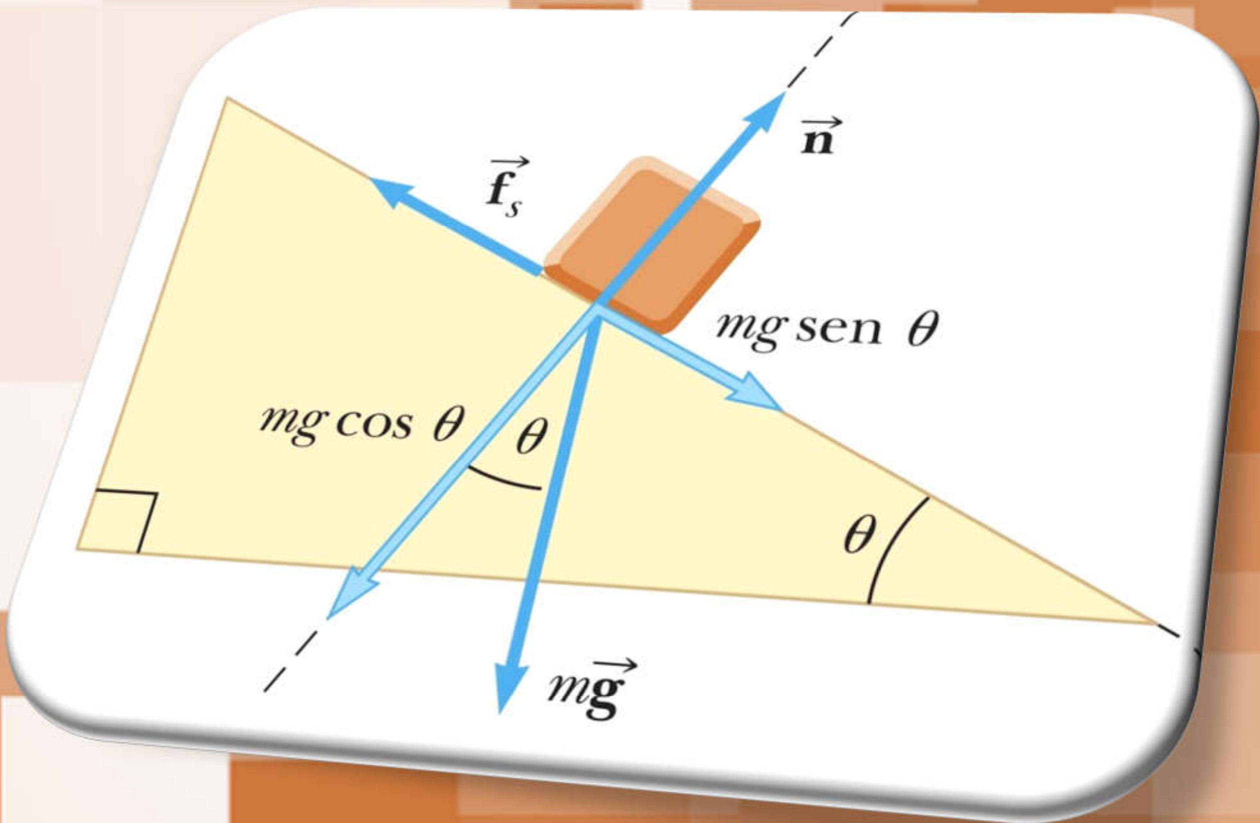
Unidad Didáctica 7

TRIGONOMETRÍA

4º ESO



En esta unidad vas a:

1. **Medir ángulos tanto en radianes como en grados sexagesimales y cambiar de unas unidades a otras.**
2. **Conocer las razones trigonométricas de un ángulo agudo y relacionarlas.**
3. **Aprender las razones trigonométricas de los ángulos más importantes.**
4. **Reconocer las razones trigonométricas de ángulos complementarios, ángulos suplementarios, ángulos opuestos y negativos.**
5. **Calcular las razones trigonométricas conocidas una de ellas.**
6. **Reducir ángulos al primer cuadrante.**
7. **Utilizar adecuadamente, y con soltura, la calculadora para efectuar cálculos trigonométricos.**
8. **Resolver triángulos rectángulos.**
9. **Aplicar relaciones trigonométricas sencillas para el cálculo de distancias y ángulos en situaciones reales.**

SUMARIO

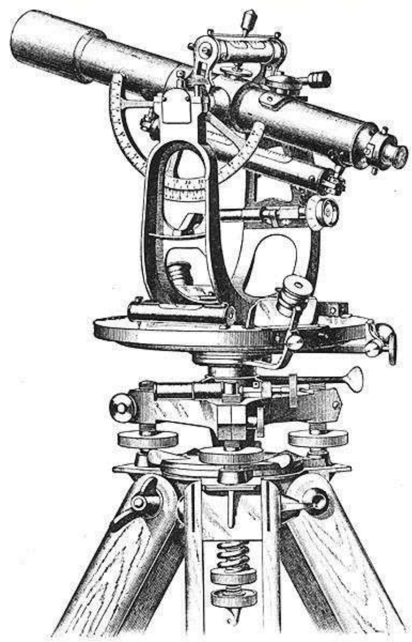
7.00.- Lectura Comprensiva
7.01.- Introducción
7.02.- Ángulos y sus medidas
7.03.- Razones Trigonométricas de un ángulo agudo
7.04.- Relaciones entre las razones trigonométricas
7.05.- Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°
7.06.- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera
7.07.- Signo de las razones trigonométricas
7.08.- Relaciones entre las razones trigonométricas
    7.08.1.- Razones suplementarias y opuestas
    7.08.2.- Razones de ángulos mayores de 360°
    7.08.3.- Razones de ángulos negativos
7.09.- Resolución de Triángulos rectángulos
7.10.- Ejercicios Resueltos
7.11.- Autoevaluación

7.00.- Lectura Comprensiva

La medición del mundo

Una de las historias más famosas acerca de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nos lo presenta midiendo los ángulos del gran triángulo terrestre formado por los picos de los montes alemanes Hohenhagen, Inselsberg y Brocken, a fin de contrastar si la geometría del espacio real era o no euclídea. Pero dicha historia ha resultado controvertida y ha sido puesta en cuestión.

– El cielo estaba encapotado, la tierra, embarrada. Trepó por encima de un seto y se encontró, jadeante, sudado y cubierto de agujas de pino, delante de dos muchachas. Al preguntarle qué hacía allí, explicó, nervioso, la técnica de la triangulación: conociendo un lado y dos ángulos de un triángulo, se podían determinar los otros lados y el ángulo desconocido. Así que se escogía un triángulo en cualquier lugar de aquella tierra de Dios, se medía el lado de más fácil acceso, y se determinaban los ángulos para el tercer punto con ese aparato. Levantó el teodolito y lo giró, así así, y fíjense ustedes, así, con dedos torpes, de un lado a otro, como si fuera la primera vez. Luego añádase una serie de tales triángulos uno junto a otro. [...]



Pero un paisaje, repuso la mayor de las dos, no era un plano.

Él la miró fijamente. Había faltado la pausa. Como si ella no precisase reflexionar.

Desde luego que no, contestó él sonriendo.

Los ángulos de un triángulo, dijo ella, sumaban en un plano ciento ochenta grados, pero no sobre una esfera. Con eso quedaba dicho todo.

Él la observó como si la viera entonces por primera vez. Ella le devolvió la mirada enarcando las cejas. Sí, dijo él. Bien. Para compensarlo, había que encoger en cierto modo los triángulos después de la medición hasta un tamaño infinitamente pequeño. En principio una sencilla operación diferencial. Aunque de esa forma... Se sentó en el suelo y sacó su bloc. De esa forma, murmuró mientras pergeñaba sus anotaciones, todavía no lo había realizado nadie. Cuando levantó la vista, se había quedado solo. [...]

Pidió por carta la mano de Johanna y fue rechazado. No tenía nada contra él, escribió ella, sólo que dudaba que la existencia a su lado fuese saludable. Sospechaba que él extraía la vida y la energía de las personas de su entorno, igual que la tierra del sol y el mar de los ríos, de que cerca de él una estaría condenada a la palidez y a la semirrealidad de una existencia de espectro. –

Pasado un tiempo, lo volvió a intentar y, esta vez, fue aceptado. «Él», uno de los protagonistas de esta historia, se llamaba Gauss y fue uno de los astrónomos, físicos y matemáticos más importantes del siglo XIX.

<u>Lee nuevamente el texto anterior y responde a las cuestiones:</u>

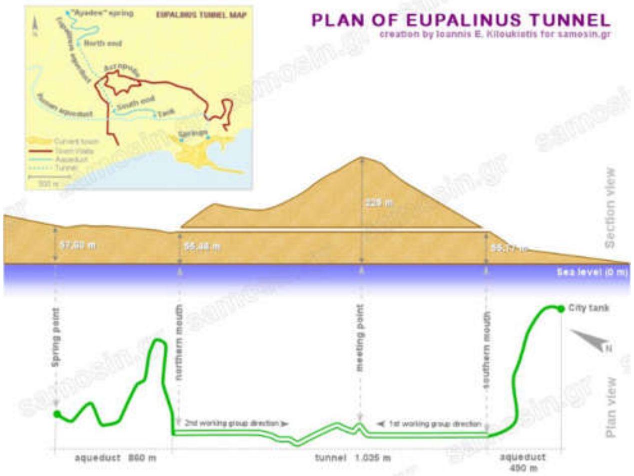
1.- ¿De qué famoso científico habla esta historia?

2.- ¿Por qué Johanna le rechazó la primera vez?

3.- ¿Qué es un teodolito y para que se usa?

7.01.- Introducción.

Una de las construcciones más notables de los antiguos griegos fue el túnel de Samos, en el que, ineludiblemente se empleó la triangulación. Se realizó en el siglo VI a.C. para llevar agua desde las fuentes del Monte Castro a la ciudad de Samos (donde nació Pitágoras), situada en aguas del mar egeo. El túnel tenía unos dos metros de diámetro y algo más de un kilómetro de longitud. Se excavó partiendo simultáneamente de sus dos extremos A y B, lo que suponía una planificación tecnológica sorprendente.



