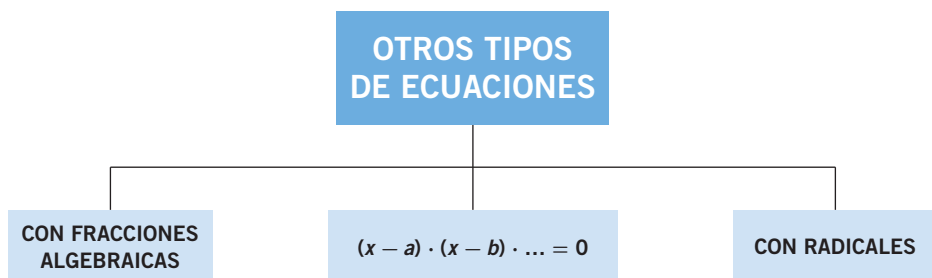
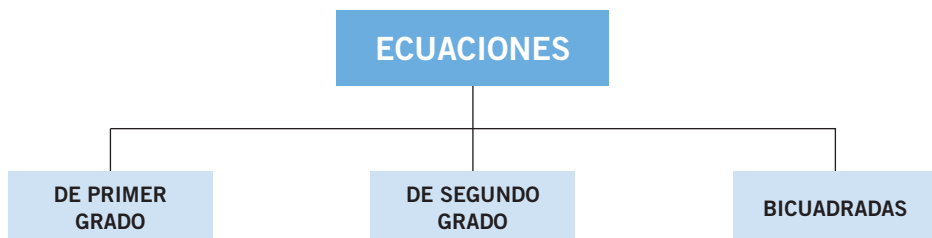


4

Ecuaciones e inecuaciones



INECUACIONES

La última noche

Durante un corto intervalo de tiempo la actividad del joven cesó, y en la pequeña habitación de la pensión donde vivía solo se escuchaba su agitada respiración, pues parecía que ni durmiendo descansaba.

El ruido producido por un carruaje sobre el empedrado de la calle hizo que primero entornara los ojos y después, como si hubiera sido poseído, tomó pluma y papel y comenzó a escribir.

Évariste Galois, presintiendo lo inevitable, escribió sus cartas con un carácter inequívoco de última voluntad, como si se dictara a sí mismo.

[...] Vuestra tarea es sencilla: demostrad que he de combatir contra mi voluntad, tras haber agotado todos los medios de reconciliación. [...] Por favor recordadme, ya que el destino no me ha dado vida bastante para ser recordado por mi patria.

Tras sellar esta primera carta, más tranquilo, comenzó a escribir la segunda:

[...] He hecho algunos descubrimientos nuevos en Matemáticas que puedes ver en tres memorias que dejo aquí... Haz llegar estos trabajos a la Academia de las Ciencias. [...] Confío en que después de leerlos alguien encuentre provecho en organizarlo todo. [...]

El premonitorio estado de ánimo de Galois estaba plenamente justificado: al amanecer sería herido de muerte en un duelo y moriría al día siguiente, abandonado por todos, en un hospital de París.

Pese a fallecer con tan solo veinte años, sus trabajos sobre ecuaciones fueron absolutamente geniales.

Escribe tres ecuaciones: una que no tenga solución, otra que tenga una solución y una tercera con más de una solución.

Sin solución $\longrightarrow x + 3 = x - 3$

Con una solución $\longrightarrow x + 3 = 0$

Con dos soluciones $\rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$



Ecuaciones e inecuaciones

EJERCICIOS

001 Indica los elementos de estas ecuaciones.

a) $(x + 2) - (x - 5) + 2 = 7 - x^2$ b) $x + (x - 1) - 9 = x + 4$

a) Incógnita: x

Miembros: $(x + 2) - (x - 5) + 2; 7 - x^2$

Grado: 2

b) Incógnita: x

Miembros: $x + (x - 1) - 9; x + 4$

Grado: 1

002 ¿Cuáles de los siguientes valores son solución

de la ecuación $\frac{x + 4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5 - x}{2}$?

a) $x = 1$ b) $x = 5$ c) $x = -2$ d) $x = 2$

La solución es la del apartado d) $x = 2$.

003 Comprueba si estas ecuaciones tienen la misma solución, es decir, si son ecuaciones equivalentes.

a) $3x - 2 = 7$ y $x - 3 = 0$ b) $x^2 - 9 = 0$ y $(x - 3)^2 = 0$

a) Tienen la misma solución, $x = 3$.

b) No son equivalentes, ya que tienen una solución común ($x = 3$), pero la otra no.

004 Escribe una ecuación que tenga como solución:

a) $x = 0$ b) $x = -1$ c) $x = \frac{1}{2}$

a) $x^2 - x = 0$

b) $3x - 5 = -8$

c) $2x - 1 = 0$

005 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $4x - 8 = 6x$

c) $x^2 + 14x + 49 = 0$

b) $x^2 + 7x + 12 = 0$

d) $5x^2 + 10x + 7 = 0$

a) $4x - 6x = 8 \rightarrow x = -4$

b) $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

c) $x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 49}}{2} = \frac{-14 \pm \sqrt{0}}{2} \rightarrow x_1 = x_2 = -7$

d) $x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 35}}{10} = \frac{-10 \pm \sqrt{-40}}{10} \rightarrow$ No tiene solución.

006 Opera y resuelve esta ecuación.

$$(x - 1) \cdot (x + 1) + 1 = 100$$

$$(x - 1) \cdot (x + 1) + 1 = 100 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$$

007 Encuentra una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 2 y -7.

$$(x - 2) \cdot (x + 7) = x^2 + 5x - 14 = 0$$

008 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $7x^2 - 12 = 0$

b) $2x^2 - 32 = 0$

c) $2x^2 = 0$

a) $x_1 = \sqrt{\frac{12}{7}}$

$x_2 = -\sqrt{\frac{12}{7}}$

b) $x_1 = 4$

$x_2 = -4$

c) $x_1 = x_2 = 0$

009 Determina el número de soluciones que tienen estas ecuaciones.

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$

b) $x^2 - 5x + 8 = 0$

a) $\Delta = 100 - 4 \cdot 25 = 0 \rightarrow$ Una solución

b) $\Delta = 25 - 32 < 0 \rightarrow$ Ninguna solución

010 Halla el valor de a en estas ecuaciones para que tengan dos soluciones.

a) $ax^2 - 2x + 2 = 0$

b) $-x^2 + ax - 1 = 0$

a) $\Delta = 4 - 8a > 0 \rightarrow a < \frac{1}{2}$

b) $\Delta = a^2 - 4 > 0 \rightarrow |a| > 2 \rightarrow a > 2 \text{ o } a < -2$

011 Escribe dos ecuaciones de segundo grado cuya única solución sea -2.

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$2x^2 + 8x + 8 = 0$$

Ecuaciones e inecuaciones

012 Calcula las soluciones de estas ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 + 7x^2 - 3 = 0$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

d) $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0$

a) $x^4 + 7x^2 - 3 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 7z - 3 = 0$

$$z = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 12}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-7 + \sqrt{61}}{2} \xrightarrow{z=x^2} x = \pm \sqrt{\frac{-7 + \sqrt{61}}{2}} \\ z_2 = \frac{-7 - \sqrt{61}}{2} \xrightarrow{z=x^2} \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

b) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 36z^2 - 13z + 1 = 0$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{72} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{18}{42} = \frac{1}{4} \xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ z_2 = \frac{8}{72} = \frac{1}{9} \xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{1}{9} \rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1}{3} \\ x_4 = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 4 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2 \\ z_2 = 1 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_3 = 1, x_4 = -1 \end{cases}$$

d) $2x^4 - 6x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} 2z^2 - 6z + 4 = 0$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 2 \rightarrow x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2} \\ z_2 = 1 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_3 = 1, x_4 = -1 \end{cases}$$

013 Opera y resuelve.

$$(x^3 + x) \cdot x - 1 = 0$$

$$(x^3 + x) \cdot x - 1 = 0 \rightarrow x^4 + x^2 - 1 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + z - 1 = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \\ z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

014 Escribe una ecuación bicuadrada que tenga como soluciones 0 y 1.

$$x^4 - x^2 = 0$$

015 Resuelve estas ecuaciones.

a) $\frac{x}{x-2} + 2x = 1$

c) $(x+1) \cdot (x-7) \cdot (x+4) = 0$

b) $\frac{x+2}{x-3} + \frac{3 \cdot (x+6)}{x} = \frac{1}{x}$

d) $(x-3) \cdot (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 + 5) = 0$

a) $\frac{x}{x-2} + 2x = 1 \rightarrow \frac{x}{x-2} + \frac{2x^2 - 4x}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} \rightarrow$
 $\rightarrow 2x^2 - 3x = x-2 \rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{4} \rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

b) $\frac{x+2}{x-3} + \frac{3 \cdot (x+6)}{x} = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x^2 + 2x}{x \cdot (x-3)} + \frac{3x^2 + 9x - 54}{x \cdot (x-3)} = \frac{x-3}{x \cdot (x-3)}$
 $\rightarrow 4x^2 + 11x - 54 = x - 3$
 $\rightarrow 4x^2 + 10x - 51 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 816}}{8} = \frac{-10 \pm \sqrt{916}}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-10 + \sqrt{916}}{8} \\ x_2 = \frac{-10 - \sqrt{916}}{8} \end{cases}$$

c) $x+1=0 \rightarrow x_1 = -1$
 $x-7=0 \rightarrow x_2 = 7$
 $x+4=0 \rightarrow x_3 = -4$

d) $x-3=0 \rightarrow x_1 = 3$
 $x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x_2 = x_3 = -1$
 $x^2 + 5 = 0 \rightarrow$ No tiene solución.

