

**POSICIONES DE DOS RECTAS
EN EL PLANO**

Destino: el futuro

El agudo silbido despertó al monstruo, que comenzó a moverse lentamente entre chirridos metálicos y nubes de vapor.

Apenas la locomotora hubo iniciado la marcha, dos jóvenes, Sonia y Fedia, abandonaron el compartimento donde estaban sus padres y su hermana mayor, y atravesando algunos vagones llegaron al furgón de cola, desde donde vieron alejarse su ciudad, Palibino.

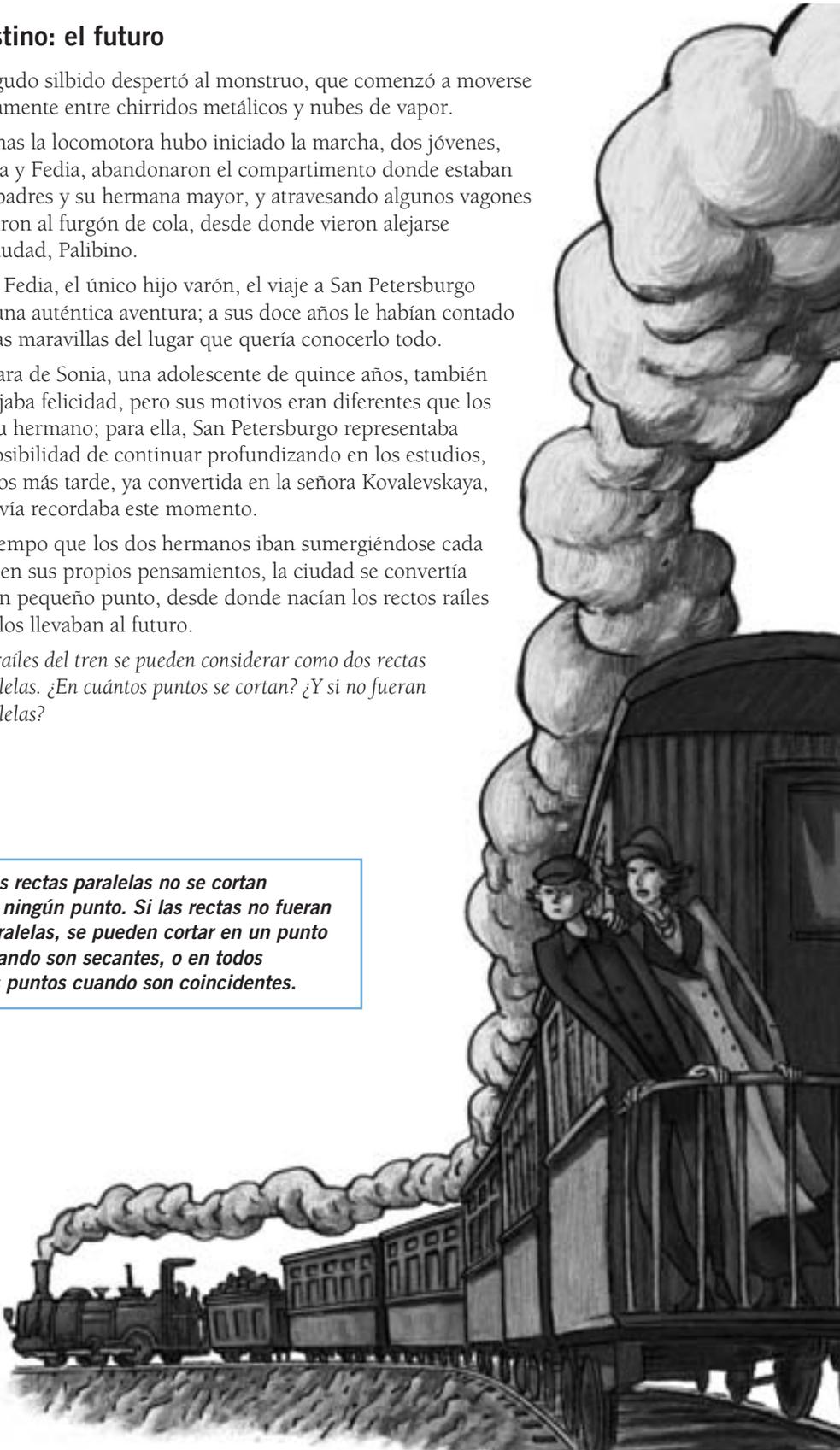
Para Fedia, el único hijo varón, el viaje a San Petersburgo era una auténtica aventura; a sus doce años le habían contado tantas maravillas del lugar que quería conocerlo todo.

La cara de Sonia, una adolescente de quince años, también reflejaba felicidad, pero sus motivos eran diferentes que los de su hermano; para ella, San Petersburgo representaba la posibilidad de continuar profundizando en los estudios, y años más tarde, ya convertida en la señora Kovalevskaya, todavía recordaba este momento.

Al tiempo que los dos hermanos iban sumergiéndose cada uno en sus propios pensamientos, la ciudad se convertía en un pequeño punto, desde donde nacían los rectos raíles que los llevaban al futuro.

Los raíles del tren se pueden considerar como dos rectas paralelas. ¿En cuántos puntos se cortan? ¿Y si no fueran paralelas?

Dos rectas paralelas no se cortan en ningún punto. Si las rectas no fueran paralelas, se pueden cortar en un punto cuando son secantes, o en todos los puntos cuando son coincidentes.



Vectores y rectas

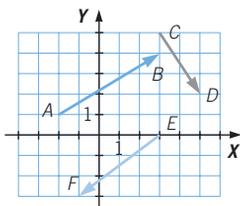
EJERCICIOS

001 ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores?

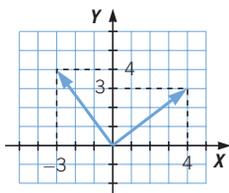
$$\vec{AB} = (5, 3)$$

$$\vec{CD} = (2, -3)$$

$$\vec{EF} = (-4, -3)$$



002 Dibuja dos vectores diferentes que tengan el mismo módulo, distinta dirección y diferente sentido.



003 Expresa estas situaciones con vectores, indicando su módulo, dirección y sentido.

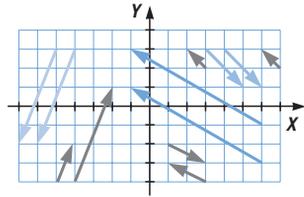
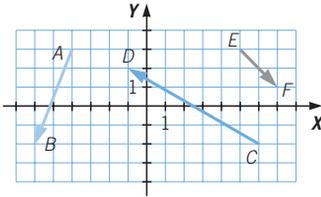
- Un barco sale de Canarias con dirección Norte a una velocidad de 10 nudos.
- Un barco sale de Azores con dirección Sureste y una velocidad de 12 nudos.



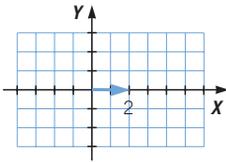
004 ¿Qué diferencias hay entre \vec{AB} y \vec{BA} ?

Son vectores con igual módulo y dirección, pero con distinto sentido.

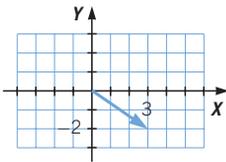
005 Dibuja dos vectores equivalentes a cada vector y otros dos paralelos.