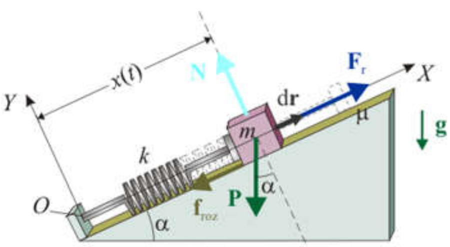
Es el primero del que se conoce el nombre del ingeniero que lo construyó, **Eupalinos de Megara**. Este ingeniero griego es hijo de Naustrophos y es famoso por su habilidad en la construcción de acueductos y túneles, así como por su conocimiento en la aplicación de técnicas matemáticas y geométricas en la construcción. El **Túnel de Eupalinos** todavía se puede visitar hoy en día y es un importante sitio arqueológico y turístico en Samos.

Se trata de una obra de un kilómetro de longitud, que trascurre bajo el monte Kastro, construida hacia el 530 a.C., durante el mandato del tirano Polícrates. El túnel se excavó manualmente en roca caliza, con una sección cuadrada de 1,75 m x 1,75 m, sirviendo de apoyo para la construcción del acueducto de la capital de la isla (que hoy es llamado Pitagoreión) y como vía de escape en caso de asedio. Se extrajeron 7.000 m^3 de roca, para lo cual se emplearon unos 4.000 esclavos y se tardó más de una década tanto para la construcción del túnel como del acueducto. El historiador Heródoto describió la obra en su Libro III.

El túnel, que estuvo funcionando durante más de mil años, fue considerado como una de las tres maravillas del Mundo Heleno, y desde luego, una de las obras maestras de la ingeniería de la antigüedad. En efecto, el problema más importante al que se tuvo que enfrentar Eupalinos fue superar los errores en la medición, de forma que los dos equipos que excavaban el túnel desde los dos extremos se encontraran. Al final solo hubo una desviación lateral de 6 m y vertical de 60 cm. A lo largo de la galería todavía se puede ver la línea de nivel que servía de guía para la excavación, que tiene una pendiente bastante regular de 0,4%. También se conservan inscripciones de los responsables de cada grupo de trabajo a lo largo del túnel. Os propongo que expliquéis cómo se podría realizar el cálculo usando únicamente triángulos rectángulos y alcanzar dicha precisión. Aunque también podéis ver alguno de los videos que os dejo en el classroom, donde se explica el procedimiento.

En esta unidad se explican y aplican los conceptos y procedimientos que conducen al concepto de razón trigonométrica, estableciéndose así los cimientos sobre los que se basa el concepto de función trigonométrica.

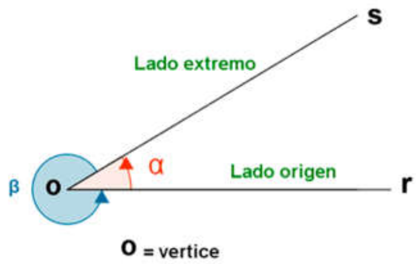
En esta unidad se trabaja aprovechando contenidos de geometría referentes a la semejanza de triángulos y se aborda **la resolución de triángulos rectángulos** remarcando de esta forma la importancia de las aplicaciones de la Trigonometría en aspectos de la vida cotidiana y en relación con otras asignaturas como la Topología, la Astronomía y sobre todo con la Física. Ejemplo de esto es la descomposición de fuerzas en un plano inclinado a la hora de calcular la aceleración del movimiento con la ayuda de la segunda ley de Newton.

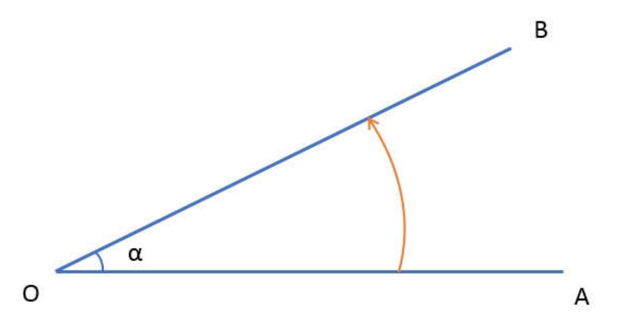
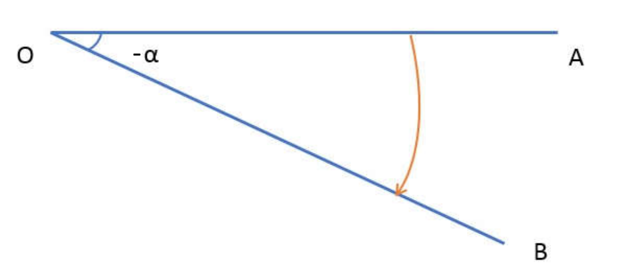


$$\sum_i \vec{F}_i = m\cdot\vec{a}$$

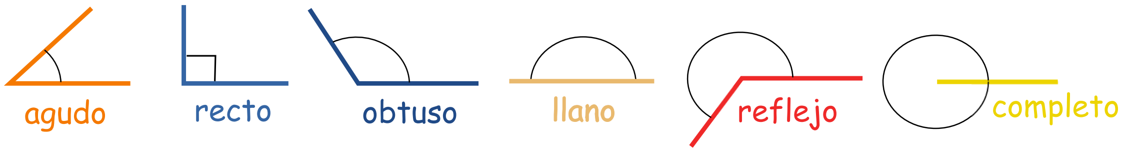
7.02.- Ángulos y sus medidas

Se le llama ángulo a la región del plano entre dos semirrectas que tienen un punto en común llamado vértice. También lo podemos definir como la amplitud de rotación o giro que describe un segmento rectilíneo en torno de uno de sus extremos tomado como vértice, desde una posición inicial hasta una posición final.



Criterio de Signos	
	
Ángulo Positivo	**Ángulo Negativo**
Si la rotación es en sentido levógiro, (anti horario).	Si la rotación es en sentido dextrógiro (horario).

Según la amplitud del ángulo, los podemos clasificar en:



Hasta ahora, hemos utilizado el sistema sexagesimal para medir amplitudes de ángulos, o simplemente ángulos. La unidad de medida de ángulos en este sistema es el **grado**, que se expresa mediante el símbolo °, y sus submúltiplos son el **minuto** y el **segundo**.

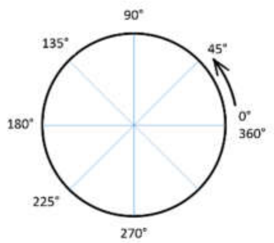
$43° \ 23' \ 45''$ → 43 grados, 23 minutos y 45 segundos

Pues a partir de ahora podemos utilizar el sistema radial cuya unidad es el **radián** (rad)

MEDIDA DE ÁNGULOS

en Grados (DEG):

El **grado** es el ángulo plano que, teniendo vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre la circunferencia de ese círculo un arco de longitud l.

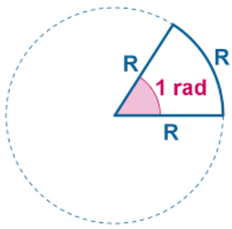


$$l = \frac{2\pi R}{360°}$$

Se simboliza por °

en Radianes: (RAD):

El **radián** es el ángulo plano que, teniendo su vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre la circunferencia de ese círculo un arco de longitud igual al radio.



Se simboliza por rad

Para cambiar de una unidad a otra simplemente hemos de saber que 180 grados sexagesimales se corresponden con π radianes:

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

Ejemplo

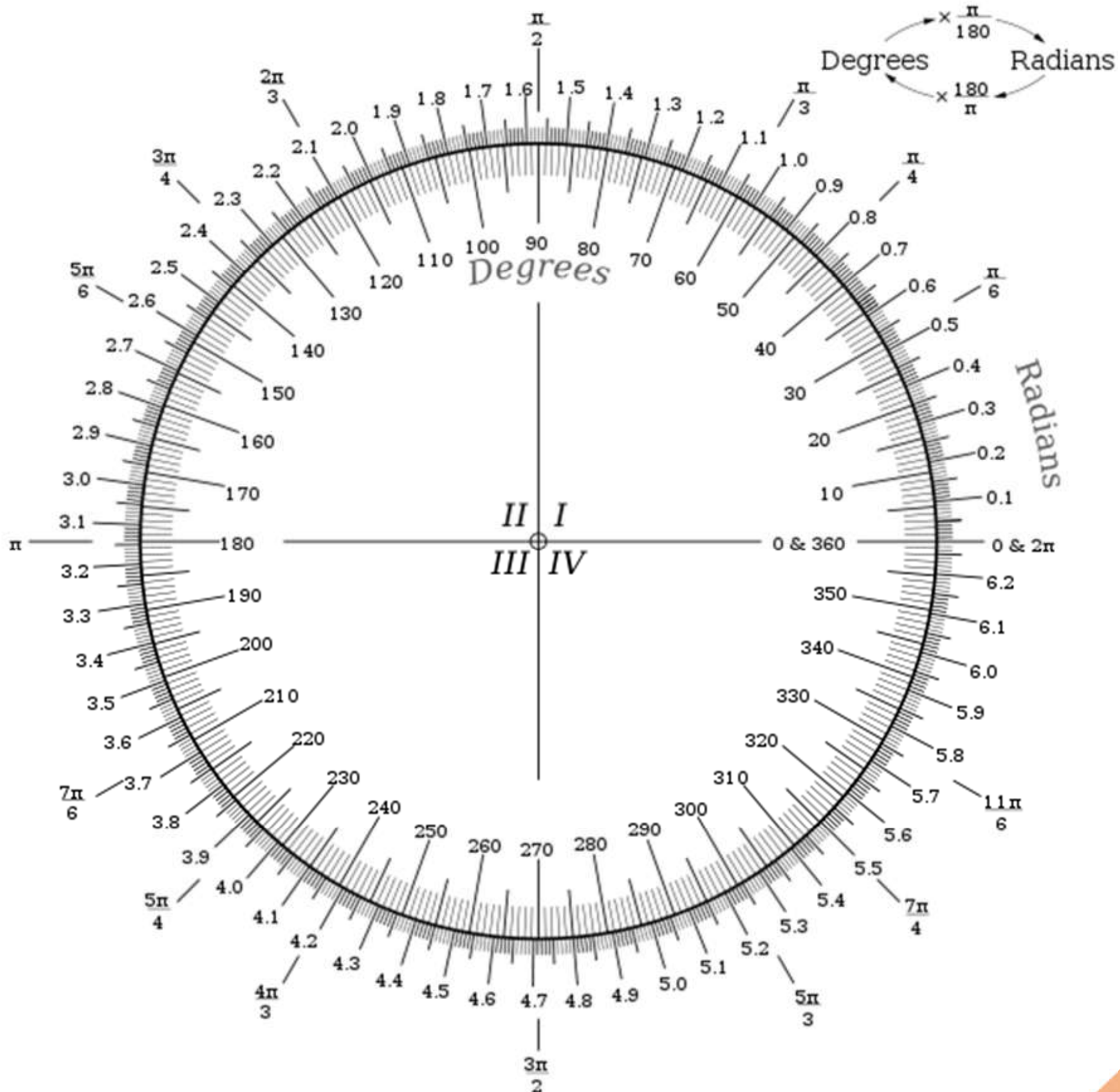
1.- Expresa en radianes el ángulo de 45° sexagesimales y π/3 radianes en grados.