016 Resuelve.

a) $\frac{1}{x-3} - \frac{x}{(x-3)^2} = \frac{-3}{49}$

b) $x^2 \cdot (x+1)^2 = 0$

a) $\frac{1}{x-3} - \frac{x}{(x-3)^2} = \frac{-3}{49} \rightarrow \frac{49x - 147}{49 \cdot (x-3)^2} - \frac{49x}{49 \cdot (x-3)^2} = \frac{(x-3)^2}{49 \cdot (x-3)^2}$
 $\rightarrow 147 = x^2 - 6x + 9 \rightarrow$
 $\rightarrow x^2 - 6x - 138 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{588}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{588}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6 + \sqrt{588}}{2} \\ x_2 = \frac{6 - \sqrt{588}}{2} \end{cases}$$

b) $x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$
 $(x+1)^2 = 0 \rightarrow x_3 = x_4 = -1$

Ecuaciones e inecuaciones

017 Escribe una ecuación que tenga como soluciones -2 , -1 , 0 y 6 .

$$x \cdot (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 6) = x^4 - 3x^3 - 16x^2 - 12x = 0$$

018 Razona cuáles de los valores son solución de la ecuación $\sqrt{2x + 6} = 3x + 5$.

- a) $x = 2$ c) $x = 4$
b) $x = -1$ d) $x = -3$

La solución es la del apartado b) $x = -1$.

019 Resuelve las ecuaciones.

a) $\sqrt{9 + x} = x - 11$

b) $x - \sqrt{x} = 6$

a) $\sqrt{9 + x} = x - 11 \rightarrow 9 + x = x^2 - 22x + 121 \rightarrow x^2 - 23x + 112 = 0$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 448}}{2} = \frac{23 \pm \sqrt{81}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{23 + 9}{2} = 16 \\ x_2 = \frac{23 - 9}{2} = 7 \end{cases}$$

b) $x - \sqrt{x} = 6 \rightarrow x - 6 = \sqrt{x} \rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \rightarrow$
 $\rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13 + 5}{2} = 9 \\ x_2 = \frac{13 - 5}{2} = 4 \end{cases}$$

020 Resuelve.

a) $\sqrt{x + 7} = \sqrt{x} + 1$

b) $\sqrt{x^2 - 2x} + x = \sqrt{x}$

a) $\sqrt{x + 7} = \sqrt{x} + 1 \rightarrow x + 7 = x + 1 + 2\sqrt{x} \rightarrow 3 = \sqrt{x} \rightarrow x = 9$

b) $\sqrt{x^2 - 2x} + x = \sqrt{x} \rightarrow x^2 - 2x + x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 2x} = x$

$$\rightarrow 2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 2x} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^4 + 9x^2 - 12x^3 = 4x^2 \cdot (x^2 - 2x)$$

$$\rightarrow 9x^2 - 4x^3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 \cdot (9 - 4x) = 0$$

$$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$9 - 4x = 0 \rightarrow x_3 = \frac{9}{4}$$

021 Escribe una ecuación con radicales que tenga como solución $x = 2$.

$$\sqrt{x+2} - 3x = -4$$

022 Transforma cada inecuación, realizando la operación que se indica.

- a) Suma 2 a $4x < 3$.
 b) Resta 5 a $x - 4 > 3x + 2$.
 c) Multiplica $2x + 1 \leq x - 3$ por 4.
 d) Divide $5x + 6 \geq x$ entre -3 .
 e) Divide $-40x + 16 < 2$ entre 4.

- a) $4x + 2 < 5$
 b) $x - 9 > 3x - 3$
 c) $8x + 4 \leq 4x - 12$
 d) $\frac{5x + 6}{-3} \leq \frac{x}{-3}$
 e) $-10x + 4 < \frac{1}{2}$

023 Determina tres soluciones en cada caso.

- a) $x - 4 \leq 3$
 b) $2x + 2 > 0$
 c) $\frac{x}{2} + 1 < -2$
 d) $x^2 + 1 \geq 1$

- a) $x \leq 7 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -6$
 b) $x > -1 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 5$
 c) $x < -6 \rightarrow x_1 = -12, x_2 = -20, x_3 = -61$
 d) $x^2 \geq 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -6$

024 Escribe dos inecuaciones que tengan como solución $x = 0$.

$$7x < 5$$

$$3x - 8 > -34$$

025 Resuelve estas inecuaciones.

- a) $2x - 3x + 5 > 6x - 1$ b) $7 - 2x < -4$

- a) $2x - 3x - 6x > -1 - 5 \rightarrow -7x > -6 \rightarrow x < \frac{6}{7}$
 b) $-2x < -11 \rightarrow x > \frac{11}{2}$

Ecuaciones e inecuaciones

026 Calcule la solución de las siguientes inecuaciones.

a) $x^2 \leq 3x$ b) $2x^2 > 4x$ c) $3x^2 < 3$ d) $-4x^2 \geq -36$

a) $x^2 \leq 3x \rightarrow x \cdot (x - 3) \leq 0$

$x \cdot (x - 3) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

La solución es el intervalo $[0, 3]$.

b) $2x^2 > 4x \rightarrow 2x \cdot (x - 4) > 0$

$2x \cdot (x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$

La solución es los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(4, +\infty)$.

c) $3x^2 < 3 \rightarrow 3(x^2 - 1) < 0$

$3 \cdot (x^2 - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$

La solución es el intervalo $(-1, 1)$.

d) $-4x^2 \geq -36 \rightarrow 4 \cdot (x^2 - 9) \leq 0$

$4 \cdot (x^2 - 9) = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3$

La solución es el intervalo $[-3, 3]$.

027 Resuelve estas inecuaciones.

a) $4x - 2 \cdot (x + 1) \leq 0$

c) $x^2 - 3x \geq 4$

b) $x + 4 \cdot (3 - x) < 15$

d) $3x - 2x^2 < x + x^2$

a) $4x - 2 \cdot (x + 1) \leq 0 \rightarrow 2x - 2 \leq 0 \rightarrow x \leq 1$

b) $x + 4 \cdot (3 - x) < 15 \rightarrow x + 12 - 4x < 15 \rightarrow -3x < 3 \rightarrow x > -1$

c) $x^2 - 3x \geq 4 \rightarrow x^2 - 3x - 4 \geq 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = -1$

La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[4, +\infty)$.

d) $3x - 2x^2 < x + x^2 \rightarrow 2x - 3x^2 < 0$

$2x - 3x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$

La solución es los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(\frac{2}{3}, +\infty)$.

028 Escribe una inecuación cuya solución sea el intervalo $[2, +\infty)$.

$x - 5 \geq -3$

EJERCICIOS

029 Identifica los elementos de cada ecuación, y completa la tabla en tu cuaderno.

| Ecuación | 1.º miembro | 2.º miembro | Incógnita | Grado |
|-------------------------------------|---------------------------------|-------------|-----------|-------|
| $x \cdot (x + 1) = 2$ | $x \cdot (x + 1)$ | 2 | x | 2 |
| $\frac{x}{3} - \frac{x + 4}{9} = 0$ | $\frac{x}{3} - \frac{x + 4}{9}$ | 0 | x | 1 |
| $(x - 2)^2 = x^2$ | $(x - 2)^2$ | x^2 | x | 2 |
| $4x - (2x - 5) = 11$ | $4x - (2x - 5)$ | 11 | x | 1 |
| $3x + 2y = 1$ | $3x + 2y$ | 1 | x, y | 1 |

030 Relaciona cada ecuación con sus soluciones.

- a) $6x - 2 = x + 8$ 1) $x = -3$
- b) $(x + 3)^2 = 0$ 2) $x = -4$
- c) $(x - 2) \cdot (x + 4) = 0$ 3) $x = 2$
- d) $x^2 + 8x = 0$ 4) $x = 0$
- e) $\frac{x + 1}{5} - \frac{x}{2} = \frac{7}{5}$ 5) $x = -8$

a) $\rightarrow 3)$ b) $\rightarrow 1)$ c) $\rightarrow 2)$ y 3) d) $\rightarrow 4)$ y 5) e) $\rightarrow 2)$

031 Escribe una ecuación que cumpla estas condiciones.

- a) De grado 1 y con solución $x = 5$.
- b) De grado 1, con paréntesis y fracciones.
- c) De grado 2 y producto de dos factores.
- d) De grado 2 y una de las soluciones $x = 0$.

- a) $2x - 10 = 0$ c) $(x - 2) \cdot (x + 3) - 2 = 0$
- b) $3 \cdot (x - 5) - \frac{x + 1}{2} = 8 - x$ d) $x^2 - 3x = 0$

032 Resuelve las siguientes ecuaciones.

- a) $2 + 3 \cdot (2x + 1) - 8 - 3 \cdot (x + 4) = 6$
- b) $6x - 5 \cdot (4 - 2x) = (4 - x) \cdot 5 + 2$
- c) $3x + 4 \cdot (-x - 6) = 5x - 6 \cdot (-x + 1)$
- d) $3 \cdot (x + 5) - x = (2x + 3) \cdot 4 + x$
- e) $\frac{x}{4} + 3 - \frac{x + 3}{2} = 1$
- f) $\frac{1}{8} \cdot (2x + 4) - \frac{2}{3} \cdot (2x + 6) + x = -4$
- g) $\frac{x - 2}{3} - \frac{x - 3}{2} = \frac{4 - 2x}{5}$
- h) $\frac{3x + 7}{2} - \frac{1 - 4x}{4} = \frac{1 - x}{6} - \frac{9 + x}{3}$

a) $2 + 6x + 3 - 8 - 3x - 12 = 6 \rightarrow 3x = 21 \rightarrow x = 7$

b) $6x - 20 + 10x = 20 - 5x + 2 \rightarrow 21x = 42 \rightarrow x = 2$

c) $3x - 4x - 24 = 5x + 6x - 6 \rightarrow -12x = 18 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

d) $3x + 15 - x = 8x + 12 + x \rightarrow -7x = -3 \rightarrow x = \frac{3}{7}$

e) $\frac{x + 12 - 2x - 6}{4} = \frac{4}{4} \rightarrow -x = -2 \rightarrow x = 2$

f) $\frac{6x + 12 - 32x - 96 + 24x}{24} = \frac{-96}{4} \rightarrow -2x = -12 \rightarrow x = 6$

g) $\frac{10x - 20 - 15x + 45}{30} = \frac{24 - 12x}{30} \rightarrow 7x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{7}$

h) $\frac{18x + 42 - 3 + 12x}{12} = \frac{2 - 2x - 36 - 4x}{12} \rightarrow 36x = -73 \rightarrow x = -\frac{73}{36}$

