¿Qué sabes de....? Ecuaciones / Inecuaciones

Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros y separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o **incógnitas**, relacionados mediante operaciones matemáticas.

Cuando esta igualdad es cierta para cualquier valor de la incógnita recibe el nombre de **Identidad.**

$$\underbrace{\underbrace{3x+5}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{2x-4}_{\text{Segundo miembro}}}_{\text{ECUACIÓN}} \qquad \underbrace{(x+2)^2 = x^2+4x+4}_{\text{IDENTIDAD}}$$

Los elementos de una ecuación son:

- **Miembro:** Expresión algebraica que hay a ambos lados del =.
- **Término:** Cada uno de los sumandos que hay en los dos miembros.
- **Término Independiente:** Es aquel que no tiene parte literal.
- **Incógnita:** Cada una de las letras de valor desconocido y que queremos calcular. (Se suelen representar con x)
- **Grado:** Es el mayor de los grados de sus términos

Si en la igualdad aparecen polinomios de primer grado, diremos que la ecuación es de primer grado, y si aparecen polinomios de segundo grado, diremos que se trata de una ecuación de segundo grado.

$$\underbrace{6x+5=7x-3}_{\text{Ecuación de primer grado}} \qquad \underbrace{5x^2+2x-5=4x-7}_{\text{Ecuación de segundo grado}}$$

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

Ejemplo: $\begin{cases} 3x+1=9-x & \to \quad x=2 \\ 4x=8 & \to \quad x=2 \end{cases}$

Transformaciones de ecuaciones

Reducir los términos de una ecuación es agrupar los monomios semejantes, las x con las x y los números con los números:

$$2x+3+5x=-9-4x+2x \xrightarrow[\text{de términos}]{\text{Reducción}} 7x+3=-9-2x$$

Trasponer los términos de una ecuación es pasar todas las x a un miembro y todos los números al otro (normalmente las x al primer miembro y los números al segundo), sabiendo que al cambiar de miembro, en éste realiza la operación inversa que hacía en el otro.

Lo que está **sumando** (o restando) en un miembro, **pasa** al otro miembro de la ecuación **restando** (o sumando) y viceversa.

Lo que está **multiplicando** (o dividiendo) en un miembro, **pasa** al otro miembro **dividiendo** (o multiplicando) y viceversa.

Ecuaciones de primer grado

Las **ecuaciones de primer grado** son de la forma **ax+b=c,** donde a es el coeficiente principal, b el término independiente y x es la incógnita y cuya solución viene dada por la expresión:

$$ax+b=0 \quad \to \quad ax=-b \quad \to \quad x=-\frac{b}{a}$$

Ecuaciones con denominadores

Cuando en los términos de una ecuación aparecen denominadores, la transformaremos en otra equivalente que no los tenga. Para ello, multiplicaremos los dos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{x}{3}-\frac{13-2x}{2}=\frac{1}{3} \quad \to \quad m.c.d.(3,2,6)=6 \quad \to \quad \frac{2x}{6}-\frac{3(13-2x)}{6}=\frac{2}{6}$$
$$\to \quad 2x-3(13-2x)=2 \qquad 2x-38+6x=2 \quad \to \quad 8x-38=2$$
$$\to \quad 8x=38+2 \quad \to \quad 8x=40 \quad \to \quad x=\frac{40}{8}=5$$

Ecuaciones de segundo grado

Las **ecuaciones de segundo grado** son de la forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

Donde **a** es el coeficiente del término de 2° grado, **b** el término de primer grado y **c** el término independiente.

Sus soluciones vienen dadas por la expresión: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$

Decimos que una **ecuación de segundo grado es completa** si los coeficientes a, b y c son todos números distintos de cero.