Tanto para pasar de grados a radianes y viceversa, utilizaremos una proporción o regla de 3:

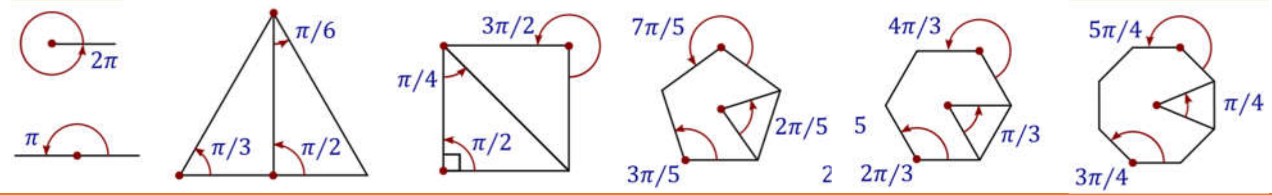
$$\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{45^\circ}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{45 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \qquad \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{y}{\pi/3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{180 \cdot \frac{\cancel{\pi}}{3}}{\cancel{\pi}} = \frac{180}{3} = 60^\circ$$

Por tanto 45° se corresponden con $\frac{\pi}{4}$ rad y $\frac{\pi}{3}$ rad con 60°.

Tabla de equivalencia entre grados sexagesimales y radianes																	
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radianes	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π	7π/6	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4	11π/6	2π



Ángulos en las figuras geométricas más comunes



Piensa y practica

1.- Expresa en radianes estos ángulos: Sol: a) π, b) 3π; c) 5π; d) 6π; e) 8π

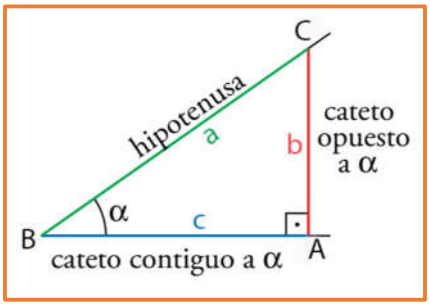
a) 180 ° b) 540 ° c) 900 ° d) 1080 ° e) 1440 °

2.- Expresa en grados sexagesimales: Sol: a) 1260°; b) 60°; c) 30°; d) 135°; e) 72°

a) 7π rad b) $\frac{\pi}{3}$ rad c) $\frac{\pi}{6}$ rad d) $\frac{3\pi}{4}$ rad e) $\frac{2\pi}{5}$ rad

7.03.- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Cuando hablamos de **razón** nos estamos refiriendo a un cociente. Como vamos a ver, las **razones trigonométricas** relacionan lados y ángulos a través de cocientes.



A partir de cualquier ángulo agudo α (menor de 90°) es posible construir un triángulo rectángulo ABC como el que puedes apreciar en la siguiente figura.

Teniendo en cuenta dicha figura geométrica y fijándonos en el ángulo α formado en el vértice B, es posible obtener una serie de razones que reciben el nombre de razones trigonométricas conocidas como **seno, coseno, tangente, cosecante y cotangente**.

Seno del ángulo α : El seno de un ángulo agudo α, es el cociente entre la longitud del cateto opuesto (b) al ángulo y la longitud de la hipotenusa (a). Se representa como sen(α) o sin(α).

$$\text{sen}(\alpha)=\frac{\text{Cateto Opuesto (b)}}{\text{Hipotenusa (a)}}=\frac{b}{a}$$

Coseno del ángulo α : El coseno de un ángulo agudo α, es el cociente entre la longitud del cateto contiguo (b) al ángulo α y la longitud de la hipotenusa (a). Se representa como cos(α).

$$\cos(\alpha)=\frac{\text{Cateto Contiguo (c)}}{\text{Hipotenusa (a)}}=\frac{c}{a}$$

Tangente del ángulo α : La tangente de un ángulo agudo α, es el cociente entre el seno y el coseno o, dicho de otra manera, el cociente entre la longitud del cateto opuesto (b) y la longitud del cateto contiguo (c). Se representa como tg(α) o tan(α).

$$\text{tg}(\alpha)=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{\text{Cateto Opuesto (b)}}{\text{Hipotenusa (a)}}}{\frac{\text{Cateto Contiguo (c)}}{\text{Hipotenusa (a)}}}=\frac{\text{Cateto Opuesto (b)}\cdot\cancel{\text{Hipotenusa (a)}}}{\text{Cateto Contiguo (c)}\cdot\cancel{\text{Hipotenusa (a)}}}=\frac{\text{Cateto Opuesto (b)}}{\text{Cateto Contiguo (c)}}=\frac{b}{c}$$

El seno y el coseno de un ángulo agudo son siempre mayores que 0, porque estamos dividiendo distancias positivas, y menores que 1, puesto que la hipotenusa siempre es mayor que cualquiera de los catetos. En el caso de la tangente puede tomar cualquier valor positivo.

$$0\le \text{sen}(\alpha)\le 1 \qquad\qquad 0\le \cos(\alpha)\le 1$$

El seno, el coseno y la tangente son las razones trigonométricas principales. El resto, como vamos a ver, se pueden obtener simplemente haciendo el valor inverso de estas, de ahí que se llamen usualmente razones inversas. Como se trata del inverso multiplicativo o recíproco (inverso respecto a la operación de multiplicación), también se suelen llamar razones recíprocas.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS O RECÍPROCAS		
Secante de α	Cosecante de α	Cotangente de α
Es la inversa del coseno	**Es la inversa del seno**	**Es la inversa de la tangente**
$\sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}=\frac{\text{Hipotenusa (a)}}{\text{Cateto Contiguo (c)}}=\frac{a}{c}$	$\csc(\alpha)=\frac{1}{\text{sen}(\alpha)}=\frac{\text{Hipotenusa (a)}}{\text{Cateto Opuesto (b)}}=\frac{a}{b}$	$\text{cotg}(\alpha)=\frac{1}{\text{tg}(\alpha)}=\frac{\text{Cateto Contiguo (c)}}{\text{Cateto Opuesto (b)}}=\frac{c}{b}$

Ejemplo

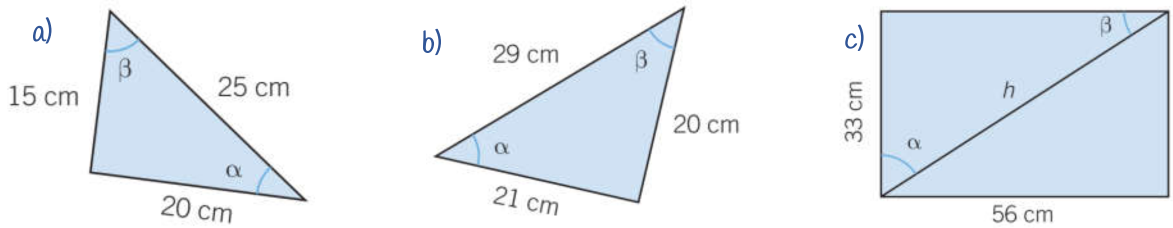
2.- Halla las razones trigonométricas principales de los ángulos que aparecen en la figura:

$\text{sen}(\alpha)=\frac{5}{13}=0{,}385$ $\cos(\alpha)=\frac{12}{13}=0{,}923$ $\text{tg}(\alpha)=\frac{5}{12}=0{,}417$

$\text{sen}(\beta)=\frac{12}{13}=0{,}923$ $\cos(\beta)=\frac{5}{13}=0{,}385$ $\text{tg}(\beta)=\frac{12}{5}=2{,}40$

Piensa y practica

3.- Dadas las siguientes figuras, calcula en cada una de ellas las razones trigonométricas de los ángulos α y β:

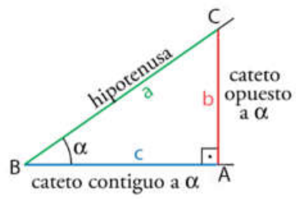


Sol: a) Senα=0,6=Cosβ; Cosα=0,8=senβ ; tgα=0,75; tgβ=1,33; b) Senα=0,69=Cosβ; Cosα=0,72=senβ ; tgα=0,95; tgβ=1,05; c) Senα=0,86=Cosβ; Cosα=0,51=senβ ; tgα=1,56; tgβ=0,59

7.04.- Relaciones entre las razones trigonométricas.

Los valores de **sen**, **cos** y **tg** de un mismo ángulo no son independientes, sino que están relacionados, de tal modo que conociendo uno de ellos, podemos calcular los otros dos. La expresión que los relaciona se llama identidad fundamental de la trigonometría y viene dada por:

$$\boxed{\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1}$$



DEMO

Sabemos que en cualquier triángulo rectángulo ocurre que: $b^2+c^2=a^2$, si dividimos todo por a^2, llegamos a:

$\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}$ simplificando $\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=1$ agrupando llegamos a $\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2=1$. Como $\frac{b}{a}$ se corresponde con el seno de α, y $\frac{c}{a}$ se corresponde con el coseno, si sustituimos $(\text{sen }\alpha)^2+(\cos\ \alpha)^2=1$. Cqd.

Nota: En lugar de $(\text{sen }\alpha)^2$ se suele escribir $\text{sen}^2\alpha$ $\rightarrow$ $(\text{sen }\alpha)^2=\text{sen}^2\ \alpha$

Si en la expresión fundamental de la trigonometría, dividimos todo por $\cos^2 \alpha$, llegamos a:

$$\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \quad\rightarrow\quad \frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}+\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \quad\rightarrow\quad \text{tg}^2(\alpha)+1=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

Así que, resumiendo, las relaciones entre las razones trigonométricas son:

$$\boxed{\text{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \qquad \text{tg}(\alpha)=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \text{tg}^2(\alpha)+1=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}}$$

Como hemos dicho con anterioridad, estas tres expresiones las vamos a utilizar, sobre todo, para conocida una de las razones trigonométricas de un ángulo agudo, poder calcular las demás.