Ecuaciones e inecuaciones

033

Escribe una ecuación de primer grado cuya solución sea:



a) $x = -3$

c) $x = 4$

e) $x = -10$

g) $x = 2,5$

b) $x = \frac{1}{5}$

d) $x = \frac{2}{5}$

f) $x = \frac{-3}{4}$

h) Sin solución

a) $2x + 6 = 0$

c) $3x - 12 = 0$

e) $3x + 50 = 20$

g) $2x - 5 = 0$

b) $10x = 2$

d) $10x - 2 = 2$

f) $4x + 2 = -1$

h) $x + 1 = x - 2$

034

Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.



a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

e) $x^2 + 15 = 8x$

i) $2x^2 + 7x = 3$

b) $x^2 = 4x - 3$

f) $x^2 - x = 30$

j) $x^2 = x - 3$

c) $x^2 - 2x = 3$

g) $8x^2 = 15 - 2x$

d) $x^2 + 3x - 2 = 0$

h) $x^2 + 3x - 1 = 0$

a) $x_1 = 3, x_2 = 2$

h) $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$

b) $x_1 = 3, x_2 = 1$

$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$

c) $x_1 = 3, x_2 = -1$

d) $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$

i) $x_1 = \frac{-7 + \sqrt{73}}{4}$

e) $x_1 = 5, x_2 = 3$

$x_2 = \frac{-7 - \sqrt{73}}{4}$

f) $x_1 = 6, x_2 = -5$

g) $x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{-3}{2}$

j) No tiene solución.

035

HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN ECUACIONES CUYOS COEFICIENTES SON MÚLTIPLOS DE UN MISMO NÚMERO?

Fíjate en los coeficientes de esta ecuación y resuélvela.

$$12x^2 - 4x - 8 = 0$$

PRIMERO. Cuando todos los coeficientes son múltiplos del mismo número, se calcula el máximo común divisor y se extrae factor común en la ecuación.

$$\text{m.c.d.}(12, 4, 8) = 4 \rightarrow 4 \cdot (3x^2 - x - 2) = 0$$

SEGUNDO. Se dividen los dos miembros de la ecuación entre el máximo común divisor.

$$\frac{4 \cdot (3x^2 - x - 2)}{4} = \frac{0}{4} \rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$$

TERCERO. Se resuelve la ecuación equivalente resultante.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

036 Resuelve, sacando factor común.

●● a) $5x^2 + 10x + 5 = 0$

b) $6x^2 + 24x + 18 = 0$

c) $32x^2 - 80x + 18 = 0$

d) $-100x^2 + 275x + 75 = 0$

e) $-120x^2 + 300x + 720 = 0$

a) $5x^2 + 10x + 5 = 0 \rightarrow 5(x^2 + 2x + 1) = 0$

$x_1 = x_2 = -1$

b) $6x^2 + 24x + 18 = 0 \rightarrow 6(x^2 + 4x + 3) = 0$

$x_1 = -1, x_2 = -3$

c) $32x^2 - 80x + 18 = 0 \rightarrow 2(16x^2 - 40x + 9) = 0$

$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{9}{4}$

d) $-100x^2 + 275x + 75 = 0 \rightarrow -25(4x^2 - 11x - 3) = 0$

$x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = 3$

e) $-120x^2 + 300x + 720 = 0 \rightarrow 2x^2 - 5x - 12 = 0$

$x_1 = 4, x_2 = -\frac{3}{2}$

037 Resuelve las siguientes ecuaciones.

●● a) $x^2 + 6x = 0$

d) $-x^2 + 4x = 0$

b) $3x^2 = 12x$

e) $8x^2 - 6x = 0$

c) $5x = 10x^2$

f) $7x = 23x^2$

a) $x_1 = 0, x_2 = -6$

d) $x_1 = 0, x_2 = 4$

b) $x_1 = 0, x_2 = 4$

e) $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4}$

c) $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$

f) $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{23}$

038 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.

● a) $25x^2 - 4 = 0$

d) $-3x^2 = -48$

b) $-8x^2 = -18$

e) $5x^2 = 100$

c) $2x^2 - 18 = 0$

f) $4x^2 - 144 = 0$

a) $x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = -\frac{2}{5}$

d) $x_1 = 4, x_2 = -4$

b) $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$

e) $x_1 = \sqrt{20}, x_2 = -\sqrt{20}$

c) $x_1 = 3, x_2 = -3$

f) $x_1 = 6, x_2 = -6$

Ecuaciones e inecuaciones

039 Indica el número de soluciones de las ecuaciones sin resolverlas.

- a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ e) $x^2 - 4x + 4 = 0$
 - b) $x^2 + x - 2 = 0$ f) $x^2 - 3x + 2 = 0$
 - c) $x^2 + 5x + 7 = 0$ g) $3x^2 + x - 1 = 0$
 - d) $4x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $-x^2 + 3x - 8 = 0$
- a) $\Delta = 0 \rightarrow$ Una solución e) $\Delta = 0 \rightarrow$ Una solución
 b) $\Delta = 9 > 0 \rightarrow$ Dos soluciones f) $\Delta = 1 > 0 \rightarrow$ Dos soluciones
 c) $\Delta = -3 < 0 \rightarrow$ Sin solución g) $\Delta = 13 > 0 \rightarrow$ Dos soluciones
 d) $\Delta = -71 < 0 \rightarrow$ Sin solución h) $\Delta = -23 < 0 \rightarrow$ Sin solución

040 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas y comprueba la solución.

- a) $x^4 + 2x^2 - 48 = 0$ e) $x^4 + 8x^2 + 15 = 0$
 - b) $x^4 - 9x^2 = 0$ f) $x^4 + 3x^2 = 18$
 - c) $x^4 - 16 = 0$ g) $x^4 - x^2 = 20$
 - d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ h) $x^4 + 12 = 7x^2$
- a) $x^4 + 2x^2 - 48 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 2z - 48 = 0$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 6 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 6 \rightarrow x_1 = \sqrt{6} \\ \phantom{\xrightarrow{z=x^2}} \phantom{\sqrt{6}}} \\ \phantom{\xrightarrow{z=x^2}} \phantom{\sqrt{6}}} \\ z_2 = -8 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -8 \rightarrow \text{No tiene solución.} \\ \phantom{\xrightarrow{z=x^2}} \phantom{\sqrt{6}}} \\ \phantom{\xrightarrow{z=x^2}} \phantom{\sqrt{6}}} \end{cases}$$
- b) $x^4 - 9x^2 = 0 \rightarrow x^2 \cdot (x^2 - 9) = 0$
 $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = -3$
- c) $x^4 - 16 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 16 = 0$
 $z_1 = 4 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$
 $z_2 = -4 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -4 \rightarrow$ No tiene solución.
- d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 10z + 9 = 0$

$$z_1 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 9 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 9 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3 \\ z_2 = 1 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_3 = 1, x_4 = -1 \end{cases}$$
- e) $x^4 + 8x^2 + 15 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 8z + 15 = 0$
 $z_1 = -3 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -3 \rightarrow$ No tiene solución.
 $z_2 = -5 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -5 \rightarrow$ No tiene solución.
- f) $x^4 + 3x^2 - 18 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 3z - 18 = 0$
 $z_1 = 3 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 3 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$
 $z_2 = -6 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -6 \rightarrow$ No tiene solución.

$$\begin{aligned} \text{g) } x^4 - x^2 - 20 &= 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - z - 20 = 0 \\ z_1 &= 5 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 5 \rightarrow x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5} \\ z_2 &= -4 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = -4 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } x^4 - 7x^2 + 12 &= 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 7z + 12 = 0 \\ z_1 &= 4 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2 \\ z_2 &= 3 \xrightarrow{z=x^2} x^2 = 3 \rightarrow x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

041 Resuelve las ecuaciones mediante la regla que afirma que «el producto de extremos es igual al producto de medios».

a) $\frac{x+8}{6-x} = 13$

b) $\frac{x-2}{3-x} = -\frac{5}{4}$

c) $\frac{2x+1}{3x-6} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{6x+1}{2x-3} = \frac{11}{7}$

a) $x+8 = 13 \cdot (6-x) \rightarrow 14x = 70 \rightarrow x = 5$

b) $4 \cdot (x-2) = -5 \cdot (3-x) \rightarrow -x = -7 \rightarrow x = 7$

c) $2 \cdot (2x+1) = 3 \cdot (3x-6) \rightarrow -5x = -20 \rightarrow x = 4$

d) $7 \cdot (6x+1) = 11 \cdot (2x-3) \rightarrow 20x = -40 \rightarrow x = -2$

042 Resuelve.

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{12}$

b) $\frac{3-x}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = -2$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{12 \cdot (x+1)}{12 \cdot (x^2-1)} + \frac{12 \cdot (x-1)}{12 \cdot (x^2-1)} &= \frac{5 \cdot (x^2-1)}{12 \cdot (x^2-1)} \\ &\rightarrow 12x + 12 + 12x - 12 = 5x^2 - 5 \\ &\rightarrow 5x^2 - 24x - 5 = 0 \rightarrow x_1 = 5, x_2 = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{(3-x) \cdot (x-2)}{x^2-4} - \frac{(x+2) \cdot (x-1)}{x^2-4} &= \frac{-2 \cdot (x^2-4)}{x^2-4} \\ &\rightarrow -x^2 + 5x - 6 - x^2 - x + 2 = -2x^2 + 8 \\ &\rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Ecuaciones e inecuaciones

