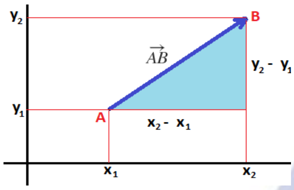
Vectores

Un **vector** es un segmento orientado en el espacio, determinado por dos puntos, un **origen** A, de coordenadas (x_1, y_1), y un **extremo B** de coordenadas (x_2, y_2).



El vector que une los puntos A y B se denomina vector $\overrightarrow{AB}$ y sus coordenadas o componentes vienen determinadas por la diferencia entre las coordenadas del extremo menos las del origen.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (b_x - a_x, b_y - a_y)$$

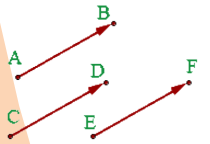
Así pues, **todo vector viene caracterizado por un módulo, una dirección y un sentido.**

- **Módulo:** es la longitud del segmento AB, y coincide con la distancia entre los puntos A y B y se representa por $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ y se calcula:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$$

- **Dirección:** es la recta sobre la que está situada el vector. Una recta y todas sus paralelas determinan la misma dirección.

- **Sentido:** es la forma de recorrer el segmento AB, es decir de fijar el origen y el extremo. (queda determinado por la punta de la flecha)



Decimos que dos o más vectores son **equipolentes** cuando tienen igual módulo, dirección y sentido, como por ejemplo en el dibujo de la izquierda donde se ven vectores equipolentes.

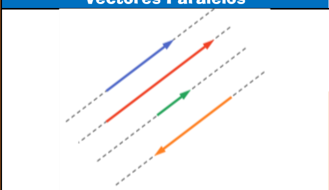
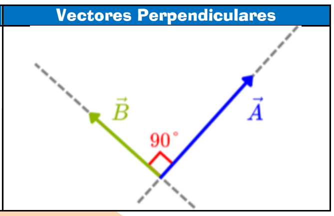
Vectores paralelos y perpendiculares

Dos **vectores** son **paralelos** cuando tienen la misma dirección (misma recta o rectas paralelas). Para comprobar si dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son paralelos basta con comprobar si sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{ó} \quad \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_1}{v_1}$$

Una forma sencilla de encontrar un vector paralelo a otro, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, es multiplicar sus componentes por un mismo número k:

$\overrightarrow{kv} = (kv_1, kv_2)$ es paralelo al vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$

Vectores Paralelos	Vectores Perpendiculares
	

Dos **vectores** son **perpendiculares** cuando sus direcciones se cortan formando un ángulo recto. Para saber si dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son perpendiculares, tiene que ocurrir que:

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$

En general, dado un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$, podemos encontrar otro vector $\vec{v}$ que sea:

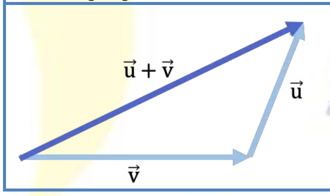
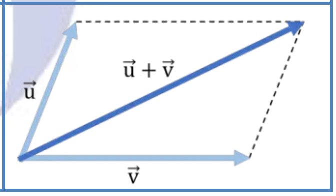
- ✓ **Paralelo a $\vec{u}$,** multiplicando ambas coordenadas por un número distinto de cero: $\vec{v} = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2)$
- ✓ **Perpendicular a $\vec{u}$,** invirtiendo sus coordenadas y cambiando el signo de una de ellas: $\vec{v} = (-u_2, u_1)$

Operaciones con Vectores

Para **sumar dos vectores** $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$, sumaremos sus coordenadas:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

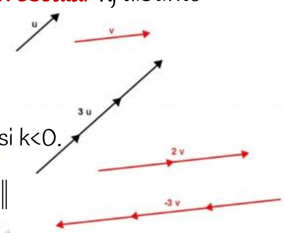
De forma gráfica:

Regla del triángulo	Regla del paralelogramo
Dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$, hacemos que el origen de $\vec{v}$, coincida con el extremo de $\vec{u}$, de forma que el vector suma es aquel cuyo origen es el de $\vec{v}$ y cuyo extremo es el de $\vec{u}$.	Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de origen común, trazando líneas paralelas a ambos vectores desde sus extremos, la diagonal del paralelogramo será el vector suma.
	