Ejemplo

3.- Sabiendo que $\cos \boldsymbol{\alpha} = 0{,}63$, calcula las otras dos razones trigonométricas, sen **α** y tg **α**.

Si $\cos(\alpha)=0{,}63$, podemos calcular el seno, usando la identidad fundamental de la trigonometría, $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, en la que despejaremos el seno:

$$\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad\rightarrow\quad \text{sen}^2\alpha=1-\cos^2\alpha \quad\rightarrow\quad \text{sen}\,\alpha=+\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}63^2}=0{,}78$$

Y con el seno y el coseno, ya podemos calcular la tangente:

$$\text{tg}(\alpha)=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad\rightarrow\quad \text{tg}(\alpha)=\frac{0{,}78}{0{,}63}=1{,}24$$

Por tanto, sen **α** =0,78 y tg **α**=1,24

4.- Sabiendo que tg **α** = 2, calcula las otras dos razones trigonométricas, sen **α** y cos **α**.

Si llamamos s al sen α y c al cos α, mediante la ecuación fundamental de la trigonometría y la definición de tangente, podemos plantear un sistema de ecuaciones no lineales:

$$\text{tg}(\alpha)=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad\rightarrow\quad 2=\frac{s}{c} \quad\rightarrow\quad s=2c \qquad \text{y} \qquad s^2+c^2=1$$

$$\begin{cases} s=2c \\ s^2+c^2=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sustituyendo}} (2c)^2+c^2=1 \quad\rightarrow\quad 4c^2+c^2=1 \quad\rightarrow\quad 5c^2=1 \quad\rightarrow\quad c^2=\frac{1}{5} \quad\rightarrow\quad c=+\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Como } \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ y } \text{sen}\alpha=2\cos\alpha \quad\rightarrow\quad \text{sen}\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Por tanto, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}=0{,}45$ y $\text{sen}\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}=0{,}89$

Piensa y practica

4.- Si el seno de un ángulo agudo **β** es 0,6, calcula las otras razones trigonométricas.	Cos α=0,8; tg α=0,75
5.- Si la tangente de un ángulo agudo **α** es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ calcula tanto el seno como el coseno de dicho ángulo.	Cos α=√6/3 Sen α=√3/3
6.- Decide si existe un ángulo **α** que cumpla las siguientes condiciones: sen **α** = 0,5736 y cos **α** = 0,8192	Si
7.- Decide si existe un ángulo **β** que cumpla las siguientes condiciones: cos **α** = 0,3240 y tg **α** = 0,4663	No

Además de para calcular las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo conocida una de ellas, también las podemos utilizar para verificar o demostrar otras. Para ello intentaremos llegar a la identidad fundamental de la trigonometría, o a otra identidad como 1=1.

Ejemplo

5.- Demuestra la siguiente expresión trigonométrica: $\dfrac{1-sen\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+sen\alpha}$

Si multiplicamos en cruz:

$$\frac{1-sen\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+sen\alpha} \rightarrow (1-sen\alpha)\cdot(1+sen\alpha)=\cos^2\alpha \rightarrow 1-sen^2\alpha=\cos^2\alpha \rightarrow 1=sen^2\alpha+\cos^2\alpha \rightarrow 1=1$$

Llegamos a la identidad fundamental de la trigonometría, por tanto, quedaría demostrado, ya que 1 es igual a 1. C.q.d.

Piensa y practica

8.- Demuestra las siguientes identidades trigonométricas

a) $sen^2x-\cos^2y=sen^2y-\cos^2x$

b) $\tan^2x=sen^2x+sen^2x\cdot\tan^2x$

c) $\dfrac{sen\alpha\cdot\cos\alpha}{tg\alpha}=1-sen^2\alpha$

d) $(1+tg^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha=1$

e) $\cos\alpha+\dfrac{sen^2\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$

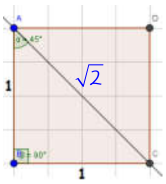
f) $\cos^4x-sen^4x=2\cdot\cos^2x-1$

7.05.- Razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60°.

Los triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos son 45°, 30° o 60° aparecen con mucha frecuencia, por lo que resultan especialmente interesantes en geometría. Así que, vamos a hallar las razones trigonométricas de estos ángulos que como veremos se pueden calcular de forma exacta.

RAZONES del ÁNGULO de 45°

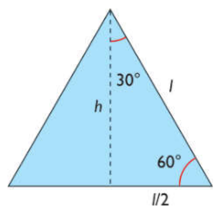
- Utilizamos un cuadrado de lado unidad, en el que la diagonal, **d**, la calculamos mediante Pitágoras y vale $d=\sqrt{2}$



Aquí, tenemos que: $\begin{cases} sen45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Cos } 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ y de donde $\rightarrow$ $\tan45°=\dfrac{\text{sen }45}{\cos 45}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$

RAZONES del ÁNGULO de 30°

- Utilizaremos un triángulo equilátero de lado l, en el que calculamos su altura en función de dicho lado utilizando el teorema de Pitágoras:



$$h=\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3l^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}l$$

De aquí, tenemos que: $\begin{cases} \text{sen } 30°=\dfrac{l/2}{l}=\dfrac{1}{2} \\ \cos30°=\dfrac{\sqrt{3}/2\, l}{l}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ de donde $\rightarrow$ $\tan30°=\dfrac{\text{Sen } 30°}{\cos30°}=\dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

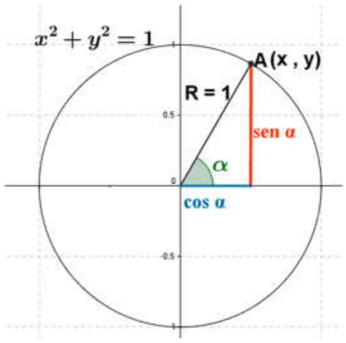
RAZONES del ÁNGULO de 60°

- De forma similar, y usando el mismo triángulo: $\begin{cases} \text{sen } 60°=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\frac{l}{2}}{l}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos60°=\dfrac{l/2}{l}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\rightarrow$ $\tan60°=\dfrac{\text{Sen } 60°}{\cos60°}=\dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}$

Por tanto, tenemos que: $\text{sen } 45°=\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\text{sen } 30°=\cos 60°=\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $\text{sen } 60°=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

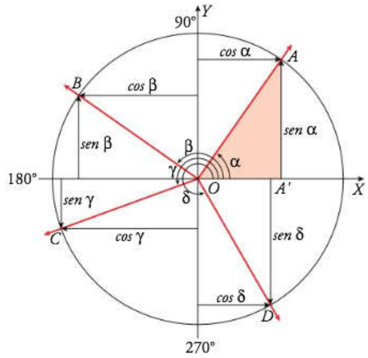
De donde, podemos deducir que, si α y β son dos ángulos complementarios, ocurre que: $\begin{cases}\text{sen } \alpha=\cos \beta \\ \cos \alpha=\text{sen } \beta\end{cases}$

7.06.- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.



Una circunferencia goniométrica es una circunferencia especial que vamos a utilizar para medir ángulos y definir las razones trigonométricas de los mismos.

Consideremos una circunferencia de centro (0,0) y radio 1. Como todas las relaciones trigonométricas son razones de proporcionalidad, el valor del radio nos resultará indiferente, pero, si lo consideramos como 1, nos hará los cálculos más sencillos.



Cada ángulo α queda determinado por un punto A de coordenadas **(x, y)**, sobre la circunferencia goniométrica, y se cumple:

$$A=(x,y)=(\cos\,\alpha,\operatorname{sen}\,\alpha)$$

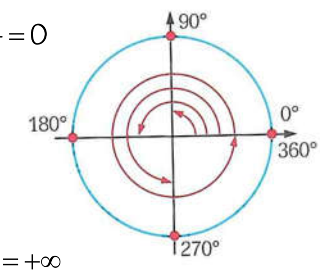
Como la hipotenusa del triángulo mide 1:

$$\operatorname{sen}\,\alpha=\frac{y}{1}=y \qquad\qquad \cos\alpha=\frac{x}{1}=x$$

Como siempre, la identidad fundamental de la trigonometría se cumple para todos los casos. **Sen^2 α + Cos^2 α=1**

Las razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45° y 60° ya los hemos visto con anterioridad, veamos ahora otras de ángulos también importantes:

- Ángulo de amplitud 0°: $\begin{cases}\operatorname{Sen}\,0°=\dfrac{cat.opuesto}{hipotenusa}=\dfrac{0}{1}=0\\[2ex] \operatorname{Cos}\,0°=\dfrac{cat.contiguo}{hipotenusa}=\dfrac{1}{1}=1\end{cases} \rightarrow \quad tg\;0°=\dfrac{\operatorname{sen}0°}{\cos 0°}=\dfrac{0}{1}=0$



- Ángulo recto, 90°: $\begin{cases}\operatorname{Sen}\,90°=\dfrac{cat.opuesto}{hipotenusa}=\dfrac{1}{1}=1\\[2ex] \operatorname{Cos}\,90°=\dfrac{cat.contiguo}{hipotenusa}=\dfrac{0}{1}=0\end{cases} \rightarrow \quad tg\;90°=\dfrac{\operatorname{sen}0°}{\cos 0°}=\dfrac{1}{0}=+\infty$

- Ángulo llano, 180°: $\begin{cases}\operatorname{Sen}\,180°=\dfrac{cat.opuesto}{hipotenusa}=\dfrac{0}{1}=0\\[2ex] \operatorname{Cos}\,180°=\dfrac{cat.contiguo}{hipotenusa}=\dfrac{-1}{1}=-1\end{cases} \rightarrow \quad tg\;180°=\dfrac{\operatorname{sen}180°}{\cos 180°}=\dfrac{0}{-1}=0$