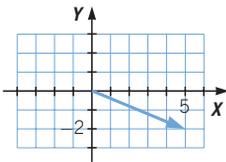
006 Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 0)$ y $C(3, -2)$, representa y calcula las coordenadas y el módulo de los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} y \overrightarrow{AC} .



$$\overrightarrow{AB} = (2, 0) \quad |\overrightarrow{AB}| = 2$$



$$\overrightarrow{BC} = (3, -2) \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{13}$$



$$\overrightarrow{AC} = (5, -2) \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{29}$$

007 Dados los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ y $C(0, 2)$, halla las coordenadas de un punto D para que los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} sean equivalentes, y también para que sean paralelos.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1)$$

$$\text{Sea } D(a, b) \rightarrow \overrightarrow{CD} = (a - 0, b - 2) = (a, b - 2).$$

Para que los vectores sean equivalentes:

$$(1, 1) = (a, b - 2)$$

Las coordenadas de D son $(1, 3)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2}$, porque dos vectores equivalentes tienen el mismo módulo.

Para que los vectores sean paralelos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b - 2}{1} \rightarrow a = b - 2$$

Las coordenadas de D son $(b - 2, b)$; por ejemplo, $(2, 4)$.

Vectores y rectas

008 Las coordenadas de los puntos A , B , C y D son:

$$A(0, 0) \quad B(-1, 3) \quad C(-2, -2) \quad D(1, -3)$$

Calcula el resultado de estas operaciones.

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$ e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}$
 b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ f) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 3) \quad \overrightarrow{CD} = (3, -1)$$

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2, 2)$ d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = (-2, 6)$
 b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-4, 4)$ e) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = (0, 0)$
 c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = (4, -4)$ f) $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (-2, -2)$

009 Los puntos $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$ y $C(2, 0)$ son los vértices de un triángulo. Halla las coordenadas de los vectores que forman sus lados.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1) \quad \overrightarrow{BC} = (2, -2) \quad \overrightarrow{CA} = (-3, 1)$$

010 Si $\vec{u} = (-3, 2)$ y $\vec{w} = (4, -1)$, determina el vector \vec{v} tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.

$$\vec{v} = \vec{w} - \vec{u} = (7, -3)$$

011 Sabiendo que $A(3, -4)$ y $B(5, 2)$, calcula $k \cdot \overrightarrow{AB}$.

- a) $k = 3$ b) $k = -2$ c) $k = 5$ d) $k = \frac{1}{2}$

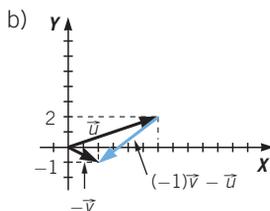
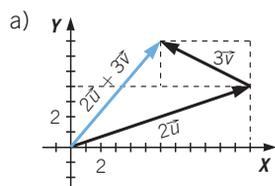
$$\overrightarrow{AB} = (2, 6)$$

- a) $3 \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \cdot (2, 6) = (6, 18)$
 b) $-2 \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \cdot (2, 6) = (-4, -12)$
 c) $5 \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \cdot (2, 6) = (10, 30)$
 d) $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot (2, 6) = (1, 3)$

012 Efectúa las siguientes operaciones analítica y gráficamente, si $\vec{u} = (6, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1)$.

- a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$
 b) $(-1) \cdot \vec{v} - \vec{u}$

- a) $2 \cdot (6, 2) + 3 \cdot (-2, 1) = (12, 4) + (-6, 3) = (6, 7)$
 b) $(-1) \cdot (-2, 1) - (6, 2) = (2, -1) - (6, 2) = (-4, -3)$



013 Sabemos que A' es el transformado de A por la traslación de vector \vec{u} .
Calcula x e y .

a) $A(0, 2) \xrightarrow{\vec{u} = (x, y)} A'(-2, 4)$ c) $A(x, y) \xrightarrow{\vec{u} = (-2, -3)} A'(-4, 6)$
 b) $A(-1, -2) \xrightarrow{\vec{u} = (x, 3)} A'(5, y)$ d) $A(x, 8) \xrightarrow{\vec{u} = (7, y)} A'(10, 5)$

a) $\vec{u} = (x, y) = (-2, 4) - (0, 2) = (-2, 2) \rightarrow x = -2, y = 2$
 b) $(-1, -2) + (x, 3) = (5, y) \rightarrow x = 6, y = 1$
 c) $(x, y) + (-2, -3) = (-4, 6) \rightarrow x = -2, y = 9$
 d) $(x, 8) + (7, y) = (10, 5) \rightarrow x = 3, y = -3$

014 Dados los puntos de coordenadas $A(-1, 7)$ y $B(0, 1)$:

- a) Calcula el vector director de la recta que pasa por A y B .
 b) Halla la ecuación vectorial de dicha recta.

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, -6)$
 b) Ecuación vectorial de la recta: $(x, y) = (-1, 7) + t \cdot (1, -6)$

015 Calcula la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(0, -4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 7)$.

La ecuación vectorial de la recta es: $(x, y) = (0, -4) + t \cdot (-1, 7)$.

016 Determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(-2, 3)$ y tiene como vector director:

a) $\vec{v} = (3, 4)$ b) $-\vec{v} = (-3, -4)$ c) $2\vec{v} = (6, 8)$

Escribe cinco puntos de cada una de las rectas. ¿Qué característica tienen en común estas tres rectas?

a) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (3, 4)$
 b) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (-3, -4)$
 c) $(x, y) = (-2, 3) + t \cdot (6, 8)$

Los cinco puntos pueden ser: $(-2, 3)$, $(1, 7)$, $(4, 11)$, $(-5, -1)$ y $(-8, -5)$.

Las tres rectas son coincidentes.

017 Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(0, -4)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 7)$.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 + (-1) \cdot t \\ y = -4 + 7 \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -t \\ y = -4 + 7t \end{array} \right\}$$

018 ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-1, 0)$?

Ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + (-1) \cdot t \\ y = 3 + 0 \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 \end{array} \right\}$$

Vectores y rectas

019 Dados los puntos $A(-1, 7)$ y $B(0, 1)$, halla:

- a) Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por ellos.
 b) Tres puntos que pertenezcan a dicha recta.

a) El vector director de la recta es: $\vec{v} = \overline{AB} = (1, -6)$.

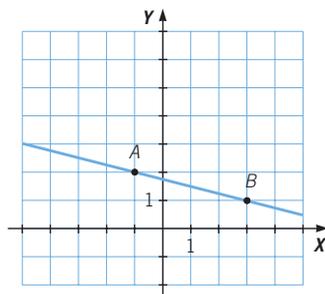
Las ecuaciones paramétricas son:

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 + 1 \cdot t \\ y = 7 + (-6) \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -1 + t \\ y = 7 - 6t \end{array} \right\}$$

- b) $t = 1 \rightarrow x = -1 + 1 = 0 \quad y = 7 - 6 \cdot 1 = 1$
 $t = 2 \rightarrow x = -1 + 2 = 1 \quad y = 7 - 6 \cdot 2 = -5$
 $t = -1 \rightarrow x = -1 - 1 = -2 \quad y = 7 - 6 \cdot (-1) = 13$

020 La siguiente gráfica muestra una recta.

- a) Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación vectorial.
 b) ¿Pertenece el punto $(-6, 4)$ a la recta?



La recta pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(3, 1)$.

El vector director de la recta es:

$$\vec{v} = \overline{AB} = (4, -1)$$

a) Las ecuaciones paramétricas son:

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 + 4 \cdot t \\ y = 2 + (-1) \cdot t \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 2 - t \end{array} \right\}$$

La ecuación vectorial es: $(x, y) = (-1, 2) + t \cdot (4, -1)$.

- b) No, ya que no existe ningún valor t para que se cumpla $(-6, 4) = (-1, 2) + t \cdot (4, -1)$.