La existencia de un elemento opuesto para la suma de vectores, permite **restar vectores**. Así, dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para obtener $\overrightarrow{u - v}$ basta con sustituir el vector $\vec{v}$, por el vector $-\vec{v}$ y sumárselo al $\vec{u}$ tal y como se indica en la figura de la derecha.

Al **multiplicar un vector** $\vec{u} = (u_x, u_y)$ **por un escalar k**, distinto de cero, obtenemos otro vector $k\vec{u}$ con:

- **Dirección:** La misma que el vector $\vec{u}$
- **Sentido:** el mismo que $\vec{u}$ si k>0 y su opuesto si k<0.
- **Módulo:** Proporcional al de $\vec{u}$. $\|k \cdot \vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$



Dado $\vec{v} = (5, -4)$ calcula su producto por −1 y por 3.

Para multiplicarlo por −1, multiplicaremos ambas coordenadas por −1:

$$-1 \cdot \vec{v} = (-1 \cdot v_x, -1 \cdot v_y) = (-1 \cdot 5, -1 \cdot (-4)) = (-5, 4) \quad \rightarrow \quad -1 \cdot \vec{v} = (-5, 4)$$

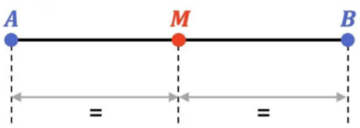
Y para multiplicarlo por 2 procederemos de igual forma:

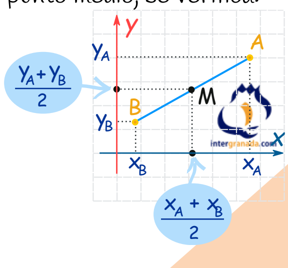
$$2 \cdot \vec{v} = (2 \cdot v_x, 2 \cdot v_y) = (2 \cdot 5, 2 \cdot (-4)) = (10, -8) \quad \rightarrow \quad 2 \cdot \vec{v} = (10, -8)$$

Simétrico de un punto con respecto a otro

Dado el segmento de extremos $A=(a_x, a_y)$ y $B=(b_x, b_y)$, si M tiene por coordenadas (m_x, m_y) en su punto medio, se verifica:

$$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$$



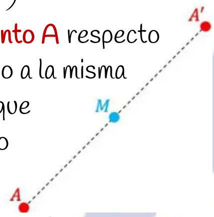


Departamento de Matemáticas
http://www.intergranada.com

Y, por tanto, si sustituimos las componentes de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AM}$ obtenemos las **coordenadas del punto medio** de un segmento:

$$M=\left(\frac{a_x+b_x}{2},\frac{a_y+b_y}{2}\right)$$

El punto A' es el **punto simétrico del punto A** respecto de otro punto M, si el punto A' está situado a la misma distancia del punto M que de A. Decimos que M es el punto medio del segmento formado por los puntos A y A'.



Para calcular las **coordenadas del punto simétrico**, utilizaremos la fórmula del punto medio de un segmento:

$$M=\frac{A+A'}{2} \quad \rightarrow \quad A'=2M-A$$

Hallar el simétrico del punto P (7, 4) respecto del punto Q (3, –11)

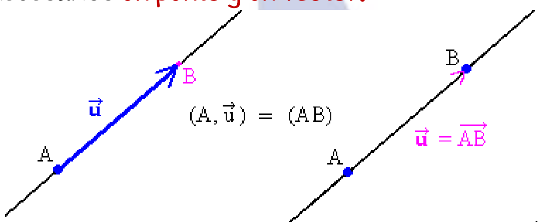
Sea el punto simétrico P'(x,y), tenemos que:

$$(-4,-15)=(x-3,y+11) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3=-4 \\ y+11=-15 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-26 \end{cases}$$