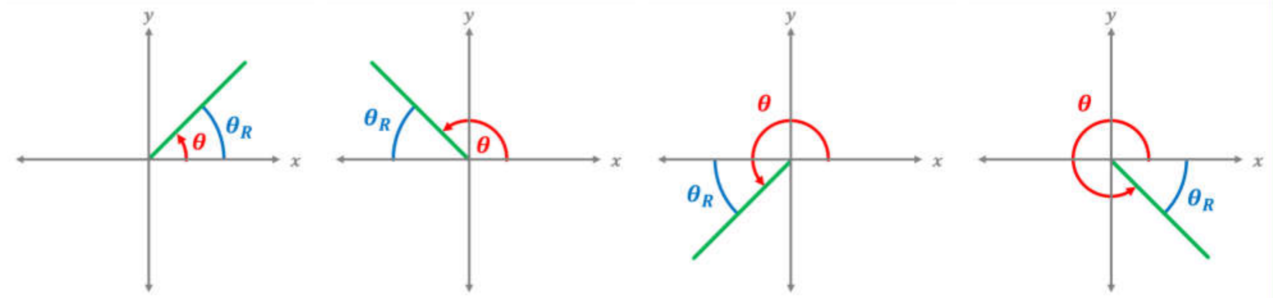
Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo α con la calculadora pulsaremos las teclas **sen, cos** y **tan** de la calculadora, pero para calcular el ángulo del que conocemos una razón trigonométrica, pulsaremos las teclas: SHIFT + **sen**, SHIFT + **cos** y SHIFT + **tan**. Lo que implica hacer la operación inversa llamada arco. **Arcoseno, arcocoseno y arcotangente.**

Piensa y practica	
9.- Calcula de forma razonada utilizando la circunferencia goniométrica las razones trigonométricas del ángulo 270°	
10.- Halla las razones trigonométricas del ángulo de 15°.	sen 15° = 0,259; cos 15° = 0,966; tan 15° = 0,268
11.- Halla el ángulo **α** del primer cuadrante cuya tangente valga 1.	α = Arcotangente 1 = 45°
12.- Halla el ángulo **α** del primer cuadrante cuyo coseno vale 1/3.	α =Arcocoseno (1/3)= 19° 28' 16,30"

7.07.- Signo de las razones trigonométricas

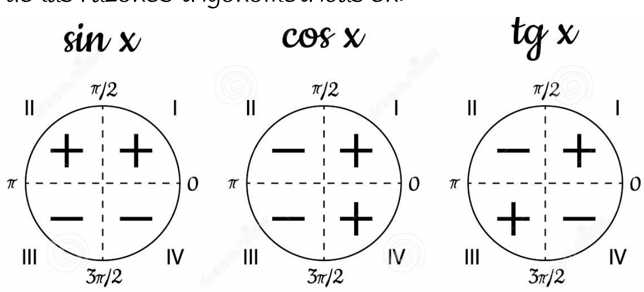
El signo de las razones trigonométricas de un ángulo depende del cuadrante donde se encuentre.

Primer Cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante
$0 < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$



Primer Cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante
Sen $\alpha = +$ Cos$\alpha = +$	Sen $\alpha = +$ Cos$\alpha = -$	Sen $\alpha = -$ Cos$\alpha = -$	Sen $\alpha = -$ Cos$\alpha = +$
Tg $\alpha = +$	Tg $\alpha = -$	Tg $\alpha = +$	Tg $\alpha = -$

Podemos resumir los signos de las razones trigonométricas en:

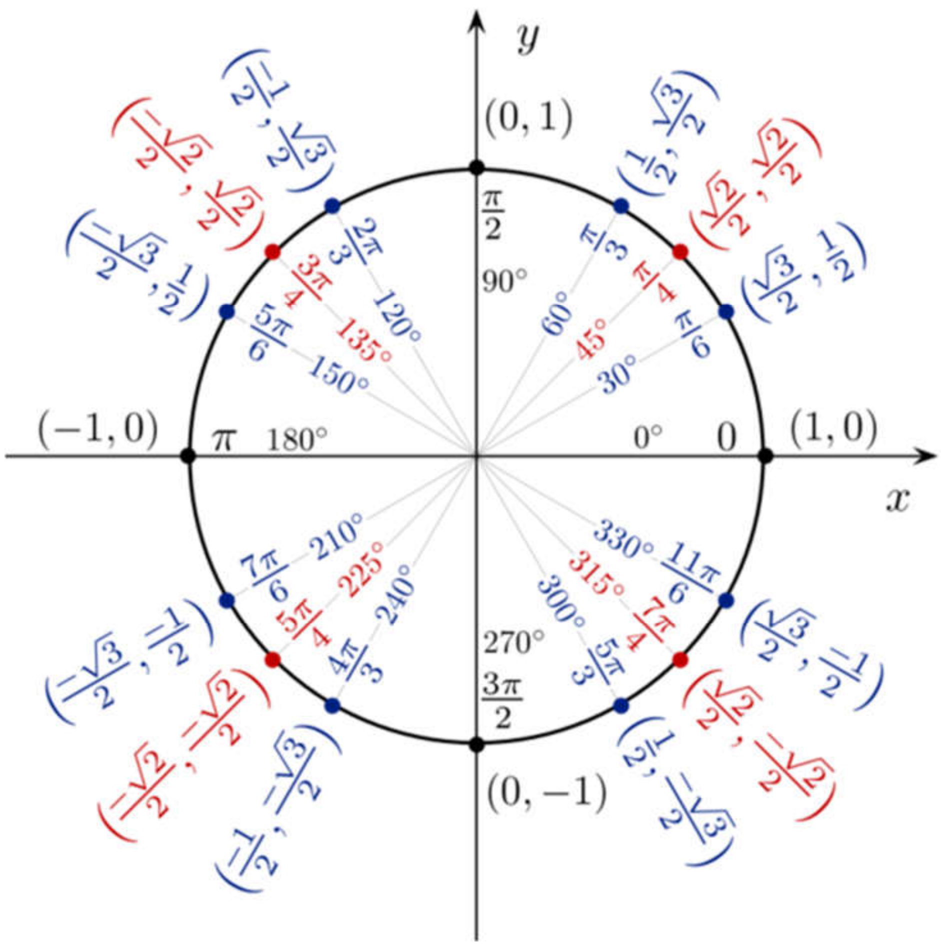


Así, las razones trigonométricas de los ángulos más importantes son:

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Razones Trigonométricas Principales																	
Sen	0	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	½	0	-½	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-½	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	½	0	-½	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-½	0	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	± ∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	± ∞	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
Razones Trigonométricas Inversas																	
Cosec	± ∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	2	± ∞	-2	$-\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	± ∞
Sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	± ∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	± ∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	1
Cotg	± ∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	± ∞	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	± ∞
		1° Cuadrante				**2° Cuadrante**				**3° Cuadrante**				**4° Cuadrante**			

Como podemos observar en la tabla anterior, los valores de las razones trigonométricas se van repitiendo en todos los cuadrantes, variando simplemente sus signos.

Seno y coseno de los ángulos más importantes de la circunferencia goniométrica



Como podemos ver en la circunferencia goniométrica los valores tanto del seno como del coseno de cualquier ángulo están acotados:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(\alpha) \leq 1 \qquad\qquad -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

Piensa y practica

13.- Sabiendo que sen α =−1/3 y que $\pi < \alpha < 3\pi/2$, calcula las restantes razones trigonométricas.

14.- Sabiendo que el coseno de un ángulo del 2° cuadrante vale −4/5, calcula sus restantes razones trigonométricas.

7.7.1.- Regla para calcular las razones Trigonométricas de los ángulos más importantes

	0°	30°	45°	60°	90°
Sen α =	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
Cos α =	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
Tg α =	$\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}}$	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{0}}$

Numeramos los ángulos de 0 a 4 en orden creciente. El número que corresponde a cada ángulo será el *n* del mismo. Numerados así el seno de un ángulo será la raíz de su *n* partida por 2. De esta forma obtenemos la fila de los senos.

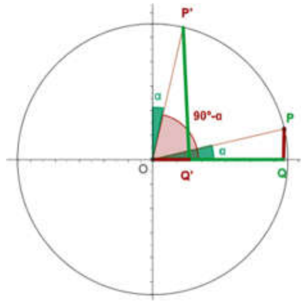
Para obtener la fila de los cosenos no hace falta ningún cálculo, simplemente colocamos la fila que hemos obtenido antes en orden inverso. Y para obtener la de las tangentes, simplemente divididos el valor del seno entre el valor del coseno.

7.08.- Relaciones trigonométricas entre las razones de ciertos ángulos.

Como hemos visto al calcular las razones trigonométricas tanto de los ángulos de 30° y de 60°, como de los ángulos fundamentales en el segundo, tercer y cuarto cuadrante, existen relaciones entre unas y otras. Vamos a estudiarlas de forma más precisa y particular:

7.8.1.- Ángulos Complementarios

Dos ángulos, α y β, son **complementarios** cuando $\alpha+\beta=90°$. Para calcular sus razones trigonométricas, utilizamos las medidas de los lados del triángulo rectángulos de α y β = 90 – α



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sen}(90-\alpha)=\cos\alpha \\ \\ \mathrm{Cos}(90-\alpha)=\mathrm{sen}\alpha \end{array}\right\} \quad \tan(90-\alpha)=\cot\alpha$$

Ejemplo

6.- Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 60 con la ayuda de las del ángulo de 30.

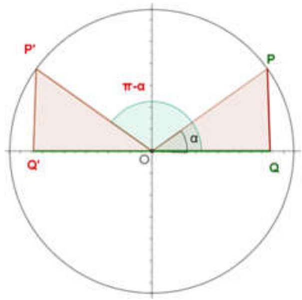
Como ambos ángulos son complementarios, podemos hacer que 60 = 90 – 30:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sen}\ 60°=\mathrm{sen}(90°-30°)=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \mathrm{Cos}\ 60°=\mathrm{Cos}(90°-30°)=\mathrm{Sen}30°=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \tan 60°=\tan(90°-30°)=\cot 30°=\sqrt{3}$$

Por tanto, Sen 60° = Cos 30° y Cos 60° = Sen 30°

7.8.2.- Ángulos Suplementarios

Dos ángulos, α y β, son **suplementarios** cuando $\alpha+\beta=180°$. Para calcular sus razones trigonométricas nos fijaremos en la figura adjunta en la que podemos observar que son iguales excepto en los signos:



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sen}(\pi-\alpha)=\mathrm{Sen}\ \alpha \\ \\ \mathrm{Cos}(\pi-\alpha)=-\ \mathrm{Cos}\ \alpha \end{array}\right\} \quad \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

Ejemplo

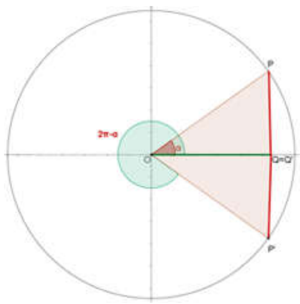
7.- Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 150 con la ayuda de las del ángulo de 30.