021 Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por estos puntos.

$$A(3, -1) \quad B(4, 5)$$

Punto: $A(3, -1)$ Vector director: $\vec{v} = \overline{AB} = (1, 6)$

$$\text{Ecuación continua: } \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{6}$$

022 Halla la ecuación continua de la siguiente recta expresada en forma paramétrica.

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - 3t \\ y = 2t \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - 3t \rightarrow t = \frac{x-2}{-3} \\ y = 2t \rightarrow t = \frac{y}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2}$$

Vectores y rectas

028 Calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(0, -1)$ y $B(3, 2)$.

Vector director: $\vec{v} = (3, 3)$.

La ecuación general es: $-3x + 3y + C = 0$.

Como el punto $B(3, 2)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + C = 0 \rightarrow C = 3$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + y + 1 = 0$.

029 ¿Cuál es la ecuación general de la recta cuya ecuación vectorial es $(x, y) = (1, 1) + t \cdot (3, 1)$?

Vector director: $\vec{v} = (3, 1)$.

La ecuación general es: $-x + 3y + C = 0$.

Como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-1 + 3 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow C = -2$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + 3y - 2 = 0$.

030 La pendiente de una recta es $m = 2$ y sabemos que pasa por el punto $A(0, -1)$.

a) Escribe su ecuación general.

b) Calcula un vector director y otro paralelo.

a) Vector director: $\vec{v} = (1, 2)$.

La ecuación general es: $-2x + y + C = 0$.

Como el punto $A(0, -1)$ pertenece a la recta, resulta:

$$-2 \cdot 0 - 1 + C = 0 \rightarrow C = 1$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-2x + y + 1 = 0$.

b) Un vector director es: $\vec{v} = (B, -A) = (1, 2)$.

Un vector paralelo es: $\vec{u} = (2, 4)$.

031 Indica cuál es la posición relativa de las siguientes rectas en el plano.

a) $r: x + 3y + 3 = 0$

b) $r: x + 3y + 2 = 0$

s: $x - 5y + 3 = 0$

s: $3x + 9y + 6 = 0$

a) El vector director de r es $(3, -1)$ y su pendiente es $m = \frac{-1}{3}$.

El vector director de s es $(-5, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{-5} \neq \frac{1}{3} = m$.

Las rectas son secantes.

b) El vector director de r es $(3, -1)$ y el vector director de s es $(9, -3)$.

Los vectores directores son proporcionales: $\frac{-1}{3} = \frac{-3}{9}$,

y el punto $(1, -1)$ pertenece a r y s . Las rectas son coincidentes.

- 032 Estudia la posición relativa de las rectas $r: (x, y) = t \cdot (3, 1)$ y $s: x - 5y + 3 = 0$.

El vector director de r es $(3, 1)$ y su pendiente es $m = \frac{1}{3}$.

El vector director de s es $(-5, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{-5} \neq \frac{1}{3}$.

Las rectas son secantes.

- 033 ¿Cuánto tiene que valer A para que las rectas $r: y = Ax + 6$ y $s: \frac{x}{2} = \frac{y - 6}{4}$ sean paralelas?

Un vector director de s es $(2, 4)$ y su pendiente es 2.

Las rectas son paralelas cuando $A = 2$.

ACTIVIDADES

- 034 Escribe tres ejemplos de magnitudes escalares y otros tres de magnitudes vectoriales.

Magnitudes escalares: la edad de Juan, la altura de María y el precio de la compra.

Magnitudes vectoriales: la gravedad, la aceleración de un móvil y la frenada de un coche.

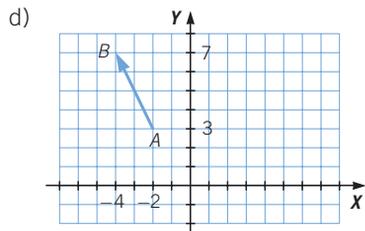
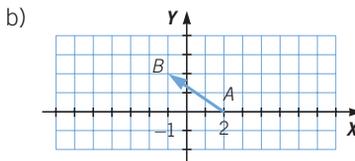
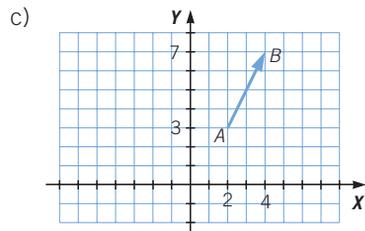
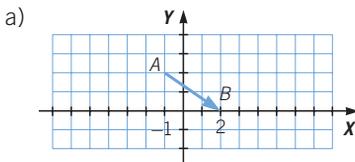
- 035 Dibuja el vector \overrightarrow{AB} , cuyo origen y extremo son:

a) $A(-1, 2)$ y $B(2, 0)$

c) $A(2, 3)$ y $B(4, 7)$

b) $A(2, 0)$ y $B(-1, 2)$

d) $A(-2, 3)$ y $B(-4, 7)$



Vectores y rectas

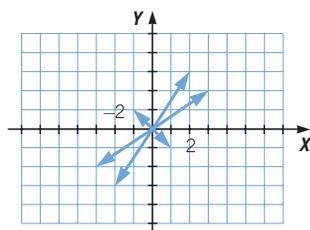
036 Calcula las coordenadas del vector \overrightarrow{AB} , siendo A y B los siguientes puntos.

- a) $A(0, 2)$ y $B(1, -1)$
 - b) $A(2, 1)$ y $B(4, 3)$
 - c) $A(-2, 1)$ y $B(-5, 1)$
 - d) $A(0, 0)$ y $B(6, 2)$
- a) $\overrightarrow{AB} = (1, -3)$ c) $\overrightarrow{AB} = (-3, 0)$
 b) $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$ d) $\overrightarrow{AB} = (6, 2)$

037 ¿Cuántos vectores se pueden formar con los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 5)$ y $C(4, 4)$?
 Describelos y represéntalos.

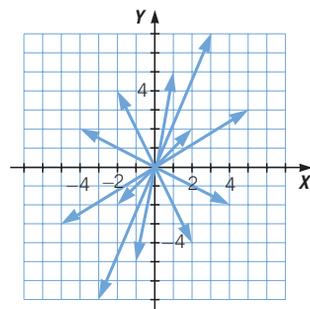
Se pueden formar 6 vectores:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2, 3) & \overrightarrow{BA} &= (-2, -3) \\ \overrightarrow{BC} &= (1, -1) & \overrightarrow{CB} &= (-1, 1) \\ \overrightarrow{CA} &= (-3, -2) & \overrightarrow{AC} &= (3, 2) \end{aligned}$$



038 ¿Cuántos vectores se pueden formar con los puntos $A(4, 1)$, $B(2, 5)$, $C(0, 3)$ y $D(-1, -2)$? Describelos y represéntalos.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-2, 4) & \overrightarrow{BA} &= (2, -4) \\ \overrightarrow{AC} &= (-4, 2) & \overrightarrow{CA} &= (4, -2) \\ \overrightarrow{AD} &= (-5, -3) & \overrightarrow{DA} &= (5, 3) \\ \overrightarrow{BC} &= (-2, -2) & \overrightarrow{CB} &= (2, 2) \\ \overrightarrow{BD} &= (-3, -7) & \overrightarrow{DB} &= (3, 7) \\ \overrightarrow{CD} &= (-1, -5) & \overrightarrow{DC} &= (1, 5) \end{aligned}$$



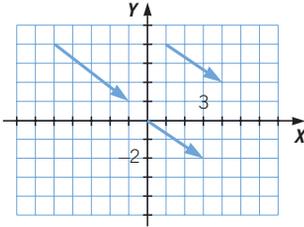
039 Calcula las coordenadas del punto A :

- a) Si $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ y $B(5, 2)$.
 - b) Si $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ y $B(1, 4)$.
 - c) Si $\overrightarrow{AB} = (-4, 1)$ y $B(-3, 3)$.
- a) $A = (6, -1)$ b) $A = (-1, 1)$ c) $A = (1, 2)$

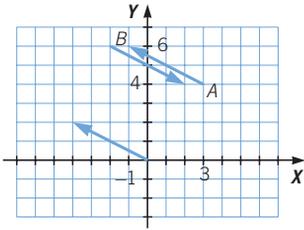
040 Calcula las coordenadas del punto B :

- a) Si $\overrightarrow{AB} = (0, 2)$ y $A(-3, 5)$.
 - b) Si $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$ y $A(4, 6)$.
 - c) Si $\overrightarrow{AB} = (2, 4)$ y $A(-2, 4)$.
- a) $B = (-3, 7)$ b) $B = (5, 6)$ c) $B = (0, 8)$

- 041 Dibuja dos vectores que tengan el mismo sentido que $\overrightarrow{AB} = (3, -2)$.