043

Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{10}$

d) $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2} = 3$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{5}{16}$

e) $\frac{-2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{9}{16}$

c) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{5}{4}$

f) $\frac{5}{x^2-1} - \frac{10}{x+1} = \frac{-5}{3}$

a) $\frac{10}{10x} + \frac{5}{10x} = \frac{3x}{10x} \rightarrow 15 = 3x \rightarrow x = 5$

b) $\frac{16x}{16x^2} + \frac{16}{16x^2} = \frac{5x^2}{16x^2} \rightarrow 5x^2 - 16x - 16 = 0$
 $\rightarrow x_1 = 4, x_2 = \frac{-4}{5}$

c) $\frac{4 \cdot (x-1)}{4 \cdot (x^2-1)} + \frac{8 \cdot (x+1)}{4 \cdot (x^2-1)} = \frac{5 \cdot (x^2-1)}{4 \cdot (x^2-1)}$
 $\rightarrow 4x - 4 + 8x + 8 = 5x^2 - 5 \rightarrow 5x^2 - 12x - 9 = 0 \rightarrow x_1 = 3, x_2 = \frac{-3}{5}$

d) $\frac{3 \cdot (x+2)}{x^2-4} + \frac{4 \cdot (x-2)}{x^2-4} = \frac{3 \cdot (x^2-4)}{x^2-4}$
 $\rightarrow 3x + 6 + 4x - 8 = 3x^2 - 12$
 $\rightarrow 3x^2 - 7x - 10 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = -1$

e) $\frac{-32 \cdot (x-2)}{16 \cdot (x-2)^2} + \frac{16}{16 \cdot (x-2)^2} = \frac{9 \cdot (x-2)^2}{16 \cdot (x-2)^2}$
 $\rightarrow -32x + 64 + 16 = 9x^2 - 36x + 36$
 $\rightarrow 9x^2 - 4x - 44 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{22}{9}, x_2 = -2$

f) $\frac{15}{3 \cdot (x^2-1)} - \frac{30 \cdot (x-1)}{3 \cdot (x^2-1)} = \frac{-5 \cdot (x^2-1)}{3 \cdot (x^2-1)}$
 $\rightarrow 15 - 30x + 30 = -5x^2 + 5$
 $\rightarrow 5x^2 - 30x + 40 = 0 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2$

044

Resuelve las ecuaciones.

a) $(x-8) \cdot (8x-1) = 0$

b) $(3x-5) \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right) = 0$

c) $(-x+7) \cdot (3-4x) = 0$

d) $(-4+x) \cdot (5-x) = 0$

e) $(7-2x) \cdot (4x-2) = 0$

f) $(3x-9) \cdot (10-5x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{a) } x - 8 = 0 &\rightarrow x_1 = 8 \\ 8x - 1 = 0 &\rightarrow x_2 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x - 5 = 0 &\rightarrow x_1 = \frac{5}{3} \\ x - \frac{1}{5} = 0 &\rightarrow x_2 = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -x + 7 = 0 &\rightarrow x_1 = 7 \\ 3 - 4x = 0 &\rightarrow x_2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -4 + x = 0 &\rightarrow x_1 = 4 \\ 5 - x = 0 &\rightarrow x_2 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 7 - 2x = 0 &\rightarrow x_1 = \frac{7}{2} \\ 4x - 2 = 0 &\rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 3x - 9 = 0 &\rightarrow x_1 = 3 \\ 10 - 5x = 0 &\rightarrow x_2 = 2 \end{aligned}$$

045 Calcula la solución de las siguientes ecuaciones.

$$\text{a) } x^2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)^2 = 0$$

$$\text{b) } (x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2 = 0$$

$$\text{c) } x(x - 4)^2 \cdot (x + 3)^2 = 0$$

$$\text{d) } (x^2 - 1)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{a) } x^2 = 0 &\rightarrow x_1 = x_2 = 0 \\ x + 1 = 0 &\rightarrow x_3 = -1 \\ (x + 2)^2 = 0 &\rightarrow x_4 = x_5 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x - 3)^2 = 0 &\rightarrow x_1 = x_2 = 3 \\ (x + 3)^2 = 0 &\rightarrow x_3 = x_4 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x = 0 &\rightarrow x_1 = 0 \\ (x - 4)^2 = 0 &\rightarrow x_2 = x_3 = 4 \\ (x + 3)^2 = 0 &\rightarrow x_4 = x_5 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (x^2 - 1)^2 = 0 &\rightarrow (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2 = 0 \\ (x + 1)^2 = 0 &\rightarrow x_1 = x_2 = -1 \\ (x - 1)^2 = 0 &\rightarrow x_3 = x_4 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{e) } (x - 1)^2 \cdot x^3 = 0$$

$$\text{f) } (x + 1)^3 \cdot (x - 2)^2 = 0$$

$$\text{g) } \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{e) } x^3 = 0 &\rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ (x - 1)^2 = 0 &\rightarrow x_4 = x_5 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } (x + 1)^3 = 0 &\rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = -1 \\ (x - 2)^2 = 0 &\rightarrow x_4 = x_5 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } x^2 - \frac{1}{4} = 0 &\rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2} \\ \left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 = 0 &\rightarrow x_3 = x_4 = 6 \end{aligned}$$

046 Resuelve las ecuaciones.

$$\text{a) } (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3) = 2$$

$$\text{b) } (2x^2 + 1) \cdot (x^2 + 2) = x^2 \cdot (x^2 - 2)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } x^4 - 5x^2 + 6 = 2 &\rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 - 5z + 4 = 0 \\ z_1 = 1 &\xrightarrow{z=x^2} x^2 = 1 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1 \\ z_2 = 4 &\xrightarrow{z=x^2} x^2 = 4 \rightarrow x_3 = 2, x_4 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x^4 + 5x^2 + 2 = x^4 - 2x^2 &\rightarrow x^4 + 7x^2 + 2 = 0 \xrightarrow{z=x^2} z^2 + 7z + 2 = 0 \\ z_1 = \frac{-7 + \sqrt{41}}{2} &\xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{-7 + \sqrt{41}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.} \\ z_2 = \frac{-7 - \sqrt{41}}{2} &\xrightarrow{z=x^2} x^2 = \frac{-7 - \sqrt{41}}{2} \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{aligned}$$

Ecuaciones e inecuaciones

047 HAZLO ASÍ

¿CÓMO RESOLVEMOS ECUACIONES DE GRADO 3 CON ALGUNA RAÍZ ENTERA?

Resuelve esta ecuación: $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$

PRIMERO. Se halla la raíz entera por la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 4 & -1 \\ & & 1 & -3 & 1 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 1)$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación obtenida al factorizar.

$$(x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$\begin{array}{l} x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} \end{array} \rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

048 ●● Halla la solución de estas ecuaciones de grado superior a 2, tal como se ha explicado en la actividad anterior.

- a) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$ e) $2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$
 b) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 = 0$ f) $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$
 c) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$ g) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$
 d) $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -4 & -4 & 16 \\ & & 4 & 0 & -16 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array} \rightarrow x_1 = 4$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_2 = 2, x_3 = -2$$

b) $x^2 \cdot (x^2 + 2x - 8) = 0$
 $x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$
 $x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x_3 = 2, x_4 = -4$

c) $x \cdot (x^3 - 2x^2 - 11x + 12) = 0$
 $x_1 = 0$
 $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -11 & 12 \\ & & 1 & -1 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array} \rightarrow x_2 = 1$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x_3 = 4, x_4 = -3$$

d) $x \cdot (x^2 - 7x + 10) = 0$
 $x_1 = 0$
 $x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x_2 = 5, x_3 = 2$

e) $2x^3 - 11x^2 + 12x = 0 \rightarrow x \cdot (2x^2 - 11x + 12) = 0 \rightarrow x_1 = 0$
 $2x^2 - 11x + 12 = 0 \rightarrow x_2 = 4, x_3 = \frac{3}{2}$

$$f) x \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x_2 = 2, x_3 = 4$$

$$g) 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & & 2 & -1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = (x - 1) \cdot (2x^2 - x - 3) = 0$$

$$\rightarrow x_1 = 1$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = -1, x_3 = \frac{3}{2}$$

049 Resuelve las ecuaciones, factorizando el polinomio de la ecuación.



a) $x^3 - x^2 = 0$ c) $x^3 - 25x = 0$ e) $x^3 - 4x = 0$ g) $x^4 - x^3 = 0$

b) $x^3 - x = 0$ d) $x^3 + 2x^2 = 0$ f) $x^3 - 5x^2 = 0$ h) $x^5 - 16x^3 = 0$

a) $x^2 \cdot (x - 1) = 0$

$$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x_3 = 1$$

b) $x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0$

$$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x_2 = -1$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x_3 = 1$$

c) $x \cdot (x - 5) \cdot (x + 5) = 0$

$$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$x + 5 = 0 \rightarrow x_2 = -5$$

$$x - 5 = 0 \rightarrow x_3 = 5$$

d) $x^2 \cdot (x + 2) = 0$

$$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x_3 = -2$$

e) $x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 0$

$$x = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x_3 = 2$$

f) $x^2 \cdot (x - 5) = 0$

$$x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$x - 5 = 0 \rightarrow x_3 = 5$$

g) $x^3 \cdot (x - 1) = 0$

$$x^3 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x_4 = 1$$

h) $x^3 \cdot (x - 4) \cdot (x + 4) = 0$

$$x^3 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$x - 4 = 0 \rightarrow x_4 = 4$$

$$x + 4 = 0 \rightarrow x_5 = -4$$

050 Escribe ecuaciones con estas soluciones.



a) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$ y $x_4 = 4$

b) $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$ (solución doble)

c) $x_1 = 4$ y $x_2 = -3$ (solución triple)

d) $x_1 = -5, x_2 = 1$ (solución doble) y $x_3 = -1$ (solución triple)

e) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$ y $x_3 = \frac{1}{4}$

a) $(x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

b) $(x - 1) \cdot (x + 2)^2 = 0$

c) $(x - 4) \cdot (x + 3)^3 = 0$

d) $(x + 5) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^3 = 0$

e) $\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) = 0$

Ecuaciones e inecuaciones

051

Resuelve las siguientes ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{2}{x} = 0$