Por tanto, el simétrico de P, es el punto P' (–1,–26)

Ecuaciones de la Recta

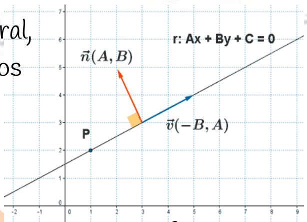
Para determinar la **ecuación de una recta** en el plano son necesarios **un punto y un vector.**



Aunque si son dan dos puntos, rápidamente podemos calcular el vector que los une y con esto ya tendremos un punto y un vector. Existen varias ecuaciones de una recta:

Ecuación vectorial	$(x,y)=(P_1,P_2)+t(v_1,v_2)$	$P(P_1,P_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ son un punto y el vector director de la recta
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x=P_1+k\cdot v_1 \\ y=P_2+k\cdot v_2 \end{cases}$	$P(P_1,P_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ son un punto y el vector director de la recta
Ecuación continua	$\frac{x-P_1}{v_1}=\frac{x-P_2}{v_2}$	$P(P_1,P_2)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2)$ son un punto y el vector director de la recta
Ecuación general	$Ax+By+C=0$	$\vec{v}=(-B,A)$
Ecuación explícita	$y=mx+b$	m es la pendiente de la recta y b es la ordenada en el origen
Ecuación punto-pendiente	$y-y_1=m(x-x_1)$	$P(P_1,P_2)$ es un punto y m es la pendiente de la recta

Dada una recta en su forma general, $ax+by+c=0$, de ella podemos obtener la siguiente información:



Vector Director: $\vec{r}=(-b,a)$

Vector Perpendicular: $\vec{n}=(a,b)$

Pendiente: $\frac{-a}{b}$ y Ordenada en el origen: $\frac{-c}{b}$

Calcula la ecuación general de la recta, r, que pasa por los puntos A (–1, 2) y B(0, 5).

Sabemos que, de la ecuación general de una recta, $ax+by+c=0$, las componentes del vector director son: $\vec{r}=(-b,a)$

Pues empezamos calculando el vector director de la recta que pasa por A y B:

$$\vec{r}=B-A=(1,3)$$

Comparándolo con el vector $\vec{r}=(-b,a)$ vemos que a=3 y que b=–1, por tanto, la ecuación general de nuestra recta será:

$$ax+by+c=0 \quad \rightarrow \quad 3x-y+c=0$$

Falta calcular el valor del término independiente, que lo haremos sustituyendo alguno de los dos puntos, por ejemplo, el B (0,5)

$$3x-y+c=0 \quad \rightarrow \quad 3\cdot 0-5+c=0 \quad \rightarrow \quad -5+c=0 \quad \rightarrow \quad c=5$$

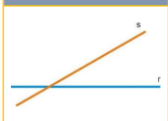
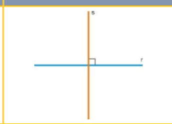
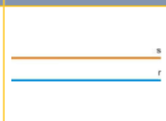
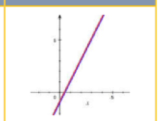
Por tanto, la ecuación general de la recta es: 3x – y + 5 =0

Posiciones relativas de dos rectas

Dadas las rectas **r** y **s**, de las que conocemos o un punto y un vector, o sus ecuaciones generales o explícitas:

Recta	Vector director	Punto	Ec. General	Ec. Explícita
r	$\vec{r}=(r_x,r_y)$	P (p_x, p_y)	ax + by + c = 0	y = mx + n
s	$\vec{s}=(s_x,s_y)$	Q (q_x, q_y)	a'x + b'y + c' = 0	y = m'x + n'