Ejemplo:

$$x^2+5x-6=0 \to \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=-6 \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} \end{cases} \to x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2}$$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2} \to x=\frac{-5\pm 7}{2} \to \begin{cases} x_1=\dfrac{-5+7}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-5-7}{2}=\dfrac{-12}{2}=-6 \end{cases} \to \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-6 \end{cases}$$

Decimos que una **ecuación es incompleta si** alguno de los coeficientes a, b, o c es nulo.

$$\underbrace{ax^2+bx=0}_{\text{Falta el término independiente}} \qquad \underbrace{ax^2+c=0}_{\text{Falta el término en x}}$$

Para resolverlas, en el caso de que falte el término independiente sacaremos factor común, y en el caso de que falte el término en x, calcularemos la x haciendo la raíz cuadrada. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos:

a) $x^2+5x=0 \to x(x+5)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x+5=0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-5 \end{cases}$

b) $x^2-9=0 \to x^2=9 \to x=\pm\sqrt{9} \to \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$

Ecuaciones Bicuadradas

Las **ecuaciones bicuadradas** son ecuaciones de cuarto grado que se resuelven haciendo el cambio de variable **z=x²**, transformándolas en ecuaciones de segundo grado. Una vez resueltas, deshacemos el cambio y obtenemos todas las soluciones de x (no de z). **x=±√z.**

Ejemplo:

$$x^4-5x^2-36=0 \xrightarrow[z=x^2]{\text{Cambio de Variable}} z^2-5z-36=0$$

$$z^2-5z-36=0 \to \begin{cases} z_1=\dfrac{5+13}{2}=\dfrac{18}{2}=9 \\ z_2=\dfrac{5-13}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4 \end{cases} \to \begin{cases} z_1=9 \\ z_2=-4 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio:

$$\text{Si } z=x^2 \to x=\pm\sqrt{z} \to \begin{cases} x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \\ x=\pm\sqrt{-8}=\text{No sol} \end{cases}$$

Las soluciones son x=−3 y x=3.

Ecuaciones Factorizadas o factorizables

Son **ecuaciones de grado >2** que se resuelven factorizando (si antes no lo están) y después igualando cada uno de sus factores a cero.

$$(ax+b)\cdot(bx+c)\cdots\cdots\cdot(yx+z)=0 \to \begin{cases} ax+b=0 \\ bx+c=0 \\ \cdots\cdots \\ yx+z=0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$2x^4+x^3-11x^2-4x+12=0 \to (x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(2x+3)=0$$
$$x+2=0 \to x_1=-2 \qquad x-1=0 \to x_2=1$$
$$x-2=0 \to x_3=2 \qquad 2x-3=0 \to x_4=\frac{3}{2}$$

Ecuaciones Radicales

Las **ecuaciones con radicales** son aquellas en las que la incógnita aparece en alguno de los términos bajo el signo radical. Se suelen resolver aislando el radical y elevando al cuadrado tantas veces como sea necesario para quitar los radicales.

Ejemplo:

$$3\sqrt{6x+1}-5=2x \to 3\sqrt{6x+1}=2x+5 \to \left(3\sqrt{6x+1}\right)^2=(2x+5)^2$$
$$\to 9(6x+1)=4x^2+20x+25 \to 54x+9=4x^2+20x+25$$

$$\rightarrow \quad 4x^2-34x+16=0 \quad \rightarrow \quad 2x^2-17x+8=0 \qquad x=8 \text{ y } x=\frac{1}{2}$$

Con todo esto convertimos las ecuaciones radicales en polinómicas.

Ojo, al elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación, se pueden introducir soluciones falsas, es por tanto, imprescindible comprobar la veracidad de las soluciones obtenidas.

Ecuaciones Racionales

Las **ecuaciones racionales** son ecuaciones en las que aparecen fracciones algebraicas con denominadores no nulos, como por ejemplo:

$$\frac{x}{x+1}=\frac{(x+2)^2}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x}$$

El método general para resolver este tipo de ecuaciones consiste en reducir todas las fracciones algebraicas a común denominador (mínimo común múltiplo de los denominadores), pudiendo así eliminarlos y transformarla en una ecuación polinómica. Tenemos que comprobar que ninguna de las soluciones anule el denominador común.