Como ambos ángulos son suplementarios, podemos hacer que 150 = 180 – 30 y observando la figura:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{sen}\ 150°=\mathrm{sen}(180°-30°)=\mathrm{sen}30°=\dfrac{1}{2} \\ \cos\ 150°=\cos(180°-30°)=-\cos 30°=\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \quad \mathrm{tg}\ 150°=\mathrm{tg}(180°-30°)=-\mathrm{tg}\ 30°=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, Sen 150° = Sen 30° ; Cos 150° = – Cos 30° y tg 150° = – tg 30°

7.8.3.- Ángulos Opuestos:



Dos ángulos, α y β, son **opuestos** cuando $\alpha+\beta=360°$. Al igual que en los casos anteriores, Para calcular sus razones trigonométricas nos fijaremos en la figura adjunta, en la que vuelven a coincidir, pero no los signos:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{sen}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{sen}\ \alpha \\ \\ \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha \end{array}\right\} \tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

Ejemplo

8.- Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 330 con la ayuda de las del ángulo de 30.

Como ambos ángulos son opuestos, podemos hacer que 330 = 360 – 30 y observando la figura:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 330° = \text{sen}(360° - 30°) = -\text{sen}30° = -\frac{1}{2} \\ \cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \tan 330° = \tan(360° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, Sen 330° = -Sen 30°; Cos 330° = Cos 30° y tg 330° = – tg 30°

Piensa y practica

15.- Utiliza la calculadora para hallar las razones trigonométricas del ángulo de 35° y a partir de ellas, calcula de forma razonada las razones trigonométricas de su complementario, su suplementario y su opuesto.

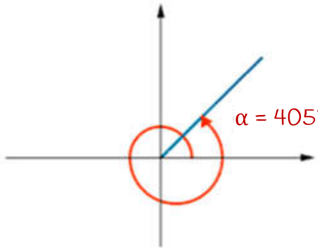
16.- Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 65°, 155° y 335°, sabiendo que:

sen 25°=0,42; cos 25°=0,91 y tg 25°=0,47

17.- Sabiendo que en un triángulo rectángulo, el seno de uno de los ángulos agudos vale 0,9848, ¿eres capaz de calcular las razones trigonométricas del otro ángulo agudo? Sen α=cos β=0,9848; Cos α=Sen β=0,0302; tg α=32,6093; tg β=0,0307

7.8.4.- Ángulos Mayores de 360°:

Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo mayor de 360°, haremos la división entera de dicho ángulo entre 360, y calcularemos las razones del resto de la división porque dichas razones coinciden.



$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen } \alpha \\ \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \end{array}\right\} \tan(\alpha + 2k\pi) = \tan\alpha$$

Ejemplo

9.- Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 750°

Lo primero que haremos será la división de 750 entre 360 para ver el número de vueltas y sobre todo el resto: $\left\{\begin{array}{l|l} 750 & 360 \\ \underbrace{30}_{\text{Resto}} & 2 \end{array}\right.$

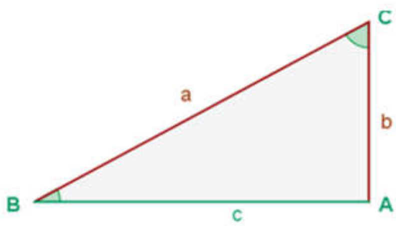
Por tanto, las razones trigonométricas de 750° coinciden con las del ángulo de 30°

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 750° = \text{sen}30° = \frac{1}{2} \\ \cos 750° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \tan 750° = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, Sen 750° = Sen 30° ; Cos 750° = Cos 30° y tg 750° = tg 30°

7.09.- Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo consiste en hallar las medidas de todos sus lados y de todos sus ángulos a partir de otros conocidos. Para ello, nos valemos de las siguientes relaciones:



- Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$
- Los ángulos agudos son complementarios: B + C = 90°
- Las razones trigonométricas principales, seno, coseno y tangente.

$$\text{Sen B} = \frac{b}{a} \qquad \text{Cos B} = \frac{c}{a} \qquad \tan B = \frac{b}{c} \qquad \tan C = \frac{c}{b}$$

- Para resolver un triángulo **conocidos dos lados**, calculamos el lado desconocido con el teorema de Pitágoras y uno de sus ángulos mediante las razones trigonométricas. El otro ángulo será la diferencia con 90.
- Para resolver un triángulo rectángulo **conocidos un lado y un ángulo**, calculamos el otro ángulo puesto que son complementarios y para calcular los lados usamos las razones trigonométricas para uno y el teorema de Pitágoras para el otro.

Ejemplo

10.- Resuelve el triángulo rectángulo del que sabemos que su hipotenusa es de 15 cm y el ángulo B es de 30°.

Lo primero es calcular el ángulo C = 90– 30 = 60°

Para determinar el cateto b, usaremos el seno de B; $\text{sen}B = \frac{b}{a} \rightarrow \text{sen}30 = \frac{b}{15} \rightarrow b = 15 \cdot \text{sen}30 = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5 \text{ cm}$

Para calcular Para calcular el cateto c, lo podemos hacer mediante el teorema de Pitágoras, o mediante el coseno de 30°.

- Mediante Pitágoras: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{15^2 - 7{,}5^2} = 12{,}99 \text{ cm}$
- Mediante: $\cos 30 = \frac{c}{15} \Rightarrow c = 15 \cdot \cos 30 = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12{,}99 \text{ cm}$

Por tanto: A=90°, B=30°, C=60°, a=15 cm, b=7,5 cm y c=12,99 cm.

TRIGONOMETRÍA	Resolución de TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS					A = 90°
DATOS	**INCÓGNITAS: Hallar los otros tres**					
Dados tres valores	**a**	**b**	**c**	**A**	**B**	**C**
Hipotenusa y cateto	a	b	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	90°	$\text{sen}\, B = \frac{b}{a}$	$\cos C = \frac{b}{a}$
Dos catetos	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$	b	c	90°	$tg\, B = \frac{b}{c}$	$tg\, C = \frac{c}{b}$
Hipotenusa y ángulo	a	$b = a\, \text{sen}\, B$	$c = a \cos B$	90°	B	$C = 90 - B$
Cateto y ángulo opuesto	$a = \frac{b}{\text{sen}\, B}$	b	$c = \frac{b}{tg\, B}$	90°	B	$C = 90 - B$
Cateto y ángulo contiguo	$a = \frac{b}{\cos C}$	b	$c = b\, tg\, C$	90°	$B = 90 - C$	C
Dos ángulos	$\begin{cases} b = a\, \text{sen}\, B \\ c = a\, \text{sen}\, C \end{cases} \quad \forall a \in \Re$ Infinitas soluciones con lados proporcionales			90°	B	C
Se usan de preferencia los datos originales				En todos los casos, Área del triángulo: $S = \frac{b\,c}{2} = \frac{b\, a\, \text{sen}\, C}{2}$		

Piensa y practica

18.- Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54. Halla la medida del resto de los lados y de los ángulos del triángulo. Sol: a=3,5 y A=36°; b=4,8 y B=54°; c=5,93 y C=90°

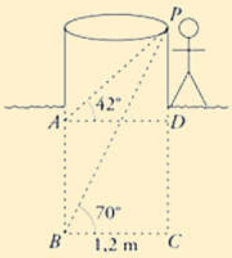
19.- En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos. Sol: a=12 y A=53° 7' 48''; b=9 y B=36° 52' 12''; c=15 y C=90°

20.- Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60°. Nos acercamos 5 m a la torre en línea recta y el ángulo es de 80°. Halla la altura de la torre. Sol: h=12,47 m

Ejemplo

11.- En un huerto hay un pozo de 1,2 m de ancho. Cuando está vacío vemos, desde el brocal, el borde opuesto del fondo bajo un ángulo de 70° con la horizontal. Cuando el agua sube, vemos el borde opuesto del agua bajo un ángulo de 42°. ¿Cuál es la altura del pozo? ¿Cuánto subió el agua?

Lo primero es hacer un dibujo en el que se reflejen los datos del problema:



En el triángulo PBC: $\text{tg } 70° = \dfrac{\overline{PC}}{1,2} \rightarrow \overline{PC} = 1,2 \cdot \text{tg } 70° = 3,3 \text{ m}$

En el triángulo PAD: $\text{tg } 42° = \dfrac{\overline{PD}}{1,2} \rightarrow \overline{PD} = 1,2 \cdot \text{tg } 42° = 1,1 \text{ m}$

La altura del pozo se corresponde con el segmento $\overline{PC} = 3,3$ m

La altura del agua $\overline{AB} = \overline{PC} - \overline{PD} = 3,3 - 1,1 = 2,2$ m

Por tanto, la altura del pozo es de 3,3 metros y el agua subió 2,2 metros.

7.10.- Ejercicios Resueltos

1.- Si $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$ calcula las restantes razones trigonométricas (las 5) e indica la amplitud del ángulo **α**, tanto en radianes como en grados sexagesimales

De la identidad fundamental de la trigonometría $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, despejamos el coseno:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

Operando:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25} - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Como la tangente de un ángulo es el cociente entre el seno y el coseno y conocemos ambos, podemos calcularla:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} \quad \rightarrow \quad \text{tg}\alpha = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$$

Las funciones trigonométricas inversas son:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad \sec\alpha = \frac{5}{4} \qquad\qquad \text{cosec}\alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad \text{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$$

Y por último la cotangente: $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\alpha} = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \quad \rightarrow \quad \text{cotg}\alpha = \dfrac{4/5}{3/5} = \dfrac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \text{cotg } \alpha = \dfrac{4}{3}$

Si sen **α**= 3/5, entonces **α** = Arcsen (3/5) = 36° 52' 11,63" =0,6435 rad.

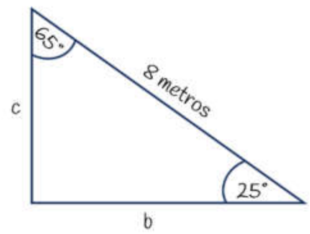
Así, sen **α**=3/5; cos **α**=4/5; tg **α**=3/4; cosec **α**=5/3; sec **α**=5/4 y cotg **α**=4/3 y **α**=36° 52' 11,63"=0,6435 rad.

2.- De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide 8 cm y que uno de sus ángulos es de 25°. Calcula todos sus ángulos y lados, además de su área.