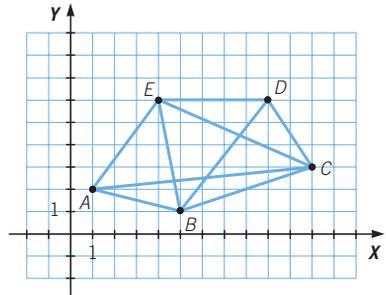


- 042 Dibuja dos vectores que tengan la misma dirección que \overrightarrow{AB} , siendo $A(3, 4)$ y $B(-1, 6)$.



- 043 Calcula las coordenadas de los vectores \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BE} y \overrightarrow{BD} en el siguiente gráfico.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= (11, 3) - (1, 2) = (10, 1) \\ \overrightarrow{BE} &= (4, 6) - (5, 1) = (-1, 5) \\ \overrightarrow{BD} &= (9, 6) - (5, 1) = (4, 5)\end{aligned}$$



- 044 Si los puntos $A(1, 1)$, $B(1, 3)$ y $C(7, 3)$ son vértices del paralelogramo $ABCD$, calcula.

- Las coordenadas de D .
- El vector \overrightarrow{BD} .

a) Por ser paralelogramo, tenemos que:

$$AB = CD, \text{ por lo que: } \overrightarrow{AB} = (0, 2) \rightarrow \overrightarrow{CD} = (0, 2) \rightarrow D = (7, 5).$$

- b) $\overrightarrow{BD} = (6, 2)$

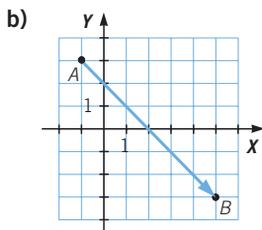
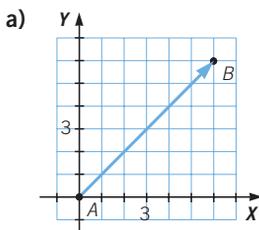
Vectores y rectas

045 Encuentra dos vectores que cumplan que:



- a) Tienen la misma dirección y sentido, siendo uno de ellos con origen en $(0, 0)$ y otro en $(2, 4)$.
- b) Tienen la misma dirección y sentido contrario.
- a) \vec{AB} con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y \vec{CD} con $C = (2, 4)$, $D = (4, 6)$.
- b) \vec{AB} con $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ y \vec{CD} con $C = (2, 4)$, $D = (0, 2)$.

046 Calcula el módulo de los vectores.



a) $|\vec{AB}| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$

b) $|\vec{AB}| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$

047 Obtén el módulo del vector \vec{AB} .



- a) $A(1, 1)$ y $B(2, 3)$
- b) $A(-4, 1)$ y $B(5, -2)$
- c) $A(3, -2)$ y $B(1, -1)$
- d) $A(-3, 0)$ y $B(0, 4)$

a) $|\vec{AB}| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

b) $|\vec{AB}| = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}$

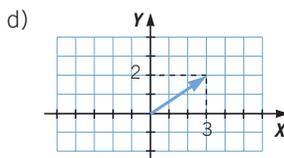
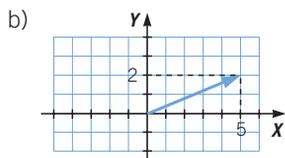
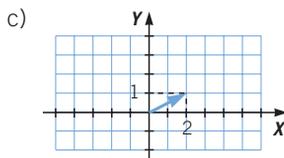
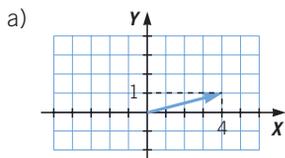
c) $|\vec{AB}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

d) $|\vec{AB}| = \sqrt{9 + 16} = 5$

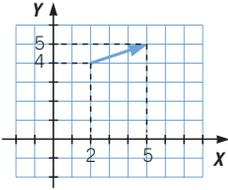
048 Dibuja un vector cuyo módulo sea:



- a) $\sqrt{17}$ b) $\sqrt{29}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{13}$

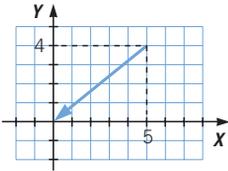


- 049** Dibuja un vector con origen en $(2, 4)$ y módulo $\sqrt{10}$. ¿Existe más de uno?
Razona la respuesta.



Existen infinitos vectores, tantos como direcciones y sentidos se pueden tomar.

- 050** Dibuja un vector con extremo en $(0, 0)$ y módulo $\sqrt{41}$. ¿Existe más de uno?
Razona la respuesta.



Existen infinitos vectores, tantos como direcciones y sentidos se pueden tomar.

- 051** Escribe dos vectores equivalentes y otros dos paralelos al vector \overrightarrow{AB} , siendo $A(-4, 3)$ y $B(1, -2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (5, -5)$$

Equivalentes:

$$C = (2, 8), D = (7, 3)$$

$$E = (1, 5), F = (6, 0)$$

Los vectores son \overrightarrow{CD} y \overrightarrow{EF} .

Paralelos:

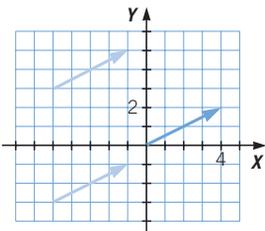
$$G = (0, -3), H = (-5, 2)$$

$$I = (3, -11), J = (13, 1)$$

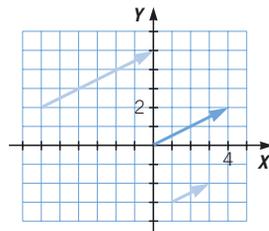
Los vectores son \overrightarrow{GH} e \overrightarrow{IJ} .

- 052** Dibuja dos vectores equivalentes a $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$ y otros dos paralelos, situados en diferentes cuadrantes.