Ejemplo:

$$\frac{x}{x+1}=\frac{(x+2)^2}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x} \rightarrow \frac{x\cdot x}{x(x+1)}=\frac{(x+2)^2}{x(x+1)}+\frac{(x+1)\cdot(x+1)}{x(x+1)}$$

$$\frac{x^2}{\cancel{x(x+1)}}=\frac{(x+2)^2}{\cancel{x(x+1)}}+\frac{(x+1)^2}{\cancel{x(x+1)}} \rightarrow x^2=(x+2)^2+(x+1)^2$$

$$x^2=x^2+4x+4+x^2+2x+1 \qquad x^2+6x+5=0 \qquad x=-5 \text{ y } x=-1$$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Una **ecuación exponencial** es una ecuación en la que la incógnita, la x normalmente, aparece en el exponente de una potencia. Como por ejemplo:

$$2^{2x-4}=64$$

Para resolverla basta con conseguir en ambos miembros la misma base, y así, podremos igualar los exponentes.

$$2^{2x-4}=64 \rightarrow 2^{2x-4}=2^6 \rightarrow 2x-4=6$$
$$\rightarrow 2x=6+10 \rightarrow 2x=10 \rightarrow x=5$$

En este tipo de ecuaciones siempre hay que verificar si la solución o soluciones son correctas.

$$2^{2x-4}=64 \rightarrow 2^{2\cdot5-4}=2^6=64 \qquad c.q.d.$$

Una **ecuación logarítmica** es aquella en la que la incógnita aparece dentro de un logaritmo. Para resolverlas hemos de tener en cuenta las propiedades de los logaritmos vistas con anterioridad. Ejemplo de este tipo de ecuaciones es:

$$\log 2+\log(11-x^2)=2\cdot\log(5-x)$$

Para resolverla usamos las propiedades de los logaritmos para conseguir en ambos miembros dos logaritmos de argumentos iguales.

$$\underbrace{\log 2+\log(11-x^2)}_{\text{Propiedad 5}}=\underbrace{2\cdot\log(5-x)}_{\text{Propiedad 7}} \rightarrow \underbrace{\log\left[2\cdot(11-x^2)\right]=\log(5-x)^2}_{\text{Propiedad 9}}$$

$$\rightarrow \left[2\cdot(11-x^2)\right]=(5-x)^2 \xrightarrow[\text{Operamos}]{} 22-2x^2=25-10x+x^2$$

$$\xrightarrow[\text{Agrupamos}]{} 3x^2-10x+3=0 \rightarrow x=3 \quad y \quad x=\frac{1}{3}$$

Inecuaciones

Una **inecuación** es una desigualdad entre expresiones algebraicas entre las que se encuentra uno de estos signos ≠, <, >, ≤ y ≥.

Ejemplos: $2x-3<5 \qquad x^2-x-6>0 \qquad x(x+1)+3x>5x+6$

La solución de una inecuación son todos los valores que verifican la desigualdad y se puede expresar mediante una representación gráfica o un intervalo.

Para resolverlas, tenemos que operar hasta obtener inecuaciones equivalentes, es decir, aquellas que tengan la misma solución, pero respetando las propiedades de las desigualdades.

Si a los dos miembros de una desigualdad le sumamos o restamos un mismo número, obtenemos otra desigualdad del mismo sentido.

$$2x-3<5 \rightarrow 2x-3+8<5+8$$

(no cambia el sentido de la desigualdad)

Si a los dos miembros de una desigualdad lo multiplicamos o lo dividimos por un mismo número, k, puede pasar que:

- Si **k es positivo** obtenemos una desigualdad del mismo sentido.

$$2x-3<5 \rightarrow 3\cdot(2x-3)<3\cdot5$$

(no cambia el sentido de la desigualdad)

- Si **k es negativo** obtenemos una desigualdad de sentido contrario.

$$2x-3<5 \rightarrow -3\cdot(2x-3)>-3\cdot5$$

(cambia el sentido de la desigualdad)

Inecuaciones de primer grado

Una **inecuación de primer grado** es una desigualdad entre expresiones polinómicas de grado 1 que se resuelve despejando la incógnita como se hace en las ecuaciones de primer grado.