Sus posiciones relativas pueden ser:

Secantes		Paralelas	
Si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ no son paralelos: $\vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$		Si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son paralelos $\vec{r}=k\cdot\vec{s}$	
No perpendiculares	Perpendiculares	No Coincidentes	Coincidentes
			
$\vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$ y $\vec{r}\cdot\vec{s}\neq 0$	$\vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$ y $\vec{r}\cdot\vec{s}=0$	$\vec{r}=k\cdot\vec{s}$ y $Q\notin r$	$\vec{r}=k\cdot\vec{s}$ y $Q\in r$
$\frac{r_x}{s_x}\neq\frac{r_y}{s_y}$	$\frac{r_x}{s_x}\neq\frac{r_y}{s_y}$	$\frac{r_x}{s_x}=\frac{r_y}{s_y}$	$\frac{r_x}{s_x}=\frac{r_y}{s_y}$
$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ y $a\cdot a'=b\cdot b'$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$
$m\neq m'$	$m\neq m'$ y $m\cdot m'=-1$	$m=m'$ y $n\neq n'$	$m=m'$ y $n=n'$

Determina la posición relativa de las rectas dadas por las ecuaciones:
r: –x + y =–1 y s: 2x + 3y + 3 = 0.

El vector director de cada una de ellas es: $\left.\begin{matrix}\vec{r}=(-1,-1) \\ \vec{s}=(-3,2)\end{matrix}\right\}$ y como no son proporcionales: $\vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$ las rectas son secantes.

Por tanto, las rectas r y s son secantes

Halla la ecuación general de una recta paralela a $y=3-\frac{x}{2}$ y que corta al eje de ordenadas en el punto y=–3.

Si operamos un poco la ecuación explícita:

$$y=3-\frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad y-3=-\frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad 2y-6=-x \quad \rightarrow \quad x+2y-6=0$$

conseguimos la ecuación general.

La recta paralela a ésta, tiene que tener la misma pendiente, por tanto, a y b no varían y la recta sería de la forma: $x+2y+c=0$

Calcularemos c, sabiendo que la recta pasa por el punto (0,–3).

$$x+2y+c=0 \quad \xrightarrow[(0,-3)]{\text{Sustituimos}} \quad 0+2\cdot(-3)+c=0 \quad \rightarrow \quad -6+c=0 \quad \rightarrow \quad c=6$$

Por tanto, la recta buscada es x + 2y + 6 =0

La recta s pasa por el punto (3, 0), mientras que la recta t, por el (–5, 3). Ambas son perpendiculares a la recta r de ecuación general: 4x + 2y – 7 = 0. Halla las ecuaciones de las rectas t y s.

Si las rectas s y t son ambas perpendiculares a r, es poque ambas son paralelas. Además, si son perpendiculares a r, las restas s y t tendrán por ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} s: 2x-4y+p=0 \\ t: 2x-4y+q=0 \end{matrix}\right\}$$

Para calcular p y q, utilizaremos los puntos (3,0) y (–5,3)

$$s: 2x-4y+p=0 \quad \xrightarrow{\text{Sustituimos el (3,0)}} \quad 2\cdot 3-4\cdot 0+p=0 \quad \rightarrow \quad 6+p=0$$

$$\rightarrow \quad p=-6 \quad \rightarrow$$ La ecuación de la recta s es: $2x-4y-6=0$

$$t: 2x-4y+q=0 \quad \xrightarrow{\text{Sustituimos el (–5,3)}} \quad 2\cdot(-5)-4\cdot 3+q=0 \quad \rightarrow \quad -10-12+q=0$$

$$\rightarrow \quad q=22 \quad \rightarrow$$ La ecuación de la recta t es: $2x-4y+22=0$

Por tanto, las ecuaciones son, s: 2x – 4y – 6 =0 t: 2x – 4y + 22 =0