d) $\frac{x^2 - 3}{9 - x} = 0$

g) $\frac{16}{5x} - \frac{81x^3}{20} = 0$

b) $\frac{1}{x^4} - \frac{1}{16} = 0$

e) $\frac{x^2}{5} - \frac{125}{x^2} = 0$

h) $\frac{81x^3 - 192}{5x - 20} = 0$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{3}{x} = 0$

f) $\frac{1.331}{12x} - \frac{2x^2}{3} = 0$

a) $\frac{x^3 - 8}{4x} = 0 \rightarrow x^3 - 8 = 0 \rightarrow (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4) = 0 \rightarrow x = 2$

b) $\frac{16 - x^4}{16x^2} = 0 \rightarrow x^4 - 16 = 0 \rightarrow (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4) = 0$
 $\rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$

c) $\frac{x^3 - 27}{9x} = 0 \rightarrow x^3 - 27 = 0 \rightarrow (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9) = 0 \rightarrow x = 3$

d) $\frac{x^2 - 3}{9 - x} = 0 \rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$

e) $\frac{x^4 - 625}{5x^2} = 0 \rightarrow x^4 - 625 = 0 \rightarrow (x + 5) \cdot (x - 5) \cdot (x^2 + 25) = 0$
 $\rightarrow x_1 = -5, x_2 = 5$

f) $\frac{1.331 - 8x^3}{13x} = 0 \rightarrow 8x^3 - 1.331 = 0$
 $\rightarrow (2x - 11) \cdot (4x^2 + 22x + 121) = 0 \rightarrow x = \frac{11}{2}$

g) $\frac{64 - 81x^4}{20x} = 0 \rightarrow 81x^4 - 64 = 0$
 $\rightarrow (3x + \sqrt{8}) \cdot (3x - \sqrt{8}) \cdot (9x^2 + 8) = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{8}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{8}}{3}$

h) $81x^3 - 192 = 0 \rightarrow 27x^3 - 64 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow (3x - 4) \cdot (9x^2 + 12x + 16) = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

052

Calcula la solución de estas ecuaciones con fracciones algebraicas.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{7}{8}$

c) $\frac{5}{x+2} + \frac{10}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{5}$

b) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} = 0$

d) $\frac{x+4}{2x} - \frac{x-3}{x^3} = \frac{30x+6}{2x^3}$

a) $\frac{8x^2 + 8x + 8}{8x^3} = \frac{7x^3}{8x^3} \rightarrow 7x^3 - 8x^2 - 8x - 8 = 0$

| | | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|---|--------------------|------------------------------|---|--------------|
| 2 | 7 | -8 | -8 | -8 | → | x ₁ = 2 | 7x ² + 6x + 4 = 0 | → | Sin solución |
| | 7 | 14 | 12 | 8 | | | | | |
| | 7 | 6 | 4 | 0 | | | | | |

b) $\frac{3x \cdot (x - 1) - 2(x^2 - 1) + x(x + 1)}{x \cdot (x^2 - 1)} = 0$

→ $3x^2 - 3x - 2x^2 + 2 + x^2 + x = 0$

→ $2x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0$

→ Sin solución

$$c) \frac{25x + 50 + 50}{5 \cdot (x + 2)^2} = \frac{(x + 4) \cdot (x + 2)^2}{5 \cdot (x + 2)^2} \rightarrow x^3 + 8x^2 - 5x - 84 = 0$$

$$3 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 18 & -5 & -84 \\ & 3 & 33 & 84 \\ \hline 1 & 11 & 28 & 0 \end{array} \right. \rightarrow x_1 = 3$$

$$x^2 + 11x + 28 = 0 \rightarrow x_2 = -7, x_3 = -4$$

$$d) \frac{x^2 \cdot (x + 4) - 2 \cdot (x - 3)}{2x^3} = \frac{30x + 6}{2x^3} \rightarrow x^3 + 4x^2 - 32x = 0$$

$$x_1 = 0 \rightarrow \text{No es solución porque anula al denominador}$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0 \rightarrow x_2 = -8, x_3 = 4$$

053 Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{2x + 5} - 3x + 3 = 0$

e) $3x - \sqrt{5x} = 10$

b) $\sqrt{8 + 2x} + x = 0$

f) $1 + \sqrt{4 - 2x} = x + 11$

c) $\sqrt{9 + 7x} - 2x = 2$

g) $\sqrt{5x + 5} = x + 1$

d) $x - \sqrt{4x - 3} = 0$

h) $\sqrt{4 - 8x} + x = 2$

a) $\sqrt{2x + 5} = 3x - 3 \rightarrow 2x + 5 = 9x^2 - 18x + 9 \rightarrow 9x^2 - 20x + 4 = 0$
 $x_1 = 2; x_2 = \frac{2}{9}$ no es solución porque $\sqrt{2 \cdot \frac{2}{9} + 5} - 3 \cdot \frac{2}{9} + 3 = \frac{14}{3} \neq 0$

b) $\sqrt{8 + 2x} = -x \rightarrow 2x + 8 = x^2 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$
 $x_1 = -2, x_2 = 4$ no es solución porque $\sqrt{8 + 2 \cdot 4} + 4 = 8 \neq 0$

c) $\sqrt{9 + 7x} = 2x + 2 \rightarrow 9 + 7x = 4x^2 + 8x + 4 \rightarrow 4x^2 + x - 5 = 0$
 $x_1 = 1; x_2 = \frac{-5}{4}$ no es solución porque $\sqrt{9 + 7 \cdot \frac{-5}{4}} - 2 \cdot \frac{-5}{4} = 3 \neq 2$

d) $\sqrt{4x - 3} = x \rightarrow 4x - 3 = x^2 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$
 $x_1 = 1; x_2 = 3$

e) $\sqrt{5x} = 3x - 10 \rightarrow 5x = 9x^2 - 60x + 100 \rightarrow 9x^2 - 65x + 100 = 0$
 $x_1 = 5; x_2 = \frac{20}{9}$ no es solución porque $3 \cdot \frac{20}{9} - \sqrt{5 \cdot \frac{20}{9}} = \frac{10}{3} \neq 10$

f) $\sqrt{4 - 2x} = x + 10 \rightarrow 4 - 2x = x^2 + 20x + 100 \rightarrow x^2 + 22x + 96 = 0$
 $x_1 = -6; x_2 = -16$ no es solución porque $1 + \sqrt{4 - 2(-16)} = 7 \neq -16 + 11$

g) $\sqrt{5x + 5} = x + 1 \rightarrow 5x + 5 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$
 $x_1 = -1; x_2 = 4$

h) $\sqrt{4 - 8x} = 2 - x \rightarrow 4 - 8x = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 + 4x = 0$
 $x_1 = 0; x_2 = -4$

Ecuaciones e inecuaciones

054

Halla la solución de estas ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{4x} = 0$ b) $\sqrt{5x + 1} = \sqrt{x^2 - 5}$

a) $\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{4x} = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 + 3} = -\sqrt{4x} \rightarrow$
 $\rightarrow (\sqrt{x^2 + 3})^2 = (-\sqrt{4x})^2 \rightarrow x^2 + 3 = 4x \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$
 $\rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3 \rightarrow$ ninguna es solución porque al sustituir no verifican la ecuación.

b) $\sqrt{5x + 1} = \sqrt{x^2 - 5} \rightarrow 5x + 1 = x^2 - 5 \rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$
 $\rightarrow x_1 = 6, x_2 = -1 \rightarrow$ no es solución porque $\sqrt{(-1)^2 - 5}$ no existe.

055

Asocia cada enunciado con su correspondiente desigualdad.

- a) 1 es menor que 5. 1) $2 > -4$
b) 2 es mayor que -4 . 2) $5 > 3$
c) -13 es menor que -2 . 3) $1 < 5$
d) -4 es mayor que -7 . 4) $-14 < 6$
e) 5 es mayor que 3. 5) $-4 > -7$
f) -14 es menor que 6. 6) $-13 < -2$

- a) \rightarrow 3) c) \rightarrow 6) e) \rightarrow 2)
b) \rightarrow 1) d) \rightarrow 5) f) \rightarrow 4)

056

Expresa cada enunciado como inecuación, como intervalo y gráficamente.

- a) Números menores que 9 y mayores o iguales que 4.
b) Números menores o iguales que 10.
c) Números mayores que -3 y menores que 3.
d) Números mayores o iguales que -6 .
e) Números menores que -5 y mayores que -10 .
f) Números mayores que -8 y menores o iguales que 0.
g) Los años que tiene una persona mayor de edad.
h) Los números de la matrícula de un coche.
- a) $4 \leq x < 9 \rightarrow [4, 9)$ e) $-10 < x < -5 \rightarrow (-10, -5)$
b) $x \leq 10 \rightarrow (-\infty, 10]$ f) $-8 < x \leq 0 \rightarrow (-8, 0]$
c) $-3 < x < 3 \rightarrow (-3, 3)$ g) $x \geq 18 \rightarrow [18, +\infty)$
d) $x \geq -6 \rightarrow [-6, +\infty)$ h) $0 \leq x \leq 9.999 \rightarrow [0, 9.999]$

057

Completa, para $x = 2$, con el signo ($<$, \leq , $>$, \geq) que corresponda.