Ejemplo: $2(x+3)<x+3(x+4) \rightarrow 2x+6<x+3x+12$

$$\rightarrow 2x+6<4x+12 \rightarrow 2x-4x<12-6 \rightarrow$$

$$\rightarrow -2x<6 \rightarrow x>-\frac{6}{2} \rightarrow x>-3 \rightarrow (-\infty,-3)$$

Inecuaciones de segundo grado o +

Una **inecuación de segundo grado** es una desigualdad entre expresiones polinómicas de grado 2 o más que se resuelve factorizando el polinomio y analizando el signo del producto de sus factores en los intervalos determinados por sus raíces.

$$x^2-3x-4=0 \qquad (x-4)\cdot(x+1)=0 \qquad x_1=-1 \quad y \quad x_2=4$$

Después, representamos gráficamente los intervalos determinados por las soluciones en la recta real, que son (−∞,−1) (−1,4) (4,+∞)

Hecho esto, estudiaremos el signo en cada uno de ellos, para ver en cuál de ellos se verifica la desigualdad. Para ello escogeremos un valor sencillo, por ejemplo el 0, que pertenece al intervalo central (−1,4), y lo sustituimos en la desigualdad:

Si x=0 $\rightarrow x^2-3x-4<0 \rightarrow 0^2-3\cdot0-4<0 \rightarrow -4<0$

Llegamos a −4 < 0, que como podemos observar es cierta, por tanto el intervalo donde está el 0 verifica la inecuación y los otros dos no.

Por tanto la solución es el intervalo (−1,4)

Inecuaciones Racionales

Las **inecuaciones racionales** son aquellas que contienen fracciones algebraicas que se pueden reducir a su forma estándar mediante transformaciones, dejando una fracción algebraica en el primer miembro y el 0 en el segundo, como por ejemplo:

$$\frac{2x+5}{x-1}\geq 1 \rightarrow \frac{2x+5}{x-1}\geq\frac{x-1}{x-1} \rightarrow \frac{2x+5-x+1}{x-1}\geq 0 \rightarrow \frac{x+6}{x-1}\geq 0$$

Para resolver inecuaciones racionales se seguirán estos pasos:

a) Poner la inecuación fraccionaria en forma estándar (únicamente una fracción algebraica en el primer miembro y 0 en el segundo).
b) Ver qué valores del numerador lo hacen nulo.
c) La misma operación con el denominador. (Los valores que anulan el denominador nunca formarán parte del intervalo solución, porque el denominador no puede ser 0).
d) Vistos los puntos críticos, representar los resultados en un diagrama de signos.
e) Los intervalos en que se cumplan la desigualdad será la solución.

$$\frac{x+3}{x-1}\geq 0 \rightarrow \begin{cases} x+3\geq 0 \\ x-1>0 \end{cases} \text{ ó } \begin{cases} x+3\leq 0 \\ x-1<0 \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x-1}\geq 0 \rightarrow \begin{cases} x+3\geq 0 \rightarrow x\geq -3 \\ x-1>0 \rightarrow x>1 \end{cases} \rightarrow x>1$$

$$\frac{x+3}{x-1}\geq 0 \rightarrow \begin{cases} x+3\leq 0 \rightarrow x\leq -3 \\ x-1<0 \rightarrow x<1 \end{cases} \rightarrow x\leq -3$$

Por tanto, la solución es: (−∞,−3] ∪ (1,+∞)

Problemas de ecuaciones e inecuaciones

Para resolver este tipo de problemas hemos de:

1) Hacer una lectura comprensiva del enunciado.
2) Asignar la incógnita x a la variable desconocida.
3) Plantear la ecuación (o inecuación) con ayuda del lenguaje algebraico.
4) Resolver la ecuación (o inecuación) con precisión.
5) Analizar su solución en el problema y verificarla.
6) Dar respuesta a la pregunta o preguntas planteadas.