Equivalentes:

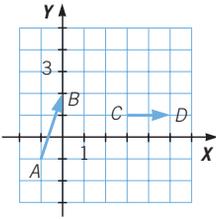


Paralelos:

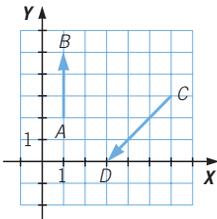


060 Obtén gráficamente la suma y la diferencia de los vectores \overline{AB} y \overline{CD} .

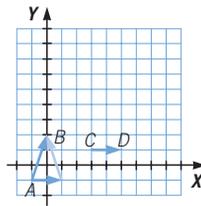
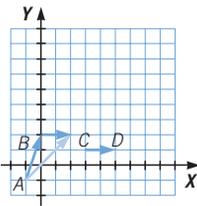
a)



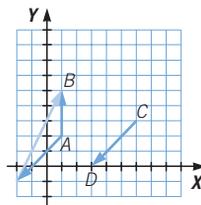
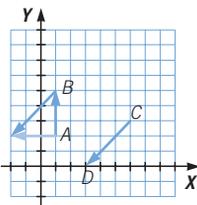
b)



a)



b)



061 Halla \vec{v} , si $\vec{u} = (5, 4)$ y $\vec{u} + \vec{v} = (2, 6)$.

$$\vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = (2, 6) - (5, 4) = (-3, 2)$$

062 Calcula \vec{v} , sabiendo que $\vec{u} = (-1, 6)$ y que $\vec{u} - \vec{v} = (3, -2)$.

$$\vec{v} = \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) = (-1, 6) - (3, -2) = (-4, 8)$$

063 Halla las coordenadas de los vectores \vec{u} y \vec{v} , si $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (3, 5)$.

$$2 \cdot \vec{u} = (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) = (1, 1) + (3, 5) = (4, 6) \rightarrow \vec{u} = (2, 3)$$

$$2 \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) = (1, 1) - (3, 5) = (-2, -4) \rightarrow \vec{v} = (-1, -2)$$

Vectores y rectas

064 Representa el vector $k\vec{u}$, con origen en $(0, 0)$, en estos casos.

a) $k = 4$ y $\vec{u} = (1, 2)$

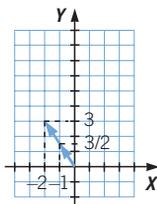
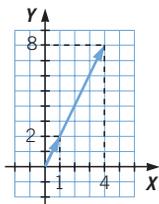
c) $k = \frac{1}{2}$ y $\vec{u} = (-2, 3)$

b) $k = -2$ y $\vec{u} = (-2, 3)$

d) $k = \frac{3}{5}$ y $\vec{u} = (10, 20)$

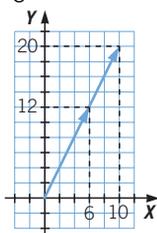
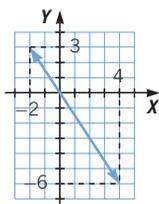
a) $4 \cdot \vec{u} = (4, 8)$

c) $\frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$



b) $-2 \cdot \vec{u} = (4, -6)$

d) $\frac{3}{5} \cdot \vec{u} = (6, 12)$



065 Sabiendo que $A(8, -3)$, $B(5, -1)$ y $C(4, 3)$, calcula los siguientes vectores.

a) $3 \cdot \vec{AB}$

c) $-2 \cdot \vec{CA}$

e) $\vec{BA} + 3 \cdot \vec{BC}$

b) $-5 \cdot \vec{BC}$

d) $4 \cdot \vec{AC}$

f) $\vec{AC} - 4 \cdot \vec{AB}$

a) $\vec{AB} = (-3, 2) \rightarrow 3 \cdot \vec{AB} = (-9, 6)$

b) $\vec{BC} = (-1, 4) \rightarrow -5 \cdot \vec{BC} = (5, -20)$

c) $\vec{CA} = (4, -6) \rightarrow -2 \cdot \vec{CA} = (-8, 12)$

d) $\vec{AC} = (-4, 6) \rightarrow 4 \cdot \vec{AC} = (-16, 24)$

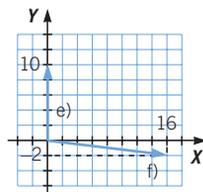
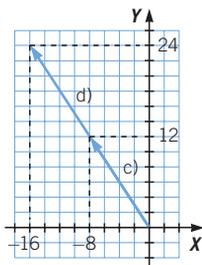
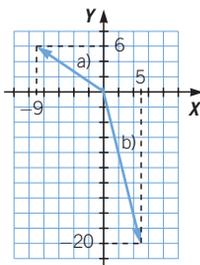
e) $\vec{BA} = (3, -2)$, $\vec{BC} = (-1, 4) \rightarrow \vec{BA} + 3 \cdot \vec{BC} = (3, -2) + (-3, 12) = (0, 10)$

f) $\vec{AC} = (-4, 6)$, $\vec{AB} = (-3, 2) \rightarrow \vec{AC} - 4 \cdot \vec{AB} = (-4, 6) - (-12, 8) = (8, -2)$

a) y b)

c) y d)

e) y f)



066 Halla el punto trasladado del punto $A(4, 5)$ por estos vectores.

a) $\vec{v} = (-2, 5)$

c) $\vec{v} = (1, -3)$

b) $\vec{v} = (0, 4)$

d) $\vec{v} = (-4, 0)$

a) $A' = A + \vec{v} = (2, 10)$

c) $A' = A + \vec{v} = (5, 2)$

b) $A' = A + \vec{v} = (4, 9)$

d) $A' = A + \vec{v} = (0, 5)$

067 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS?

Calcula la distancia entre dos puntos $A(-1, 3)$ y $B(2, -1)$.

La **distancia entre dos puntos** coincide con el módulo del vector que tiene como extremos esos puntos.

PRIMERO. Se calculan las coordenadas del vector \overline{AB} .

$$\overline{AB} = (2 - (-1), -1 - 3) = (3, -4)$$

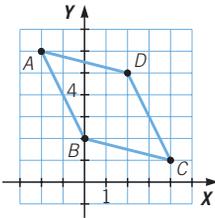
SEGUNDO. Se halla su módulo.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

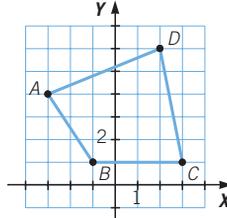
La distancia entre A y B es de 5 unidades.

068 Dadas las siguientes figuras, halla su perímetro.

a)



b)



a) $|\overline{AB}| = |(2, -4)| = \sqrt{20}$

$|\overline{BC}| = |(4, -1)| = \sqrt{17}$

$|\overline{CD}| = |(-2, 4)| = \sqrt{20}$

$|\overline{DA}| = |(-4, 1)| = \sqrt{17}$

$\rightarrow P = 2 \cdot (\sqrt{20} + \sqrt{17})$

b) $|\overline{AB}| = |(2, -3)| = \sqrt{13}$

$|\overline{BC}| = |(4, 0)| = 4$

$|\overline{CD}| = |(-1, 5)| = \sqrt{26}$

$|\overline{DA}| = |(-5, -2)| = \sqrt{29}$

$\rightarrow P = 4 + \sqrt{13} + \sqrt{26} + \sqrt{29}$

Vectores y rectas

069 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO?

Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(-2, 3)$ y $B(2, -1)$.

El **punto medio de un segmento** se calcula sumando al punto A la mitad del vector \overrightarrow{AB} .

PRIMERO. Se calculan las coordenadas del vector \overrightarrow{AB} .

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-2), -1 - 3) = (4, -4)$$

SEGUNDO. Se hallan las coordenadas del punto medio, sumando a A la mitad de \overrightarrow{AB} .

$$M = A + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \rightarrow (x, y) = (-2, 3) + \frac{1}{2} \cdot (4, -4) = (0, 1)$$

Las coordenadas del punto medio son $(0, 1)$.