- a) $2x \square 3$ e) $-2x \square 3x$ i) $-4x \square -1$
b) $-2x \square 3$ f) $2 \square -3x$ j) $3x \square -x + 3$
c) $2x \square -3$ g) $-2 \square -3x$
d) $-2x \square -3$ h) $4x \square 1$

- a) $2x > 3$ f) $2 > -3x$
 b) $-2x < 3$ g) $-2 > -3x$
 c) $2x > -3$ h) $4x > 1$
 d) $-2x < -3$ i) $-4x < -1$
 e) $-2x < 3x$ j) $3x > -x + 3$

058 Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

- a) $x = \frac{1}{2}$ verifica que $1 + x \leq \frac{3}{2}$.
 b) $x = 0$ verifica que $2x + 3 < 3$.
 c) $x = -3$ verifica que $\frac{4x + 5}{2} \leq \frac{14}{4}$.
 d) $x = -5$ verifica que $\frac{x + 3}{2} \geq -4$.
- a) Verdadera c) Verdadera
 b) Falsa d) Verdadera

059 Resuelve las inecuaciones.

- a) $-2x < 2x - 4$ d) $x + 1 < 2x - 1$
 b) $2x > 4x + 2$ e) $4x \geq 1 - x$
 c) $5x \leq x + 5$ f) $-2x \geq 0$
- a) $-2x < 2x - 4 \rightarrow -4x < -4 \rightarrow x > 1 \rightarrow (1, +\infty)$
 b) $2x > 4x + 2 \rightarrow -2x > 2 \rightarrow x < -1 \rightarrow (-\infty, -1)$
 c) $5x \leq x + 5 \rightarrow 4x \leq 5 \rightarrow x \leq \frac{5}{4} \rightarrow \left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$
 d) $x + 1 < 2x - 1 \rightarrow -x < -2 \rightarrow x > 2 \rightarrow (2, +\infty)$
 e) $4x \geq 1 - x \rightarrow 5x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{5} \rightarrow \left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$
 f) $-2x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \rightarrow (-\infty, 0]$

060 Resuelve estas inecuaciones.

- a) $5 - 2x \leq 3 + 2(4 - 2x)$ c) $(7 + x) \cdot (-8) - 2 < 9x - 3$
 b) $x + 6(x - 5) > 3x + 2$ d) $2x - 4(-3 - x) \geq 5x - 10$
- a) $5 - 2x \leq 3 + 8 - 4x \rightarrow 2x \leq 6 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow (-\infty, 3]$
 b) $x + 6x - 30 > 3x + 2 \rightarrow 4x > 32 \rightarrow x > 8 \rightarrow (8, +\infty)$
 c) $-56 - 8x - 2 < 9x - 3 \rightarrow -17x < 55 \rightarrow x > \frac{-55}{17} \rightarrow \left(\frac{-55}{17}, +\infty\right)$
 d) $2x + 12 + 4x \geq 5x - 10 \rightarrow x \geq -22 \rightarrow [-22, +\infty)$

Ecuaciones e inecuaciones

061

Halla la solución de las inecuaciones.

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+4}{3} \leq \frac{1}{6}$

b) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{4} \leq 12$

c) $\frac{x}{4} - \frac{x}{8} + 5 \geq x$

d) $\frac{2x-1}{6} - \frac{3x}{10} < \frac{4x-5}{2}$

e) $1 + \frac{x}{5} - \frac{x}{10} \leq \frac{x}{12}$

f) $\frac{3x+4}{7} - \frac{x}{3} > 4 - 6x$

a) $3x+3+2x+8 \leq 1 \rightarrow 5x \leq -10 \rightarrow x \leq -2 \rightarrow (-\infty, -2]$

b) $4x+8-3x+3 \leq 144 \rightarrow x \leq 133 \rightarrow (-\infty, 133]$

c) $2x-x+40 \geq 8x \rightarrow -7x \geq -40 \rightarrow x \leq \frac{40}{7} \rightarrow \left(-\infty, \frac{40}{7}\right]$

d) $10x-5-9x < 60x-75 \rightarrow -59x < -70 \rightarrow x > \frac{70}{59} \rightarrow \left(\frac{70}{59}, +\infty\right)$

e) $60+12x-6x \leq 5x \rightarrow x \leq 60 \rightarrow (-\infty, 60]$

f) $9x+12-7x > 84-126x \rightarrow 128x > 72 \rightarrow x > \frac{16}{9} \rightarrow \left(\frac{16}{9}, +\infty\right)$

062

Resuelve las inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 1 \geq 0$

e) $x^2 - 9x + 20 < 0$

b) $(x-2) \cdot (x+3) > 0$

f) $(x+1) \cdot (x-4) \geq 0$

c) $x^2 - 4 < 0$

g) $4x^2 - 16x < 0$

d) $x \cdot (x+5) \leq 0$

h) $x^2 \leq 2x$

a) $x^2 - 1 \geq 0$

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$

La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$.

b) $(x-2) \cdot (x+3) > 0$

$(x-2) \cdot (x+3) = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$

La solución es los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(2, +\infty)$.

c) $x^2 - 4 < 0$

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

La solución es el intervalo $(-2, 2)$.

d) $x \cdot (x+5) \leq 0$

$x \cdot (x+5) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -5$

La solución es el intervalo $[-5, 0]$.

e) $x^2 - 9x + 20 < 0$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 5$$

La solución es el intervalo (4, 5).

f) $(x + 1) \cdot (x - 4) \geq 0$

$$(x + 1) \cdot (x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 4$$

La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[4, +\infty)$.

g) $4x^2 - 16x < 0$

$$4x^2 - 16x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

La solución es el intervalo (0, 4).

h) $x^2 \leq 2x \rightarrow x^2 - 2x \leq 0$

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$$

La solución es el intervalo [0, 2].

063 Resuelve las inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 2x + 1 < 0$

b) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

c) $x^2 \geq 1$

d) $x^2 - 8x + 16 \geq 0$

e) $x^2 + 3x + 9 < 0$

f) $x^2 + x + 1 \geq 0$

a) $x^2 - 2x + 1 < 0$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

No tiene solución.

b) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -3$$

La solución es $x = -3$.

c) $x^2 \geq 1 \rightarrow x^2 - 1 \geq 0$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$$

La solución es los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[1, +\infty)$.

d) $x^2 - 8x + 16 \geq 0$

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 4$$

La solución es toda la recta real.

e) $x^2 + 3x + 9 < 0$

$$x^2 + 3x + 9 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

En todos los valores de x es positiva, por lo que no tiene solución.

f) $x^2 + x + 1 \geq 0$

$$x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

En todos los valores de x es positiva, por lo que la solución es toda la recta real.

Ecuaciones e inecuaciones

064 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RESUELVEN INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS?

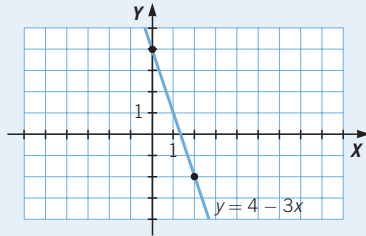
Resuelve la inecuación $3x + y > 4$.

PRIMERO. Se considera la función lineal asociada a la inecuación, sustituyendo el signo $>$ por $=$.

$$3x + y > 4 \rightarrow 3x + y = 4 \rightarrow y = 4 - 3x$$

SEGUNDO. Se representa gráficamente la función que representa, que será una recta que divide el plano en dos partes.

| | | |
|-----|---|----|
| x | 0 | 2 |
| y | 4 | -2 |



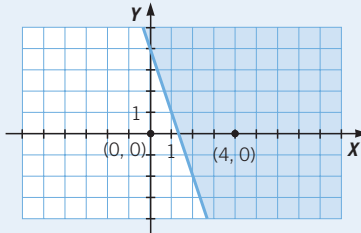
TERCERO. Se elige un punto en cada parte del plano y se comprueba si cumple la inecuación.

Tomamos, por ejemplo, el punto $(4, 0)$:

$$3 \cdot 4 + 0 > 4 \rightarrow \text{Cumple la inecuación.}$$

El punto $(0, 0)$ del otro semiplano:

$$3 \cdot 0 + 0 \not> 4 \rightarrow \text{No cumple la inecuación.}$$



Si un punto del semiplano cumple la desigualdad, entonces todos la cumplen.

La solución es el semiplano de la derecha.

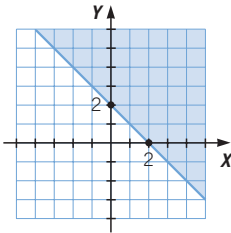
065 Resuelve las siguientes inecuaciones.



- $x + y \geq 2$
- $2x - y < 3$
- $-x + 2y > 4$
- $3x + 5y \leq 0$
- $\frac{x}{2} + y > 1$
- $\frac{2x}{3} < 1 + \frac{y}{2}$

a) Representamos $y = 2 - x$

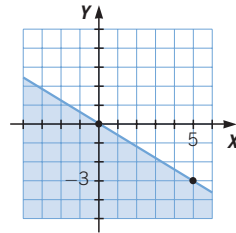
| | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 2 |
| y | 2 | 0 |



La recta es parte de la solución.

d) Representamos $y = \frac{-3x}{5}$

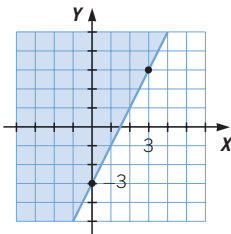
| | | |
|-----|---|----|
| x | 0 | 5 |
| y | 0 | -3 |



La recta es parte de la solución.

b) Representamos $y = 2x - 3$

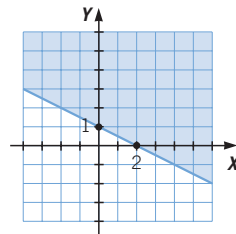
| | | |
|-----|----|---|
| x | 0 | 3 |
| y | -3 | 3 |



La recta no es parte de la solución.

e) Representamos $y = 1 - \frac{x}{2}$

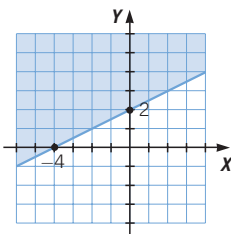
| | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 2 |
| y | 1 | 0 |



La recta no es parte de la solución.

c) Representamos $y = \frac{x + 4}{2}$

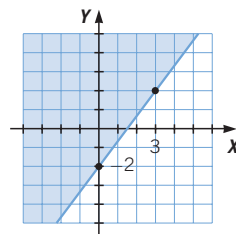
| | | |
|-----|---|----|
| x | 0 | -4 |
| y | 2 | 0 |



La recta no es parte de la solución.

f) Representamos $y = \frac{4x - 6}{3}$

| | | |
|-----|----|---|
| x | 0 | 3 |
| y | -2 | 2 |



La recta no es parte de la solución.

Ecuaciones e inecuaciones

066 ●● Jorge tiene 3 discos más que Marta, Marta tiene 3 discos más que Alberto y Alberto tiene 3 discos más que Sara. Entre los cuatro tienen 58 discos. ¿Cuántos discos tiene cada uno?