Problemas de números

En los **problemas de números** asignaremos la incógnita al número pedido y con ello plantearemos la ecuación. Si aparecieran otros números relacionados con éste, el doble, el triple, un número impar…. Los escribiríamos de forma algebraica para poder utilizarlos en la ecuación (2x, 3x, 2x–1…).

01) Determinar dos números naturales y pares consecutivos cuyo producto sea 2024.

Si llamamos **2x** al primer número, su consecutivo par será **2x+2**.

Con esto, ya podemos plantear la ecuación: $2x(2x+2)=2024$

Cuya solución es:

$$2x(2x+2)=2024 \quad\rightarrow\quad 4x^2+4x-2024=0 \quad\rightarrow$$
$$\rightarrow\quad x^2+x-506=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 1\cdot 506}}{2} \quad\rightarrow$$
$$\rightarrow\quad x=\frac{-1\pm 45}{2} \quad\rightarrow\quad x=22$$

Los números pedidos son el 44 y el 46.

Problemas de Edades

En los **problemas de edades** se recomienda el uso de una tabla para el planteamiento de la ecuación. En la mayoría de ellos que considerar tres tiempos: presente, pasado y futuro. Las relaciones entre los datos y las incógnitas se refieren siempre a éstos. Esquemáticamente:

Pasado	Presente	Futuro
Hace t años	Ahora	Dentro de t años
$x-t$	x	$x+t$
$y-t$	y	$y+t$
$z-t$	z	$z+t$

02) La edad actual de Sergio es el doble que la de su hermana Raquel, pero hace 10 años la edad de Sergio era el triple que la de Raquel. ¿Cuántos años tienen actualmente cada uno?

Si llamamos x a la edad de Raquel y recogemos los datos en una tabla:

	Edad Actual	Hace10 años
Raquel	x	x–10
Sergio	2x	2x–10

Ya podemos plantear la ecuación: $\underbrace{2x-10}_{\text{Hace 10 años la edad de Sergio}} = \underbrace{3(x-10)}_{\text{Será el triple de la edad de Raquel}}$

Cuya solución es: $2x-10=3(x-10) \quad\rightarrow\quad 2x-10=3x-30$

$$2x-3x=-30+10 \quad\rightarrow\quad -x=-20 \quad\rightarrow\quad x=20$$

Por tanto, la edad actual de Raquel es 20 años y la de Sergio es 40.

Problemas con figuras geométricas

En los problemas en los que aparezcan figuras geométricas hemos de dominar las principales relaciones y fórmulas de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos, además de los teoremas de Pitágoras y de Thales.

03) El perímetro de un rectángulo es de 400 m. Halla la longitud de sus lados, sabiendo que la base es 2 m mayor que la altura.

Si llamamos **x** a la altura del rectángulo, x+2 será la longitud de la base, y como el perímetro es la suma de sus lados, la ecuación será :

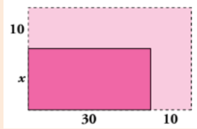
$$P=2x+2(x+1)=400 \quad\rightarrow\quad 2x+2x+2=400$$

De donde: $4x+4=400 \quad\rightarrow\quad 4x=396 \qquad x=\frac{396}{4}=99$

Por tanto, la altura mide 99 m y la base 99–2=101 metros.

04) De una parcela rectangular se han cedido, para calles, 10 m a lo largo y otros 10 m a lo ancho, por lo que la parcela ha perdido una superficie de 480 m², Si el rectángulo resultante mide 30 metros de largo, ¿cuál es su anchura?

Si representamos la situación con un dibujo:



Si llamamos x a la altura del nuevo rectángulo, tenemos que, si sumamos el área del nuevo más los 480 m² que se han perdido, nos dará lamamos el área del antiguo rectángulo, aso que ya podemos plantear la ecuación:

$$30\cdot x+480=40\cdot(x+10) \quad\rightarrow\quad 30x+480=40x+400$$

Cuya solución es:

$$30x-40x=400-480 \quad\rightarrow\quad -10x=-80 \quad\rightarrow\quad x=8$$

Por tanto, la anchura resultante es de 8 metros.