070 ●●● **Calcula el punto medio del segmento AB , cuyos extremos son $A(1, 4)$ y $B(4, 3)$. Si al punto medio le llamamos M , calcula el punto medio de los segmentos AM y MB .**

$$M = A + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = (1, 4) + \frac{1}{2} \cdot (3, -1) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$M_1 = A + \frac{1}{2} \overrightarrow{AM} = (1, 4) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right)$$

$$M_1 = M + \frac{1}{2} \overrightarrow{MB} = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{13}{4}, \frac{13}{4}\right)$$

071 ●●● **Averigua las coordenadas del punto A , sabiendo que el punto medio del segmento AB es $M(5, 2)$ y el punto $B(7, -3)$.**

$$A = M + \overrightarrow{BM} = (5, 2) + (-2, 5) = (3, 7)$$

072 ●●● **Halla las coordenadas del punto B , si $A(-2, -1)$ y el punto medio es $M\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$.**

$$B = M + \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{9}{4}, \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 6\right)$$

073 ● **Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(5, 3)$ y $B(4, 7)$ en forma vectorial, paramétrica y continua.**

Vector director: $(-1, 4)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (5, 3) + t \cdot (-1, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\left. \begin{array}{l} x = 5 - t \\ y = 3 + 4t \end{array} \right\}$

Ecuación continua: $\frac{x - 5}{-1} = \frac{y - 3}{4}$

- 074** Obtén la ecuación de la recta, en forma implícita, que pasa por el punto $A(4, 1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (3, 1)$.

$A = -1$ y $B = 3$, la ecuación general es: $-x + 3y + C = 0$.

Como el punto $A(4, 1)$ pertenece a la recta, resulta:

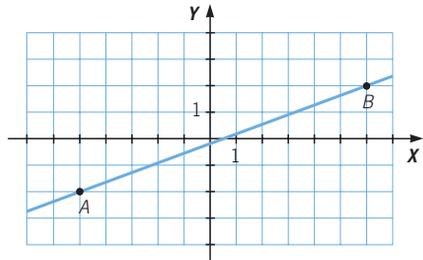
$$-4 + 3 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow C = 1$$

La ecuación general o implícita de la recta es: $-x + 3y + 1 = 0$.

- 075** Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0, 2)$ y tiene como vector director $(-2, 3)$, en forma explícita.

Ecuación explícita: $y = -\frac{3}{2}x + 2$

- 076** A partir de la representación de la siguiente recta, calcula sus ecuaciones de todas las formas posibles.



La recta pasa por los puntos $A(-5, -2)$ y $B(6, 2)$.

El vector director es $\vec{AB} = (11, 4)$.

Ecuación vectorial:

$$(x, y) = (-5, -2) + t \cdot (11, 4)$$

Ecuaciones paramétricas:
$$\left. \begin{aligned} x &= -5 + 11t \\ y &= -2 + 4t \end{aligned} \right\}$$

Ecuación continua:
$$\frac{x + 5}{11} = \frac{y + 2}{4}$$

Ecuación general o implícita: $4x - 11y - 2 = 0$

Ecuación explícita: $y = \frac{4}{11}x - \frac{2}{11}$

Ecuación punto-pendiente: $y + 2 = \frac{4}{11}(x + 5)$

- 077** Escribe la ecuación de estas rectas de todas las formas posibles.

a) $\left. \begin{aligned} x &= 2 - t \\ y &= 3 + 2t \end{aligned} \right\}$

c) $y = 3x - 1$

e) $2x + y - 5 = 0$

b) $(x, y) = (0, 3) + t \cdot (2, 1)$

d) $y - 3 = 3 \cdot (x - 5)$

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (2, 3) + t \cdot (-1, 2)$

Ecuaciones paramétricas:
$$\left. \begin{aligned} x &= 2 - t \\ y &= 3 + 2t \end{aligned} \right\}$$

Ecuación continua:
$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 3}{2}$$

Ecuación general o implícita: $2x + y - 7 = 0$

Ecuación explícita: $y = -2x + 7$

Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = -2(x - 2)$

Vectores y rectas

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 3) + t \cdot (2, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left. \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + t \end{array} \right\}$

Ecuación continua: $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1}$

Ecuación general o implícita: $x - 2y + 6 = 0$

Ecuación explícita: $y = \frac{1}{2}x + 3$

Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = \frac{1}{2}x$

c) Ecuación explícita: $y = 3x - 1$

Ecuación general o implícita: $3x - y - 1 = 0$

Ecuación continua: $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3}$

Ecuaciones paramétricas: $\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + 3t \end{array} \right\}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, -1) + t \cdot (1, 3)$

Ecuación punto-pendiente: $y + 1 = 3x$

d) Ecuación punto-pendiente: $y - 3 = 3 \cdot (x - 5)$

Ecuación explícita: $y = 3x - 12$

Ecuación general o implícita: $3x - y - 12 = 0$

Ecuación continua: $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{3}$

Ecuaciones paramétricas: $\left. \begin{array}{l} x = 5 + t \\ y = 3 + 3t \end{array} \right\}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (5, 3) + t \cdot (1, 3)$

e) Ecuación general o implícita: $2x + y - 5 = 0$

Ecuación continua: $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-2}$

Ecuaciones paramétricas: $\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = 5 - 2t \end{array} \right\}$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 5) + t \cdot (1, -2)$

Ecuación explícita: $y = -2x + 5$

Ecuación punto-pendiente: $y - 5 = -2x$

078 Obtén cuatro puntos que pertenezcan a la recta de ecuación:

● $(x, y) = (1, 3) + t \cdot (2, 2)$.

$t = 1 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) + 1 \cdot (2, 2) = (3, 5)$

$t = 2 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) + 2 \cdot (2, 2) = (5, 7)$

$t = -2 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) - 2 \cdot (2, 2) = (-3, -1)$

$t = -3 \longrightarrow (x, y) = (1, 3) - 3 \cdot (2, 2) = (-5, -3)$

079 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL PUNTO DE CORTE DE DOS RECTAS SECANTES?

Calcula el punto de corte de estas rectas.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-3}{2} &= \frac{y}{3} & x &= 2-3t \\ & & y &= 1+t \end{aligned} \right\}$$

PRIMERO. Se resuelve el sistema que plantean las dos ecuaciones de las rectas.

La segunda ecuación viene dada en forma paramétrica y, como están despejadas las variables x e y , se sustituyen esos valores en la primera ecuación.

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} \rightarrow \frac{2-3t-3}{2} = \frac{1+t}{3}$$

Se resuelve la ecuación que resulta.

$$3 \cdot (2-3t-3) = 2 \cdot (1+t)$$

$$6-9t-9 = 2+2t$$

$$11t = -5 \rightarrow t = \frac{-5}{11}$$

SEGUNDO. Se sustituye el valor de t en las ecuaciones paramétricas, donde x e y están despejadas.

$$x = 2 - 3 \cdot \frac{-5}{11} = \frac{37}{11}$$

$$y = 1 - \frac{5}{11} = \frac{6}{11}$$

TERCERO. Las coordenadas del punto de corte son la solución del sistema.

Luego el punto de corte es $P\left(\frac{37}{11}, \frac{6}{11}\right)$.

080 ●● Halla el punto de corte de estas rectas.

$$\left. \begin{aligned} r: \frac{x}{1} &= \frac{y-2}{2} & s: x &= 4-t \\ & & & y = t \end{aligned} \right\}$$

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

$$\frac{4-t}{1} = \frac{t-2}{2} \rightarrow 8-2t = t-2 \rightarrow t = \frac{10}{3}$$

$$x = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \quad y = \frac{10}{3}$$

El punto de corte es $P\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

Vectores y rectas

081

●●● **Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo, cuyos lados están contenidos en las rectas que vienen expresadas mediante estas ecuaciones.**

$$r: x - y - 1 = 0 \quad s: x + y + 2 = 0 \quad p: 3x - y + 2 = 0$$

Los vértices del triángulo son los puntos de intersección de las rectas:

$$\left. \begin{array}{l} r: x - y - 1 = 0 \\ s: x + y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad y = -\frac{3}{2}$$

Un vértice es el punto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} r: x - y - 1 = 0 \\ p: 3x - y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = 3x + 2 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\frac{3}{2} \quad y = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$$

Otro vértice es el punto de coordenadas $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} s: x + y + 2 = 0 \\ p: 3x - y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = -x - 2 \\ y = 3x + 2 \end{array} \right\} \rightarrow x = -1 \quad y = 1 - 2 = -1$$

Otro vértice es el punto de coordenadas $(-1, -1)$.