Discos de Sara: x Discos de Marta: $x + 6$
Discos de Alberto: $x + 3$ Discos de Jorge: $x + 9$
 $x + x + 3 + x + 6 + x + 9 = 58 \rightarrow x = 10$
Discos de Sara: 10 Discos de Marta: 16
Discos de Alberto: 13 Discos de Jorge: 19

067 ●●● Un matrimonio y sus tres hijos viajan en tren. Si el billete de adulto vale el doble que el de niño, y el coste total de los billetes es 8,75 €, ¿cuánto ha costado cada billete?

Billete de niño: x Billete de adulto: $2x$
 $3 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot x = 8,75 \rightarrow x = 1,25 \text{ €}$
Billete de niño: 1,25 € Billete de adulto: 2,50 €

068 ●● Claudia se ha gastado el 25% de sus ahorros en un regalo y todavía le quedan 120 €. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado?

Dinero ahorrado: x
 $x - 0,25x = 120 \rightarrow x = 160 \text{ €}$ tenía ahorrados.

069 ●● En una tienda, Pedro observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 €. ¿Cuánto valían los pantalones antes de efectuar el descuento?

Precio de los pantalones: x
 $x - 0,20x = 18 \text{ €} \rightarrow x = 22,50 \text{ €}$
Los pantalones valían 22,50 €.

070 ●● Halla tres números enteros consecutivos cuya suma sea 27.

Números: $x - 1, x, x + 1$
 $x - 1 + x + x + 1 = 27 \rightarrow x = 9$
Los números son 8, 9 y 10.

071 ●● El transporte en taxi cuesta 2,50 € de bajada de bandera y 1,50 € por cada kilómetro recorrido. Si en un trayecto hemos pagado 13 €, ¿qué distancia hemos recorrido?

Distancia recorrida (km): x
 $2,50 + 1,50x = 13 \rightarrow x = 7 \text{ km}$
Hemos recorrido 7 km.



072 ●● Halla dos números consecutivos, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 1.301.

Números: $x, x + 1$

$$x^2 + (x + 1)^2 = 1.301 \rightarrow 2x^2 + 2x - 1.300 = 0$$

$$x_1 = 25, x_2 = -26$$

Los números son 25 y 26, o -26 y -25 .

073 ●● Calcula dos números pares consecutivos, cuya diferencia de sus cuadrados sea 60.

Números: $x, x + 2$

$$(x + 2)^2 - x^2 = 60 \rightarrow 4x = 56 \rightarrow x = 14$$

Los números son 14 y 16.

074 ●● El dividendo y el resto de una división de números enteros son 200 y 5, respectivamente. Halla el divisor y el cociente si se diferencian en dos unidades. Recuerda: $D = d \cdot c + R$.

Divisor: x

Cociente: $x - 2$

$$x \cdot (x - 2) + 5 = 200 \rightarrow x^2 - 2x - 195 = 0$$

$$x_1 = 15, x_2 = -13 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Divisor: 15

Cociente: 13

075 ●● Halla el divisor y el cociente obtenido al efectuar una división si el dividendo es 140 y el resto es 12, sabiendo que el cociente es la mitad del divisor.

Divisor: $2x$

Cociente: x

$$2x \cdot x + 12 = 140 \rightarrow 2x^2 = 128$$

$$x_1 = 8, x_2 = -8 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Divisor: 16

Cociente: 8

076 ●● Un jardín rectangular tiene 5.600 m² de superficie y mide 10 m más de largo que de ancho. ¿Qué dimensiones tiene el jardín?

Ancho: x

Largo: $x + 10$

$$x \cdot (x + 10) = 5.600 \rightarrow x^2 + 10x - 5.600 = 0$$

$$x_1 = 70, x_2 = -80 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Ancho: 70 m

Largo: 80 m

Ecuaciones e inecuaciones

077



¿Cuántos hermanos hay en una familia si por Navidad cada uno hace un regalo a cada hermano y entre todos reúnen 30 regalos?

N.º de hermanos: x

$$x \cdot (x - 1) = 30 \rightarrow x^2 - x - 30 = 0$$

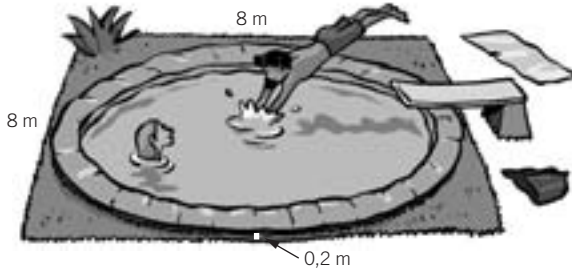
$$x_1 = 6, x_2 = -5 \text{ (solución negativa no válida)}$$

Hay 6 hermanos.

078



¿Qué superficie ocupa el jardín que rodea la piscina?



$$\text{El radio de la piscina es: } r = \frac{8 - 2 \cdot 0,2}{2} = 3,8 \text{ m}$$

$$\text{Área del jardín: } 8^2 - \pi \cdot 3,8^2 = 18,6584 \text{ m}^2$$

079



Si aumentamos la base de un cuadrado en 25 cm y su altura la disminuimos en 24 cm, obtenemos un rectángulo de igual área que el cuadrado.

a) Halla cuánto mide el lado del cuadrado.

b) ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

$$\text{a) } x^2 = (x - 24)(x + 25) \rightarrow x = 600 \text{ cm}$$

El lado del cuadrado mide 600 cm.

$$\text{b) Base: } 600 + 25 = 625 \text{ cm}$$

$$\text{Altura: } 600 - 24 = 576 \text{ cm}$$

080



La superficie de un rectángulo mide 360 cm². Aumentando su base en 4 cm y disminuyendo su altura en 3 cm, se obtiene un rectángulo de igual área que el primero. Halla las dimensiones de los dos rectángulos.

$$\text{Base: } x \qquad \text{Altura: } \frac{360}{x}$$

$$(x + 4) \cdot \left(\frac{360}{x} - 3 \right) = 360$$

$$\rightarrow (x + 4) \cdot (360 - 3x) = 360x \rightarrow 3x^2 + 12x - 1.440 = 0$$

$$x_1 = 20, x_2 = -24 \text{ (solución negativa no válida)}$$

$$\text{Base: } 20 \text{ cm}$$

$$\text{Altura: } 18 \text{ cm}$$

- 081** ●● Un peregrino camina a una velocidad comprendida entre 4 km/h y 6 km/h. Halla entre qué valores se encuentra la distancia recorrida, cuando hayan transcurrido:



- a) 4 horas.
 b) 5 horas y media.
 c) 2 días, si camina 7 horas diarias.
- a) Entre 16 km y 24 km.
 b) Entre 22 km y 33 km.
 c) Entre 56 km y 84 km.

- 082** ●●● Carlos tiene entre 6 y 10 años, Javier tiene 4 años menos que Carlos y María tiene 6 años más que Javier. Determina los intervalos en los que se encuentran las edades de Javier y María.

La edad de Javier se encuentra comprendida entre 2 y 6 años.
 La edad de María se encuentra comprendida entre 8 y 12 años.

- 083** ●● Calcula la medida del lado de los cuadrados cuya área sea menor que 81 cm². ¿Entre qué valores se encuentra?

$$x^2 < 81 \rightarrow x^2 - 81 < 0$$

$$x^2 - 81 = 0 \rightarrow x_1 = -9, x_2 = 9$$

Como el lado debe ser positivo, el lado debe estar en el intervalo (0, 9).
 Los lados serán menores de 9 cm.

- 084** ●● Halla las dimensiones de los cuadrados de área menor que 36 m².

$$x^2 < 36 \rightarrow x^2 - 36 < 0$$

$$x^2 - 36 = 0 \rightarrow x_1 = -6, x_2 = 6$$

Como el lado debe ser positivo, su valor debe estar situado en el intervalo (0, 6).
 Los lados serán menores de 6 cm.

- 085** ●● Obtén los números tales que su triple menos 2 es mayor que su cuádruplo menos 1.

$$3x - 2 > 4x - 1 \rightarrow -x > 1 \rightarrow x < -1$$

Son los números menores que -1.

Ecuaciones e inecuaciones

086



En dos empresas, **A** y **B**, hay un puesto de comercial vacante. En la empresa **A** pagan de salario fijo 300 €, más 75 € por cada venta realizada, y en la empresa **B** se cobra 125 € por cada venta, sin salario fijo. ¿Qué empresa interesa más?

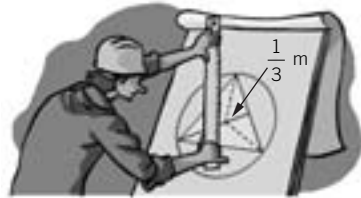
Ventas: x Sueldo A: $300 + 75x$ Sueldo B: $125x$
 $300 + 75x > 125x \rightarrow x < 6$

Interesa más la empresa **A** si se realizan más de 6 ventas, la empresa **B** si se realizan menos de 6 ventas y, en el caso de realizarse 6 ventas, no importa la empresa que sea.

087



El perímetro de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia mide 6 m.



- a) ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?
 b) ¿Y el área del triángulo?

Lado = 2 m Altura = $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ m

Por ser un triángulo equilátero, el baricentro coincide con el centro de la circunferencia y el radio es dos terceras partes de la altura.

Radio = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m Área = $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ m²

088



En una playa alquilan sillas y tumbonas. Por una silla cobran 3 € cada hora, y por una tumbona cobran 5 € fijos, más 2 € cada hora. ¿A partir de cuántas horas es más económico alquilar una tumbona que una silla?

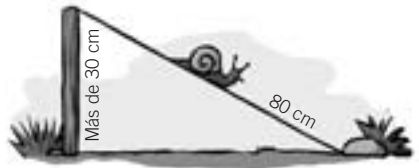
Horas: x Alquiler silla: $3x$
 $3x > 5 + 2x \rightarrow x > 5$

A partir de 5 horas es más económico alquilar una tumbona.