Problemas de mezclas

En los **problemas de mezclas** nos ayudaremos de una tabla que rellenaremos con los datos del enunciado y en la que colocamos la incógnita x en alguna de las variables. No podemos olvidar que la cantidad de mezcla siempre es la suma de las cantidades a mezclar y que la ecuación la plantearemos con la columna total, en la que:

$$\text{Total}_1 + \text{Total}_2 = \text{Total}_{\text{Mezcla}}$$

05) Mezclamos 600 gramos de oro con una pureza del 80 % con 550 g de otro oro con un 95 % de pureza. ¿Qué pureza tendrá la mezcla de oro resultante?

Si recogemos los datos en una tabla:

	Cantidad (gr)	Pureza (%)	Total
Au I	600	80	(600·80) = 48.000
Au II	550	95	(550·95) = 52.250
Mezcla	600+550 = 1.150	X	1.150 · X

Recuerda que la columna total se consigue multiplicando cantidad por precio, y la cantidad de mezcla se obtiene sumando ambas cantidades de oro.

Para escribir la ecuación correspondiente haremos siempre:

$$T_{Mezcla}=T_{Oro\,I}+T_{Oro\,II}$$

Por tanto: $1.150\cdot x=48.000+52.250 \quad\rightarrow\quad x=\frac{100.250}{1.150}=87{,}2\%$

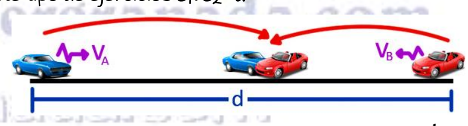
La pureza del Au resultante es del 87,2 %.

Problemas de móviles

En los **problemas de móviles**, trabajaremos sobre todo con las ecuaciones del MRU, movimiento rectilíneo y uniforme:

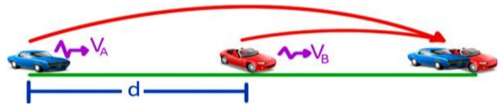
$$v=\frac{e}{t} \quad\rightarrow\quad e=v\cdot t \quad\rightarrow\quad t=\frac{e}{v} \quad\rightarrow\quad donde: \begin{cases} e=espacio \\ v=velocidad \\ t=tiempo \end{cases}$$

En un encuentro, los vehículos salen de distintos puntos y se encuentran entre ellos. En este tipo de ejercicios **$e_1+e_2=d$**



El tiempo de encuentro viene dado por: $t_e=\frac{d}{v_A+v_B}$

En un alcance, los vehículos salen del mismo sitio, uno más tarde que el otro.



El tiempo de encuentro en este caso viene dado por: $t_e=\frac{d}{v_A-v_B}$

06) Un malhechor escapa a 70 km/h, y 90 km más atrás le persigue la policía a 85 km/h. ¿Cuándo y dónde le alcanzarán?

Si llamamos x a la distancia que recorre el malhechor, entonces, 90+x será la distancia que recorre la policía.

Como salen a la vez, llamaremos t al tiempo que tardan en encontrarse, y con la ecuación de la velocidad:

$$v=\frac{e}{t} \quad \rightarrow \quad t=\frac{e}{v}= \quad \rightarrow \quad t_M=\frac{x}{70} \quad y \quad t_P=\frac{x+90}{85}$$

Como los tiempos son iguales, igualamos ambas expresiones:

$$t_M=t_P \quad \rightarrow \quad \frac{x}{70}=\frac{x+90}{85} \quad \rightarrow \quad x=420\ km$$

Y el tiempo que la policía tarda en alcanzar al malhechor es:

$$t_P=\frac{x+90}{85}=\frac{420+90}{85}=\frac{510}{85} \quad \rightarrow \quad t_p=6\ horas$$

Se encuentran a 420 km de C, o a 510 km de A. 6 horas después.