082

●● **Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero, cuyos lados están contenidos en las rectas que tienen por ecuación:**

$$\begin{array}{ll} r: 3x - 4y - 8 = 0 & p: 2x + y + 2 = 0 \\ s: x - 2y + 12 = 0 & q: 2x + y + 5 = 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} r: 3x - 4y - 8 = 0 \\ p: 2x + y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = 0 \quad y = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} r: 3x - 4y - 8 = 0 \\ q: 2x + y + 5 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\frac{12}{11} \quad y = -\frac{31}{11}$$

$$\left. \begin{array}{l} s: x - 2y + 12 = 0 \\ p: 2x + y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\frac{16}{5} \quad y = \frac{22}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} s: x - 2y + 12 = 0 \\ q: 2x + y + 5 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = -\frac{22}{5} \quad y = \frac{24}{5}$$

083

●● **¿Cuáles son las ecuaciones que corresponden a las rectas que forman los ejes de coordenadas? Razona si puedes escribirlas de todas las formas.**

- Eje de abscisas

$$\text{Ecuación vectorial: } (x, y) = (0, 0) + t \cdot (1, 0)$$

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{ Ecuación general: } y = 0$$

- Eje de ordenadas

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t \cdot (0, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \end{array} \right\}$ Ecuación general: $x = 0$

Ninguna de estas rectas se puede escribir en forma continua, porque ambas tienen algún componente de su vector director igual a cero.

084 Dos rectas tienen por ecuaciones:

$$r: y = 3x - 1$$

$$s: (x, y) = (1, 3) + t \cdot (-3, 2)$$

- Escribe las rectas en forma paramétrica.
- ¿Cuáles son sus vectores directores?
- Calcula cuatro puntos distintos de cada una de las rectas.
- Halla, si lo tienen, un punto común de ambas rectas.

a) $r: \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = 3t - 1 \end{array} \right\}$ $s: \left. \begin{array}{l} x = 1 - 3t \\ y = 3 + 2t \end{array} \right\}$

b) El vector director de r es $\vec{u} = (1, 3)$ y el vector director de s es $\vec{v} = (-3, 2)$.

c) Puntos de la recta r :

$$t = 1 \rightarrow (1, 2); t = 0 \rightarrow (0, -1); t = 2 \rightarrow (2, 5); t = -1 \rightarrow (-1, -4)$$

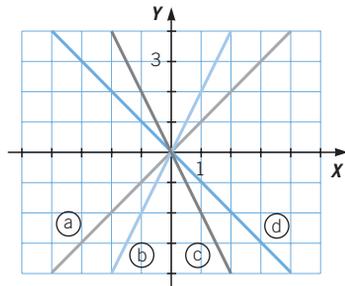
Puntos de la recta s :

$$t = 1 \rightarrow (-2, 5); t = -2 \rightarrow (7, -1); t = 0 \rightarrow (1, 3); t = -1 \rightarrow (4, 1)$$

d) $r: y = 3x - 1$
 $x: y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$ $\left. \right\} \rightarrow x = \frac{14}{11} \quad y = \frac{-31}{11}$

085 Las rectas que no tienen término independiente en su forma general, verifican la propiedad de que pasan todas por el origen de coordenadas.

Halla las ecuaciones explícita e implícita de estas rectas, y comprueba que se verifica la propiedad.



a) $y = x \rightarrow x - y = 0$

b) $y = 2x \rightarrow 2x - y = 0$

c) $y = -2x \rightarrow -2x - y = 0 \rightarrow 2x + y = 0$

d) $y = -x \rightarrow -x - y = 0 \rightarrow x + y = 0$

No hay término independiente y el punto $(0, 0)$ pertenece a todas las rectas.

Vectores y rectas

086 Estudia la posición de estas rectas en el plano.

$$r: 2x + 3y - 1 = 0$$

$$s: 3x - 4y + 4 = 0$$

El vector director de r es $(3, -2)$ y su pendiente es $m = -\frac{2}{3}$.

El vector director de s es $(-4, -3)$ y su pendiente es $m' = \frac{3}{4}$.

Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

087 Estudia la posición relativa en el plano de las siguientes parejas de rectas.

a) $r: 3x + y - 7 = 0$

$s: 3x + y + 5 = 0$

b) $r: x + y - 3 = 0$

$s: 2x + 2y - 6 = 0$

c) $r: x + 3y - 4 = 0$

$s: x + 2y + 5 = 0$

d) $r: -5x + 10y - 8 = 0$

$s: 10x - 20y + 16 = 0$

e) $r: -x + 2y - 1 = 0$

$s: 2 - x + 3y - 8 = 0$

f) $r: \frac{1}{2}x + y - 3 = 0$

$s: x - \frac{1}{5}y + 8 = 0$

a) El vector director de r y de s es $(1, -3)$. Los vectores directores son iguales, pero el punto $(0, 7)$ de r no pertenece a s : $3 \cdot 0 + 7 + 5 \neq 0$. Las rectas son paralelas.

b) El vector director de r es $(1, -1)$ y el de s es $(2, -2)$. Los vectores directores son proporcionales y también los coeficientes: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6}$. Las rectas son coincidentes.

c) El vector director de r es $(3, -1)$ y su pendiente es $m = -\frac{1}{3}$.
El vector director de s es $(2, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{2}$.
Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

d) El vector director de r es $(10, 5)$ y el de s es $(-20, -10)$.
Los vectores directores son proporcionales y también los coeficientes: $\frac{-5}{10} = \frac{10}{-20} = \frac{-8}{16}$. Las rectas son coincidentes.

e) El vector director de r es $(2, 1)$ y su pendiente es $m = \frac{1}{2}$.
El vector director de s es $(3, 1)$ y su pendiente es $m' = \frac{1}{3}$.
Las pendientes son distintas, y las rectas son secantes.

f) El vector director de r es $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ y su pendiente es $m = -\frac{1}{2}$.
El vector director de s es $\left(-\frac{1}{5}, -1\right)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{-\frac{1}{5}} = 5$.
Las pendientes son distintas, por lo que las rectas son secantes.

088 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas en el plano.

a) $r: (x, y) = (1, 3) + t \cdot (1, 2)$ $s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2}$

b) $r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases}$ $s: (x, y) = (2, 0) + t \cdot (2, -1)$

c) $r: \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ $s: \frac{x-8}{10} = \frac{y}{-4}$

d) $r: 2x - 3y = 0$ $s: (x, y) = t \cdot (1, -1)$

e) $r: \begin{cases} x = -2t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ $s: x + 3y - 2 = 0$

a) El vector director de r y s es $(1, 2)$. El punto $(1, 3)$ de r pertenece

a s: $\frac{1-2}{1} = \frac{3-5}{2}$. Las rectas son coincidentes.

b) El vector director de r es $(-1, 1)$ y su pendiente es $m = -1$.

El vector director de s es $(2, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{2}$.

Las pendientes son distintas, por lo que las rectas son secantes.

c) El vector director de r es $(5, -2)$ y el de s es $(10, -4)$. Los vectores directores son proporcionales. El punto $(3, 2)$ de r pertenece también a s :

$\frac{3-8}{10} = \frac{2}{-4}$. Las rectas son coincidentes.

d) El vector director de r es $(-3, -2)$ y su pendiente es $m = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$.