Si uno de los ángulos mide 25°, como se trata de un triángulo rectángulo, el otro ángulo mide 90°-25°=65°.

Y ahora, conocidos los tres ángulos, solo falta a conocer los lados.

Para ello, utilizaremos las razones trigonométricas del ángulo de 25°:



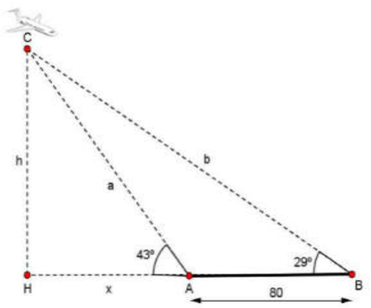
$$\mathrm{sen}25° = \frac{c}{8} \rightarrow c = 8 \cdot \mathrm{sen}25° \rightarrow c = 3{,}38\ m$$

$$\cos 25° = \frac{b}{8} \rightarrow b = 8 \cdot \cos 25° \rightarrow b = 7{,}25\ m$$

Para calcular el área, utilizaremos: $A = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{7{,}25 \cdot 3{,}38}{2} = 12{,}253\ m^2$

Por tanto, C=25 °, B=65 °, c=3,38 m, b=7,25 m y el área es de 12,253 m^2.

3.- Desde el centro de Granada se observa un avión bajo un ángulo de 29° con la horizontal, en ese mismo instante, y desde la ciudad de Jaén, se ve ese mismo avión bajo otro ángulo de 43° también con la horizontal. Sabiendo que el avión no se encuentra entre ambas ciudades, y que distan 80 kilómetros entre ellas. ¿A qué altura está el avión en ese momento? ¿A qué distancia se encuentra de cada ciudad?



Tenemos dos triángulos rectángulos: el AHC y el BHC.

- ✓ En el triángulo AHC se verifica que: $\mathrm{tg}\ 43 = \frac{h}{x}$
- ✓ En el triángulo BHC se verifica que: $\mathrm{tg}\ 29 = \frac{h}{x+80}$

Con estas dos ecuaciones podemos formar un sistema de ecuaciones no lineales: $\begin{cases} \mathrm{tg}\ 43 = \frac{h}{x} \\ \mathrm{tg}\ 29 = \frac{h}{x+80} \end{cases}$

Si despejamos h de la primera ecuación: $\mathrm{tg}\ 43 = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \mathrm{tg}\ 43$

y lo sustituimos en la segunda, llegamos a:

$$\mathrm{tg}\ 29 = \frac{h}{x+80} \rightarrow \mathrm{tg}\ 29 = \frac{x \cdot \mathrm{tg}\ 43}{x+80} \rightarrow (x+80)\mathrm{tg}\ 29 = x \cdot \mathrm{tg}\ 43$$

Que operando:

$$(x+80)\mathrm{tg}\ 29 = x \cdot \mathrm{tg}\ 43 \rightarrow x \cdot \mathrm{tg}29 + 80 \cdot \mathrm{tg}29 = x \cdot \mathrm{tg}\ 43 \rightarrow 80 \cdot \mathrm{tg}29 = x \cdot \mathrm{tg}\ 43 - x \cdot \mathrm{tg}29$$

Y sacando factor común, podemos despejar la x:

$$80 \cdot \mathrm{tg}29 = x \cdot \mathrm{tg}\ 43 - x \cdot \mathrm{tg}29 \rightarrow 80 \cdot \mathrm{tg}29 = x \cdot (\mathrm{tg}\ 43 - \mathrm{tg}29) \rightarrow x = \frac{80 \cdot \mathrm{tg}29}{(\mathrm{tg}\ 43 - \mathrm{tg}29)} = 117{,}25\ km$$

Una vez conocida la x, podemos calcular h: $h = x \cdot \mathrm{tg}\ 43 \rightarrow h = 117{,}25 \cdot \mathrm{tg}\ 43 = 109{,}34\ km$

Para calcular la distancia del avión a Granada (B) y a Jaén (A) podemos hacerlo usando el teorema de Pitágoras o utilizando las razones trigonométricas:

$$\mathrm{sen}29 = \frac{h}{b} \rightarrow b = \frac{h}{\mathrm{sen}29} = \frac{109{,}34}{\mathrm{sen}29} = 225{,}53\ km \qquad \mathrm{sen}43 = \frac{h}{a} \rightarrow a = \frac{h}{\mathrm{sen}43} = \frac{109{,}34}{\mathrm{sen}43} = 160{,}32\ km$$

Por tanto, el avión vuela a casi 110 km de altura y está a 225 km de Granada y a 160 km de Jaén.

4.- Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $\left(\text{sen}\ x-\cos x\right)^2+\left(\text{sen}\ x+\cos x\right)^2=2$

Si desarrollamos las identidades notables:

$$\left(\text{sen}\ x-\cos x\right)^2+\left(\text{sen}\ x+\cos x\right)^2=2 \quad\rightarrow\quad \text{sen}^2x+\cos^2 x-2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x+\text{sen}^2x+\cos^2 x+2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x=2$$

Y agrupamos términos, vemos que los dobles productos se anulan:

$$\text{sen}^2x+\cos^2 x-\cancel{2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x}+\text{sen}^2x+\cos^2 x+\cancel{2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x}=2 \quad\rightarrow\quad 2\text{sen}^2x+2\cos^2 x=2$$

Sacando factor común en la expresión: $2\text{sen}^2x+2\cos^2 x=2 \quad\rightarrow$ llegamos a: $2\left(\text{sen}^2x+\cos^2 x\right)=2$

Y usando la identidad fundamental de la trigonometría: $\text{sen}^2x+\cos^2 x=1$ llegamos a:

$$2\left(\text{sen}^2x+\cos^2 x\right)=2 \quad\rightarrow\quad 2\left(1\right)=2 \quad\rightarrow\quad 2=2$$ que es una identidad.

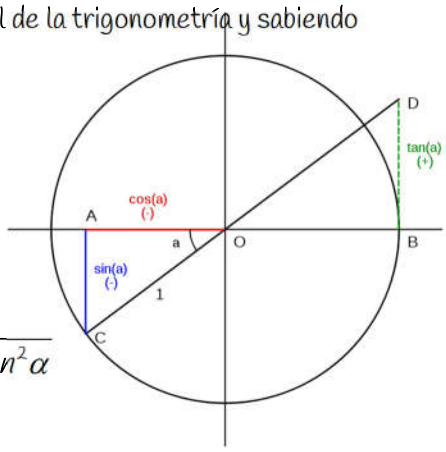
De esta manera, queda demostrada la identidad trigonométrica propuesta.

5.-Sabemos que un ángulo del tercer cuadrante verifica que $sen\ \alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calcula el valor exacto de las otras razones trigonométricas.

Calcularemos las otras razones trigonométricas usando la identidad fundamental de la trigonometría y sabiendo que la tangente de un ángulo es el cociente entre su seno y su coseno:

$$sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad\qquad tg\alpha=\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$$



Cono nos dan el seno, de la Ec. Fundamental de la trigonometría despejaremos el coseno:

$$sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad\rightarrow\quad \cos^2\alpha=1-sen^2\alpha \quad\rightarrow\quad \cos\alpha=\pm\sqrt{1-sen^2\alpha}$$

$$\rightarrow\quad \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$$

Como nos encontramos en el tercer cuadrante, tanto el seno como el coseno son negativos, mientras que la tangente es positiva.

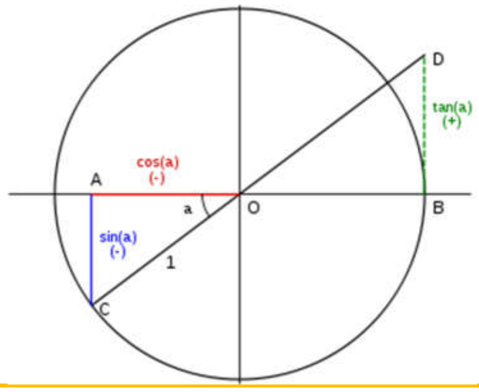
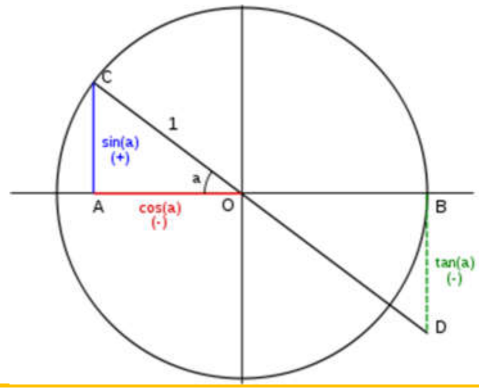
Por tanto: $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ y la tangente: $tg\ \alpha=\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

Las razones trigonométricas inversas serían la secante, inversa del coseno, la cosecante, inversa del seno y la cotangente, inversa de la tangente.

Resumiendo: Cos**α** = $-1/2$ y tg **α=√3**

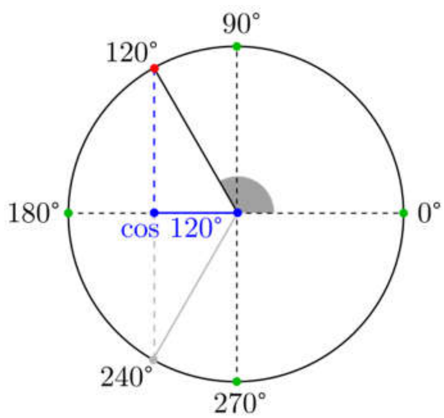
b) Da el valor (en radianes) de un ángulo de otro cuadrante que tenga exactamente el mismo coseno que α.

De los cuatro cuadrantes, el único en el que el coseno tiene exactamente el mismo valor que en el tercero, es en el segundo.

Tercer cuadrante	Segundo Cuadrante
	

Sabemos que en el primer cuadrante, el único ángulo **α** que tiene $\begin{cases} sen\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ es el ángulo $\alpha = 60°$

Pues en el segundo cuadrante, el ángulo de 60 se correspondería con el de 180° – 60° = 120°



Por simetría, y observando la circunferencia goniométrica de la izquierda, puede deducirse que el coseno de 120° es exactamente igual al coseno de 240°.

Si calculamos con la calculadora el arcoseno de –1/2 obtenemos:

$$\underbrace{Arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°}_{\text{En grados sexagesimales (Modo Deg)}} \qquad \underbrace{Arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}}_{\text{En Radianes (Modo Rad)}}$$

Dependiendo del modo en que pongamos nuestra calculadora, podemos obtener el resultado directamente en radianes o en grados sexagesimales.