Problemas de Grifos

En el enunciado de los problemas de grifos se presentan siempre una serie de sujetos" que realizan labores que se pueden acumular (grifos que llenan un depósito; máquinas que realizan un mismo trabajo; obreros que realizan una obra, etc ...).

Los datos e incógnitas siempre se refieren a los tiempos en que, cada uno por separado o todos juntos, realizan dicha labor. El "truco" radica en considerar la parte de la labor que realiza, en la unidad de tiempo, cada "sujeto" y todos juntos, sabiendo que la parte que realizan todos juntos es la suma de las partes de labor que realiza cada uno de los sujetos por separado.

Supongamos que tenemos dos grifos para llenar un depósito:

El grifo 1 tarda t_1 horas en llenarlo, en una hora habrá llenado: $1/t_1$

El grifo 2 tarda t_2 horas en llenarlo, en una hora habrá llenado: $1/t_2$

Si el depósito tiene un desagüe:

El desagüe tarda t_3 horas en vaciarlo, en una hora vaciará: $1/t_3$

Si todos juntos tardan en llenarlo T horas, en una hora llenarán: 1/T

Para calcular alguna de las variables, procederemos de la siguiente forma:

$$\underbrace{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{T}}_{\text{Sin desagüe}} \qquad \underbrace{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_3}=\frac{1}{T}}_{\text{Con desagüe}}$$

07) Un grifo A llena un depósito de agua en 2 h, y otro grifo B, en 3 h. El depósito tiene un desagüe que lo vacía en 6 h estando los grifos cerrados. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos grifos en llenar a la vez el depósito estando el desagüe abierto?

Si llamamos x al tiempo que tardan en llenar el depósito los dos grifos con el desagüe abierto, $1/x$ será lo que llenan ambos grifos durante 1 hora.

- Si el grifo A tarda lo llena en 2 horas, en 1 hora llenará: 1/2 del depósito.
- Si el grifo B tarda 3 horas, en una hora llenará: 1/3 del depósito.
- Si el desagüe lo vacía en 6 horas, en una hora vaciará: 1/6 del depósito.

Si sumamos la labor que hace cada uno en 1 hora eso será igual a lo que hacen todos a la vez:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{8}=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad x=\frac{8}{5}=1{,}6\ horas$$

Por tanto, los dos grifos llenarán el depósito en 1 h y 36 min.

08) Se poseen dos cirios de igual altura que se encienden simultáneamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo la altura del primero será el doble del segundo, si se sabe que se consumen, el primero en 6 horas y el segundo en 4 horas?

Si llamamos x al tiempo que pasa hasta que la altura del primero sea el doble que la del segundo.

Si el primero se consume en 6 horas, en 1 hora se consumirá: 1/6, y en x horas lo hará x/6.

Si el segundo se consume en 4 horas, en 1 hora se consumirá: 1/4, y en x horas lo hará x/4.

Cuando pasen x horas, la altura del primero (1–x/6) será igual que el doble de la altura del segundo (1–x/4):

$$\left(1-\frac{x}{6}\right)=2\left(1-\frac{x}{4}\right) \quad \rightarrow \quad 1-\frac{x}{6}=2-\frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad x=3$$

Por tanto, han de pasar 3 horas.

Problemas de Inecuaciones

Los problemas de inecuaciones se resuelven prácticamente igual que los de ecuaciones, aunque en este caso la solución no será un solo número, sino que será un conjunto de números que expresaremos mediante intervalos.

09) ¿Cuáles son los números cuyo triple excede a su cuadrado en 10 o más unidades?

Si llamamos x al número, ya podemos escribir la inecuación:

$$3x-x^2\geq 10$$

cuya solución pasa por escribirla con todos los miembros a un lado:

$$3x-x^2\geq 10 \quad \rightarrow \quad 3x-x^2-10\geq 0 \quad \rightarrow \quad x^2-3x+10\leq 0$$

Y después resolvemos la ecuación para encontrar los puntos que representaremos en la recta real y originará los intervalos:

Como $\Delta=b^2-4ac=9-4\cdot1\cdot10=9-40=-31<0$, entonces No tiene solución

Por tanto, no existe ningún número.

