6}=\sqrt{576}=24 \text{ u.a.}$$

Por tanto, el área del triángulo es de 24 unidades de área.

## 4.- Determina el punto de la recta r : 4x – 8y + 7 = 0 que equidiste de los puntos A(2, 1) y B (1, –3).

Pasamos de la ecuación general a la ecuación explícita: $4x-8y+7=0 \quad \rightarrow \quad y=\frac{4x+7}{8} \quad \rightarrow \quad y=\frac{x}{2}+\frac{7}{8}$

Por tanto, cualquier punto de la recta tendrá por coordenadas $G(x,y)=\left(x,\frac{x}{2}+\frac{7}{8}\right)$ que es a lo que llamamos punto genérico de la recta r.

Si ese punto está a la misma distancia de A que de B, entonces los módulos de los vectores $\overrightarrow{AG}$ y $\overrightarrow{BG}$ serán iguales. Así que vamos a calcularlos primero y después obligaremos a que sus módulos sean iguales.

$$\overrightarrow{AG}=G-A=\left(x,\frac{x}{2}+\frac{7}{8}\right)-(2,1)=\left(x-2,\frac{x}{2}+\frac{7}{8}-1\right)=\left(x-2,\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\right) \qquad \overrightarrow{BG}=G-B=\left(x,\frac{x}{2}+\frac{7}{8}\right)-(1,-3)=\left(x-1,\frac{x}{2}+\frac{7}{8}+3\right)=\left(x-1,\frac{x}{2}+\frac{31}{8}\right)$$

De aquí que:

$$\left\|\overrightarrow{AG}\right\|=\left\|\overrightarrow{BG}\right\| \quad \rightarrow \quad \sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{4x-1}{8}\right)^2}=\sqrt{(x-1)^2+\left(\frac{4x+31}{8}\right)^2} \quad \rightarrow \quad (x-2)^2+\left(\frac{4x-1}{8}\right)^2=(x-1)^2+\left(\frac{4x+31}{8}\right)^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \cancel{x^2}-4x+4+\cancel{\frac{x^2}{4}}-\frac{x}{8}+\frac{1}{64}=\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{\frac{x^2}{4}}+\frac{31x}{8}+\frac{961}{64} \quad \rightarrow \quad -4x-\frac{x}{8}+2x-\frac{31x}{8}=-4-\frac{1}{64}+1+\frac{961}{64} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -6x=12 \quad \rightarrow \quad x=-\frac{12}{6} \quad \rightarrow \quad x=-2$$

Por tanto, el punto de r que equidista de A y de B es: $\left(x,\frac{x}{2}+\frac{7}{8}\right)=\left(-2,\frac{-2}{2}+\frac{7}{8}\right)=\left(-2,-1+\frac{7}{8}\right) \quad \rightarrow \quad P\left(-2,-\frac{1}{8}\right)$

## 8.08.- Autoevaluación

**01.-** Calcula m para que los puntos R (5, –2), S (–1, 1) y T (2, m) estén alineados.

**02.-** A partir del punto P (1, 3), trazamos el vector 2υ+v–ω y llegamos al punto Q. Averigua las coordenadas de Q si conocemos los vectores υ=(2, 1), v=(3, –1) y ω=(2, 3).

**03.-** Comprueba si los puntos A(18, 15) y B(–43, –5) pertenecen a la recta x – 3y + 27 = 0.

**04.-** Calcula m y n para que las rectas r: 3x + my–8 =0 y s: nx – 2y + 3 = 0 se corten en el punto P(1, 5).

**05.-** a) Calcula el valor de k para que la recta de ecuación (k + 3)x – y – 2 = 0 pase por el punto A (2, 0). b) ¿Cuál es la pendiente de esa recta?

**06.-** Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas y halla el punto de intersección cuando sea posible:

$$r:\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-2t \end{cases} \qquad s: x-1=\frac{y}{2} \qquad s:\begin{cases} x=t \\ y=2t \end{cases}$$

**07.-** Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por (4, –3) en los siguientes casos:
a) r : 2x + 7 = 0 y b) r : –y + 4 = 0

**08.-** Halla la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio, siendo A(–5, 3) y B(2, 7).

**09.-** Comprueba que el cuadrilátero de vértices A(1, 5), B(5, 1), C(–4, –3) y D(–8, 1) es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.

**10.-** Dados los puntos A(0, 4) y B(–5, 0), halla el punto simétrico de B respecto de A y el simétrico de A respecto de B.

**11.-** La recta r es paralela a 5x – 4y + 3 = 0, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto (1, 3). Escribe las ecuaciones de r y s.

**12.-** Los puntos A(4, 5) y B(7, 0) son vértices de un trapecio rectángulo que tiene dos lados sobre los ejes de coordenadas y otro lado paralelo al eje X. Dibuja el trapecio y halla: a) Las ecuaciones de sus lados. b) Su perímetro. c) Su área.

**13.-** Halla las coordenadas del punto D, de modo que ABCD sea un paralelogramo, siendo A(1, –1), B(0, 2) y C(6, 5).

**14.-** Dibuja un paralelogramo que tenga dos de sus lados sobre las rectas y = 3x e y = 0 y un vértice en el punto P(6, 3). a) Halla las ecuaciones de los otros dos lados. b) Di cuáles son las coordenadas de los otros vértices.

**15.-** Prueba que el cuadrilátero de vértices A(4, 2), B(–2, 5), C(–5, 2) y D(–2, –4) es un trapecio isósceles y calcula su perímetro.

**16.-** Dados la recta r : x – 2y + 1 = 0 y el punto A (–1, 5), halla el punto simétrico de A respecto de r.

**2023**