Puesto que, en el segundo cuadrante, el ángulo de 60 se correspondería con el de 180° – 60° = 120°

Por tanto, el ángulo buscado es el de 120°, que en radianes se expresa como $\frac{2\pi}{3}$ rad.

6.– Calcular el ángulo, medido en radianes, que forman las agujas de un reloj cuando señala las: **a)** 5:00; **b)** 5:12; **c)** 12:20; **d)** 2:30

En un reloj, la aguja pequeña da una vuelta cada 12 horas, por tanto:

Horaria (Aguja Pequeña) $\begin{cases} \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} \text{ cada Hora} \\ \dfrac{\pi}{6} : 60 = \dfrac{\pi}{360} \text{ cada Minuto} \end{cases}$ Minutero (Aguja grande) $\begin{cases} 2\pi \text{ cada Hora} \\ \dfrac{2\pi}{60} = \dfrac{\pi}{30} \text{ cada Minuto} \end{cases}$

Y la aguja grande de una vuelta cada 60 minutos.

A las 5:00 la aguja grande no se ha movido y la pequeña se ha movido 5 horas, por tanto:

$$\underset{\text{Aguja Pequeña}}{\text{Horaria}}\begin{cases}\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}\ \text{cada Hora}\\[2mm] \dfrac{\pi}{6}:60=\dfrac{\pi}{360}\ \text{cada Minuto}\end{cases} \rightarrow \quad 5\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

A las 5:00 las agujas forman un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$

A las 5:12 la aguja grande se ha movido 12 minutos y la pequeña se ha movido 5 horas y 12 minutos, por tanto:

$$\underset{\text{Aguja Pequeña}}{\text{Horaria}}\begin{cases}\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}\ \text{cada Hora}\\[2mm] \dfrac{\pi}{6}:60=\dfrac{\pi}{360}\ \text{cada Minuto}\end{cases} \rightarrow \quad 5\cdot\frac{\pi}{6}+12\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{13\pi}{15}$$

$$\underset{\text{Aguja grande}}{\text{Minutero}}\begin{cases}2\pi\ \text{cada Hora}\\[2mm] \dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}\ \text{cada Minuto}\end{cases} \rightarrow \quad 12\cdot\frac{\pi}{30}=\frac{2\pi}{5}$$

A las 5:12 las agujas forman un ángulo de $\frac{13\pi}{15}-\frac{2\pi}{5}=\frac{13\pi-6\pi}{15}=\frac{7\pi}{15}$

A las 12:20 la aguja pequeña se ha movido 12 minutos y la grande se ha movido 20 minutos, por tanto:

$$\underset{\text{Aguja Pequeña}}{\text{Horaria}}\begin{cases}\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}\ \text{cada Hora}\\[2mm] \dfrac{\pi}{6}:60=\dfrac{\pi}{360}\ \text{cada Minuto}\end{cases} \rightarrow \quad 20\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{\pi}{18}$$

$$\underset{\text{Aguja grande}}{\text{Minutero}}\begin{cases}2\pi\ \text{cada Hora}\\[2mm] \dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}\ \text{cada Minuto}\end{cases} \rightarrow \quad 20\cdot\frac{\pi}{30}=\frac{2\pi}{3}$$

A las 12:20 las agujas forman un ángulo de $\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{18}=\frac{12\pi-\pi}{18}=\frac{11\pi}{18}$

A las 2:30 la aguja pequeña se ha movido 2 horas y 30 minutos y la grande se ha movido 30 minutos, por tanto:

$$\underset{\text{Aguja Pequeña}}{\text{Horaria}}\begin{cases}\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}\ \text{cada Hora}\\[2mm] \dfrac{\pi}{6}:60=\dfrac{\pi}{360}\ \text{cada Minuto}\end{cases} \rightarrow \quad 2\cdot\frac{\pi}{6}+30\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{5\pi}{12}$$

$$\underset{\text{Aguja grande}}{\text{Minutero}}\begin{cases}2\pi\ \text{cada Hora}\\[2mm] \dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}\ \text{cada Minuto}\end{cases} \rightarrow \quad 30\cdot\frac{\pi}{30}=\pi$$

A las 2:30 las agujas forman un ángulo de $\pi-\frac{5\pi}{12}=\frac{12\pi-5\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$

7.- Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $\frac{1-sen\ x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1+sen\ x}$

Lo primero que vamos a hacer es multiplicar en cruz:

$$\frac{1-sen\ x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1+sen\ x} \quad\rightarrow\quad (1-sen\ x)\cdot(1+sen\ x)=\cos x\cdot\cos x \quad\rightarrow\quad 1-sen^2\ x=\cos^2 x$$

Si transponemos términos llegamos a:

$$1-sen^2\ x=\cos^2 x \quad\rightarrow\quad 1=\cos^2 x+sen^2\ x \quad\rightarrow\quad 1=sen^2\ x+\cos^2 x$$

Y como según la ecuación fundamental de la trigonometría, $sen^2\ x+\cos^2 x=1$
Llegamos a:

$$\underbrace{sen^2\ x+\cos^2 x}_{=1}=1 \quad\rightarrow\quad 1=1$$

Por tanto, queda demostrado que $\frac{1-sen\ x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1+sen\ x}$

8.- Sabiendo que la tangente de un ángulo agudo β es $\tan\beta=\sqrt{3}$, calcula las restantes razones trigonométricas principales. Expresa el ángulo β en radianes y en grados sexagesimales.

Si llamamos **s** al sen α y **c** al cos α, $\left\{\begin{matrix} s=\text{sen}\ \beta \\ c=\cos\beta \end{matrix}\right\}$ como la tangente es el cociente entre el seno y el coseno y conocemos su valor, $\text{tg}(\beta)=\sqrt{3}$, podemos despejar uno en función del otro, por ejemplo, el seno en función del coseno:

$$\text{tg}(\beta)=\frac{\text{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}=\sqrt{3} \quad\rightarrow\quad \sqrt{3}=\frac{s}{c} \quad\rightarrow\quad s=\sqrt{3}c$$

Además, usando la ecuación fundamental de la trigonometría, $sen^2\beta+\cos^2\beta=1$, podemos plantear un sistema de ecuaciones no lineales para calcular el seno, y después el coseno de ángulo β.

$$\left\{\begin{matrix} s=\sqrt{3}\cdot c \\ s^2+c^2=1 \end{matrix}\right. \xrightarrow[\text{en la 2ª ecuación}]{\text{Sustituyendo S}} \left(\sqrt{3}\cdot c\right)^2+c^2=1 \quad\rightarrow\quad 3c^2+c^2=1 \quad\rightarrow\quad 4c^2=1 \quad\rightarrow\quad c^2=\frac{1}{4} \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad c=\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad \cos\beta=\frac{1}{2}$$

Tomamos la solución positiva, puesto que el enunciado dice que el ángulo es agudo.

Conocido c (el coseno), ya podemos calcular s (el seno) mediante $s=\sqrt{3}\cdot c$:

$$s=\sqrt{3}\cdot c \quad\rightarrow\quad s=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\rightarrow\quad \text{sen}\ \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, $\cos\ \beta=\frac{1}{2}$, $\text{sen}\ \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{tg}\ \beta=\sqrt{3}$

Para calcular el ángulo β, bastaría con hacer el arco tangente de $\sqrt{3}$, por tanto:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = 60^\circ \quad \rightarrow \quad \beta = 60^\circ$$

$$\text{En radianes:} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180} = \frac{\beta}{60} \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

Recuerda que, para hacer el arco tangente, usamos la calculadora presionando la siguiente combinación de teclas:

SHIFT + tan + √ + 3 + =

7.11.- Autoevaluación

01.- Expresa en radianes los siguientes ángulos sexagesimales: a) 1200°; b) 750°; c) 2880°

02.- Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos en radianes: a) 1 rad; b) 3π rad; c) 5π/3

03.- Si cos α = 0,52 calcula las restantes razones trigonométricas.

04.- Si tg α =12/5 calcula las restantes razones trigonométricas.

05.- Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

06.- En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 50°, y la hipotenusa, 16 cm. Resuelve el triángulo.

07.- En un triángulo isósceles, cada uno de los ángulos iguales mide 70° y su altura es de 12 cm. Halla la medida de los lados del triángulo.

08.- Comprueba las siguientes identidades:

a) $sen^2 x - \cos^2 y = sen^2 y - \cos^2 x$

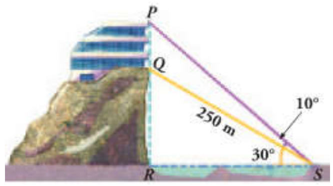
b) $(1+\tan^2 \alpha)\cdot\cos^2 \alpha = 1$

c) $\dfrac{1-sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1+sen\alpha}$

d) $\dfrac{\cos\alpha - \cos^3\alpha}{sen\alpha - sen^3\alpha} = tgx$

e) $\cos\alpha + \dfrac{sen^2\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

09.- Para calcular la altura del edificio, PQ, hemos medido los ángulos que aparecen en la figura y sabemos que hay un funicular para ir de S a Q, cuya longitud es de 250 m. Halla la altura del edificio PQ.



10.- Para localizar una emisora pirata, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65°. ¿A qué distancia de A y B se encuentra dicha emisora?

11.- Halla el ángulo que forma la diagonal de un cubo de arista **x** con la diagonal de la base.

12.- En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide el doble que el otro. ¿Cuánto valen las razones trigonométricas del ángulo menor?

13.- Dos fuerzas de 17 y 27 Newton dan una resultante de 12 N. Calcular el ángulo que forman entre sí y los que forman cada una de ellas con la resultante. (Idem con 46 y 25 N y resultante 58 N).

14.- Sean A y B dos puntos inaccesibles pero visibles ambos desde puntos accesibles C y D separados por 73,2 m. Suponiendo que los ángulos ACD=80° 12' BCD=43° 31' BDC=32° y ADC=23° 14', determinar la distancia AB.

15.- Dos observadores A y B esperan a los concursantes de una carrera de regatas en los extremos de la línea de llegada que mide 100 m. En un momento ven dos embarcaciones con la siguiente posición CAB=80°, DAB=70°, ABC=80° y ABD=90°. ¿Cuál de ellas está más próxima de la meta?

2024