10) En un rectángulo, la altura mide 12 cm y la base es desconocida. Si se sabe que su área está comprendida entre 300 y 600 cm², pudiendo ser incluso alguno de estos dos valores, ¿qué puede decirse de la base?

Como el área se calcula multiplicando base por altura, si dividimos las áreas entre 10, tendremos el intervalo en el que estará la base:

$$\frac{300}{12}=25 \qquad \frac{600}{12}=50$$

Por tanto, la longitud de la base pertenece al intervalo [25,50]

11) Si el área de un cuadrado es menor o igual que 64 centímetros cuadrados, calcula los posibles valores de su diagonal.

En un cuadrado de lado x, el área viene dada por la expresión $A=x^2$, y su diagonal se puede calcular mediante el Teorema de Pitágoras:

$$x^2+x^2=d^2 \quad \rightarrow \quad 2x^2=d^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2x^2}=\sqrt{d^2} \quad \rightarrow \quad x\sqrt{2}=d$$

Pues bien, si su área es menor o igual que 64, podemos plantear la inecuación:

$$A\leq 64 \quad \rightarrow \quad x^2\leq 64$$

Inecuación cuya solución es:

$$x^2\leq 64 \quad \rightarrow \quad x\leq 8$$

Por tanto el lado del cuadrado será menor que 8, y su diagonal:

$$d=x\sqrt{2}=8\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad d\leq 8\sqrt{2}$$

Su diagonal será menor que $8\sqrt{2}$

Su lado mide (0,8] y su diagonal $\left(0,8\sqrt{2}\right]$

12) Un comercial de la tienda en casa tiene un contrato, por el cual percibe 300 € de sueldo fijo más 90 € por cada artículo vendido. Si recibe una oferta de trabajo de otra tele tienda por la que le ofrecen 140 € por cada venta, pero sin remuneración fija. ¿Cuántos artículos debe vender para que le convenga, económicamente, cambiar de empresa?

Para que le convenga cambiar, el sueldo de la segunda ha de ser mayor que el de la primera, así que escribimos la inecuación y la resolvemos:

$$140x>300+90x \quad \rightarrow \quad 50x>300 \quad \rightarrow \quad x>\frac{300}{50}=6$$

Por tanto, tiene que vender más de 6 artículos.

13) En una tienda de comercio justo hay dos tipos de marcas de café: una de Ecuador y otra de Colombia. En el que procede de Ecuador, cada paquete cuesta 1,30 euros, y en el de Colombia, 1,65 euros. Averigua el número de paquetes de cada tipo que puedo adquirir si llevo 25 euros en el bolsillo y quiero comprar el doble de paquetes del elaborado en Colombia que del procedente de Ecuador.

Como tengo que comprar doble de uno que de otro, compraré 2x del primer y x del segundo, con esto planteamos la inecuación y la resolvemos:

$$2\cdot1{,}65x+1{,}3x\leq 25 \quad \rightarrow \quad 4{,}6x>25 \quad \rightarrow \quad x>\frac{25}{4{,}6}=5{,}4$$

Por tanto, Como máximo puedo adquirir 5 de Ecuador y 10 de Colombia.

14) La suma de la mitad y de la cuarta parte de un número es más pequeña o igual que el triple del resultado de restarle 6 unidades. ¿Qué número es?

Si llamamos x al número, ya podemos plantear la inecuación:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}<3(x-6) \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2}+\frac{x}{4}<3x-18 \quad \rightarrow \quad \frac{2x}{4}+\frac{x}{4}<\frac{12x-72}{4}$$

y operando llegamos a:

$$\frac{2x}{\cancel{4}}+\frac{x}{\cancel{4}}<\frac{12x-72}{\cancel{4}} \quad \rightarrow \quad 2x+x<12x-72 \quad \rightarrow \quad 72<9x$$

Cuya solución es: $\frac{72}{9}<x \quad \rightarrow \quad x>8$

Por tanto, el número ha de ser mayor que 8.