089



La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 80 cm y el cateto menor mide más de 30 cm.



- a) ¿Cuánto mide su cateto mayor?
 b) ¿Cuál es su área?

a) $x =$ cateto mayor $y =$ cateto menor

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 80^2 \\ 30 < y \leq x \end{array} \right\}$$

Para $y = 30 \rightarrow x = \sqrt{80^2 - 30^2} = \sqrt{5.500} = 74,16$ cm

Para $y = x \rightarrow 2x^2 = 80^2 \rightarrow x = \sqrt{3.200} = 56,57$ cm

$56,57 \text{ cm} \leq x < 74,16 \text{ cm}$

$$b) A = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{80^2 - x^2}}{2}$$

$$\text{Para } x = 56,57 \rightarrow A = 1.600 \text{ cm}^2$$

$$\text{Para } x = 74,16 \rightarrow A = 1.112,6 \text{ cm}^2$$

$$1.112,6 \text{ cm}^2 < A \leq 1.600 \text{ cm}^2$$

090 Halla todos los números tales que:



a) El cuadrado de su suma más 3 es menor o igual que 8.

b) El cuadrado de la suma de su doble más 1 es mayor o igual que 2.

a) Número: x

$$(x + 3)^2 \leq 8 \rightarrow x^2 + 6x + 9 \leq 8 \rightarrow x^2 + 6x + 1 \leq 0$$

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-6 + \sqrt{32}}{2}, x_2 = \frac{-6 - \sqrt{32}}{2}$$

$$\text{Solución: } \left[\frac{-6 - \sqrt{32}}{2}, \frac{-6 + \sqrt{32}}{2} \right]$$

b) Número: x

$$(2x + 1)^2 \geq 2 \rightarrow 4x^2 + 4x - 1 \geq 0$$

$$4x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{-4 + \sqrt{32}}{8}, x_2 = \frac{-4 - \sqrt{32}}{8}$$

$$\text{Soluciones: } \left[-\infty, \frac{-4 - \sqrt{32}}{8} \right] \text{ y } \left[\frac{-4 + \sqrt{32}}{8}, +\infty \right)$$

091 Determina qué condición tienen que cumplir los coeficientes y los términos independientes de dos ecuaciones de primer grado:



$$ax + b = 0 \quad a'x + b' = 0$$

para que tengan la misma solución.

$$\text{La condición que tienen que cumplir es: } \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$

092 Encuentra la condición que se debe cumplir para que una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + ax + 1 = 0$ tenga:



a) Dos soluciones.

b) Una solución doble.

c) Ninguna solución.

$$a) \Delta > 0 \rightarrow a^2 - 4a > 0$$

$$a^2 - 4a = 0 \rightarrow a \cdot (a - 4) = 0 \rightarrow a_1 = 0, a_2 = 4$$

a debe pertenecer a los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(4, +\infty)$.

$$b) \Delta = 0 \rightarrow a^2 - 4a = 0 \rightarrow a_1 = 0, a_2 = 4$$

Como la ecuación es de segundo grado, $a = 4$.

$$c) \Delta < 0 \rightarrow a^2 - 4a < 0$$

$$a^2 - 4a = 0 \rightarrow a_1 = 0, a_2 = 4 \rightarrow a \text{ debe pertenecer al intervalo } (0, 4).$$

Ecuaciones e inecuaciones

093



Halla todos los valores que puede tomar c para que una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - 2x + c = 0$ tenga:

a) Dos soluciones. b) Ninguna solución.

a) $\Delta > 0 \rightarrow 4 - 4c > 0 \rightarrow c < 1 \rightarrow c$ debe de ser menor que 1.

b) $\Delta < 0 \rightarrow 4 - 4c < 0 \rightarrow c > 1 \rightarrow c$ debe de ser mayor que 1.

094



Resuelve la ecuación $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ mediante la conversión $x^3 = z$.

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \xrightarrow{z=x^3} z^2 - 7z - 8 = 0$$

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 8 \xrightarrow{z=x^3} x^3 = 8 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{8} = 2 \\ z_2 = -1 \xrightarrow{z=x^3} x^3 = -1 \rightarrow x_2 = \sqrt[3]{-1} = -1 \end{cases}$$

095



Resuelve la ecuación $x^8 - 7x^4 - 8 = 0$, realizando el cambio $x^4 = z$.

$$x^8 - 7x^4 - 8 = 0 \xrightarrow{z=x^4} z^2 - 7z - 8 = 0$$

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 8 \xrightarrow{z=x^4} x^4 = 8 \rightarrow x_1 = \sqrt[4]{8}, x_2 = -\sqrt[4]{8} \\ z_2 = -1 \xrightarrow{z=x^4} x^4 = -1 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

096



Resuelve la ecuación $x^{10} - 7x^5 - 8 = 0$, efectuando el cambio $x^5 = z$.

$$x^{10} - 7x^5 - 8 = 0 \xrightarrow{z=x^5} z^2 - 7z - 8 = 0$$

$$z = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 8 \xrightarrow{z=x^5} x^5 = 8 \rightarrow x_1 = \sqrt[5]{8} \\ z_2 = -1 \xrightarrow{z=x^5} x^5 = -1 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

097



Explica cómo resolverías una ecuación de grado $2n$ de esta forma.

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \xrightarrow{z=x^n} az^2 + bz + c = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \xrightarrow{z=x^n} x^n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \rightarrow x_1 = \sqrt[n]{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \\ z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \xrightarrow{z=x^n} x^n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \rightarrow x_2 = \sqrt[n]{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \end{cases}$$

098 Razona cuándo la inecuación de segundo grado $x^2 + bx + c \leq 0$:

- a) Tiene una solución.
 b) No tiene solución.
 c) Tiene solución para cualquier valor de x .

Si tiene raíces, la solución es:

$$\left[\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right]$$

- a) Cuando el intervalo es solo un punto; es decir, si la ecuación tiene una raíz doble, y el discriminante es igual a cero $\rightarrow b^2 - 4c = 0$.
 b) Cuando la ecuación de segundo grado no tiene solución, y el discriminante es menor que cero $\rightarrow b^2 - 4c < 0$.
 c) Nunca, independientemente del valor de b y c , siempre hay valores de x que hacen que $x^2 + bx + c > 0$.

099 Razona como en la actividad anterior para esta inecuación.

$$x^2 + bx + c < 0$$

Si tiene raíces, la solución es:

$$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

- a) Cuando el intervalo es solo un punto, lo que es imposible por ser la desigualdad estricta.
 b) Cuando la ecuación de segundo grado no tiene solución, y el discriminante es menor que cero $\rightarrow b^2 - 4c < 0$.
 c) Nunca, porque siempre existe algún valor de x tal que $x^2 + bx + c > 0$.

100 Resuelve la inecuación en forma factorizada.

$$(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \geq 0$$

Para ello utiliza la regla de los signos y comprueba para qué valores es positivo y negativo este producto.

| | | | | |
|---------|---|---|---|---|
| $x + 1$ | - | - | + | + |
| $x - 2$ | - | - | - | + |
| $x + 3$ | - | + | + | + |

$$(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \rightarrow \quad - \quad -3 \quad + \quad -1 \quad - \quad 2 \quad +$$

La solución es los intervalos $[-3, -1]$ y $[2, +\infty)$.

EN LA VIDA COTIDIANA

101



En el Parque de La Luz van a construir dos rampas de hormigón para que los jóvenes practiquen con su monopatín. Para ello han consultado con los técnicos y con los expertos en seguridad.

El almacén principal será un gran bloque cúbico y, adosadas a sus aristas, colocaremos las dos rampas.

Para que la inclinación de la rampa para principiantes sea suave, su pie estará separado de la arista del cubo 3 metros menos que la altura, y el pie de la rampa de expertos, 7 metros menos que la altura.



Para calcular qué dimensiones debe tener la estructura han presentado un proyecto con los datos y han incluido un esquema.

Calcula las dimensiones de la estructura.



$$15^2 = x^2 + (x + 3)^2 \rightarrow 2x^2 + 6x - 216 = 0$$

$$x_1 = 9, x_2 = -12$$

La arista de la estructura cúbica mide 9 m.

Longitud de la base de la rampa de expertos $\rightarrow x - 7 = 9 - 7 = 2$ m

Longitud de la base de la rampa de principiantes $\rightarrow x - 3 = 9 - 3 = 6$ m

102

Un polideportivo realiza una oferta de abonos de entrada a sus instalaciones.

Al recibir los resultados de las ventas del primer mes, los directivos han mostrado su satisfacción y han convocado una asamblea general para comunicar el éxito de la oferta.



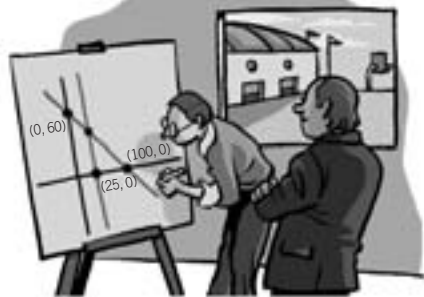
En el mes de julio hemos tenido ingresos superiores a 1.500 €.

La taquillera me ha dicho que hace dos días se terminó el primer taco de abonos semanales. Es decir, hemos vendido más de 25 bonos semanales.



Para preparar la asamblea han representado gráficamente los datos que hasta ese momento tenían.

¿Cuántos abonos mensuales, como mínimo, han vendido si la venta exacta de abonos semanales ha sido de 28?
¿Y si ha sido de 102?



Si los abonos semanales han sido 28:

$$15 \cdot 28 + 25y > 1.500 \rightarrow 25y > 1.080 \rightarrow y > 43,2$$

Como debe ser una cantidad entera, tenemos que $y = 44$.

El número de abonos mensuales ha sido, al menos, de 44.

Si los abonos semanales han sido 102:

$$15 \cdot 102 + 25y > 1.500 \rightarrow 25y > -30 \rightarrow y > -1,2$$

Como debe ser una cantidad positiva, como mínimo no se habrá vendido ningún abono.