El vector director de s es $(1, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{1} = -1$.

Las pendientes son distintas, y las rectas son secantes.

e) El vector director de r es $(-2, 2)$ y su pendiente es $m = \frac{2}{-2} = -1$.

El vector director de s es $(3, -1)$ y su pendiente es $m' = \frac{-1}{3}$.

Las pendientes son distintas, luego las rectas son secantes.

089 Calcula las coordenadas del vértice A de un triángulo isósceles, cuyo lado desigual coincide con el segmento de extremos $B(3, 1)$ y $C(9, 3)$, y sabiendo que la altura sobre BC es de 4 cm.

El vértice $A = (x, y)$ está a la misma distancia de B y de C .

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (x-9)^2 + (y-3)^2 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 18x + 81 + y^2 - 6y + 9 \rightarrow 12x + 4y - 40 = 0 \rightarrow y = 10 - 3x$$

Por ser un triángulo isósceles, la base mide: $\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{20}$, y por el teorema de Pitágoras, la distancia de A a B y C es: $\overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16}$.

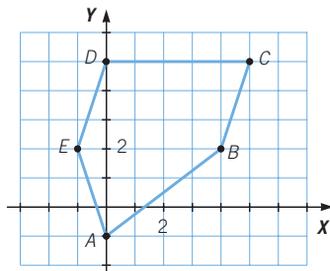
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 21 \frac{y=10-3x}{\rightarrow} 10x^2 - 120x + 349 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 7,05 \rightarrow y = -1,15 \\ x = 4,95 \rightarrow y = 5,15 \end{cases} \rightarrow A = (7,05; -1,15) \quad A = (4,95; 5,15)$$

Vectores y rectas

090

Halla la suma de los vectores que forman los lados AB , BC , CD , DE y EA del siguiente polígono.



¿Ocurre lo mismo en todos los polígonos?

La suma de los vectores es $(0, 0)$. Esto ocurre en todos los polígonos cerrados.

091

Si dos vectores \vec{u} y \vec{v} tienen distinta dirección y $a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{v}$, siendo a y b números reales, ¿qué puedes afirmar sobre los números a y b ?

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \quad \vec{v} = (v_1, v_2)$$

Por tener los vectores distinta dirección: $\frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}$

$$a \cdot \vec{u} = b \cdot \vec{v} \rightarrow (a \cdot u_1, a \cdot u_2) = (b \cdot v_1, b \cdot v_2) \rightarrow (a \cdot u_1 - b \cdot v_1, a \cdot u_2 - b \cdot v_2) = (0, 0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} a \cdot u_1 - b \cdot v_1 = 0 \\ a \cdot u_2 - b \cdot v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{b \cdot v_1}{u_1} \\ a = \frac{b \cdot v_2}{u_2} \end{cases} \rightarrow b \cdot \frac{v_1}{u_1} = b \cdot \frac{v_2}{u_2} \xrightarrow{\frac{v_1}{u_1} \neq \frac{v_2}{u_2}} b = 0 \rightarrow a = 0$$

Los números reales a y b son 0.

092

Utilizando vectores, demuestra que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

El punto de corte es el corte de las rectas $A + a \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ y $B + b \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = A + \vec{u} + b \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AD}$$

$$A + a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A + \vec{u} + b \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \rightarrow a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v} = (b + 1) \cdot \vec{u} - b \cdot \vec{v} \rightarrow (a + b) \cdot \vec{v} = (b + 1 - a) \cdot \vec{u}$$

Como \vec{u} y \vec{v} no son vectores paralelos:

$$a + b = 0 \rightarrow a = -b$$

$$b + 1 - a = 0 \xrightarrow{a = -b} 2b + 1 = 0 \rightarrow b = -\frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

El punto de corte es: $A + \frac{1}{2} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$, que es el punto medio.

093

Calcula la ecuación de la recta vertical que divide al triángulo, de vértices $A(0, 0)$, $B(2, 2)$ y $C(10, 2)$, en dos regiones con igual área.

Tomando como base el lado horizontal y como altura la distancia al eje X :

$$\text{Área} = \frac{(10 - 2) \cdot 2}{2} = 8$$

La ecuación de los lados que no forman la base es:
$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ y = \frac{x}{5} \end{array} \right\}$$

La base del nuevo triángulo es: $10 - a$.

La altura del nuevo triángulo es $2 - \frac{a}{5}$.

Por tanto, el área será:
$$4 = \frac{(10 - a) \cdot \left(2 - \frac{a}{5}\right)}{2} \rightarrow a = \begin{cases} 10 + 2\sqrt{10} \\ 10 - 2\sqrt{10} \end{cases}$$

La recta vertical es: $x = 10 - 2\sqrt{10}$.

EN LA VIDA COTIDIANA

094

Algunas especies de ballenas se encuentran en peligro de extinción.



Pedro es biólogo marino y forma parte de una de las plataformas en defensa de estos mamíferos. En su equipo de trabajo han decidido colocar localizadores en algunas de las crías para seguir sus desplazamientos y asegurarse de que no sufren ningún daño.



Vectores y rectas

Se le ha implantado uno de los localizadores a una hembra joven y se ha anotado su recorrido desde ese momento.



La ballena recorrió 2.500 millas hacia el Noroeste, después viajó 4.500 millas hacia el Oeste y, finalmente, 5.000 millas hacia el Norte.

- a) ¿Qué dirección debe tomar el barco del equipo de Pedro desde el punto inicial para volver a encontrar a la ballena?
- b) ¿Cuántas millas deberá recorrer?
- a) El barco debe tomar dirección Noroeste.
- b) $2.500 + \sqrt{(5.000)^2 + (4.500)^2} = 6.726,81$ millas

095

En el radar de la torre de control de un aeropuerto se ve, en un instante $t = 0$, la posición de tres aviones.



Transcurrida una unidad de tiempo, es decir, cuando $t = 1$, los aviones aparecen en el radar en las siguientes posiciones.



La torre de control informa a dos de los aviones de que tienen que cambiar su trayectoria o su velocidad para evitar una colisión.

- a) ¿Cuáles son los aviones que van a chocar?
 b) Si estuvieras en la torre de control, ¿qué órdenes darías a cada uno de los aviones para evitar un accidente?

a) Los aviones parten de los puntos A , B y C , para llegar a A' , B' y C' .

$$\text{Avión 1: } A = (-2, 4); A'(0, 3) \rightarrow \vec{u}_1 = (2, -1)$$

$$\text{La trayectoria que sigue es } A + t \cdot \vec{u}_1.$$

$$\text{Avión 2: } B = (-3, 1); B'(1, 1) \rightarrow \vec{u}_2 = (4, 0)$$

$$\text{La trayectoria que sigue es } B + t \cdot \vec{u}_2.$$

$$\text{Avión 3: } C = (1, -3); C'(4, 2) \rightarrow \vec{u}_3 = (3, 1)$$

$$\text{La trayectoria que sigue es } C + t \cdot \vec{u}_3.$$

Para que los aviones chocaran tendrían que llegar al mismo punto en el mismo momento.

Aviones 2 y 3:

$$B + t \cdot \vec{u}_2 = C + t \cdot \vec{u}_3 \rightarrow (-3, 1) + t \cdot (4, 0) = (1, -3) + t \cdot (3, 1)$$

$$\rightarrow (-2, 2) = t \cdot (-1, 1) \rightarrow t = 2$$

Los aviones 2 y 3 se chocarían para $t = 2$.

- b) Para que los aviones no se choquen es suficiente con indicarle a uno de ellos que cambie la trayectoria o modifique su velocidad.