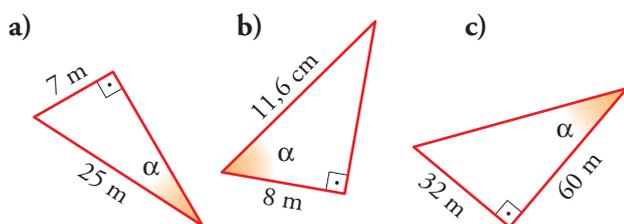


## PÁGINA 161

### PRACTICA

#### Razones trigonométricas de un ángulo agudo

1 ■■■ Halla las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  en cada uno de estos triángulos:



$$\text{a) } \operatorname{sen} \alpha = \frac{7}{25} = 0,28; \operatorname{cos} \alpha = \frac{\sqrt{25^2 - 7^2}}{25} = \frac{24}{25} = 0,96; \operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{24} \approx 0,29$$

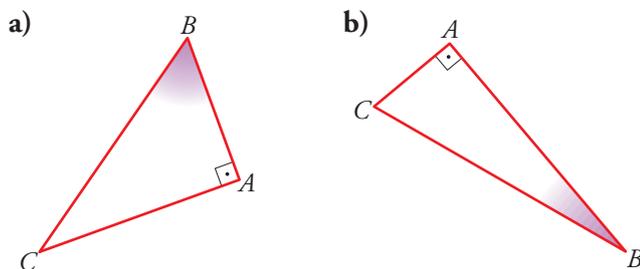
$$\text{b) } \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{11,6^2 - 8^2}}{11,6} = \frac{8,4}{11,6} \approx 0,724$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{8}{11,6} \approx 0,69; \operatorname{tg} \alpha = \frac{8,4}{8} = 1,05$$

$$\text{c) } \operatorname{sen} \alpha = \frac{32}{\sqrt{32^2 + 60^2}} = \frac{32}{68} = \frac{8}{17} \approx 0,47$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{60}{68} = \frac{15}{17} \approx 0,88; \operatorname{tg} \alpha = \frac{32}{60} = \frac{8}{15} \approx 0,53$$

2 ■■■ Midiendo los lados, halla las razones trigonométricas de  $\hat{B}$  en cada caso:



$$\text{a) } \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{2,8}{3,4} \approx 0,82; \operatorname{cos} \hat{B} = \frac{2}{3,4} \approx 0,59; \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{2,8}{2} = 1,4$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{1,3}{3,8} \approx 0,34; \operatorname{cos} \hat{B} = \frac{3,6}{3,8} \approx 0,95; \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{1,3}{3,6} \approx 0,36$$

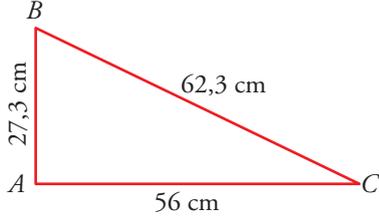
# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

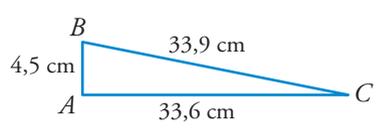
**3**  Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos ( $\hat{A} = 90^\circ$ ):

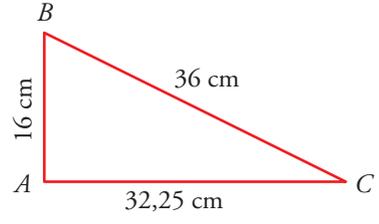
a)  $b = 56$  cm;  $a = 62,3$  cm

b)  $b = 33,6$  cm;  $c = 4,5$  cm

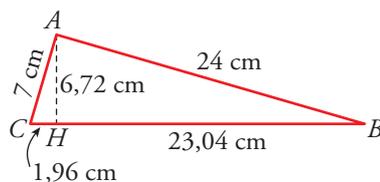
c)  $c = 16$  cm;  $a = 36$  cm

a)   $\text{sen } \hat{B} = \frac{56}{62,3} \approx 0,90$   
 $\text{cos } \hat{B} = \frac{\sqrt{62,3^2 - 56^2}}{62,3} = \frac{27,3}{62,3} \approx 0,438$   
 $\text{tg } \hat{B} = \frac{56}{27,3} \approx 2,051$   
 $\text{sen } \hat{C} = \frac{27,3}{62,3} \approx 0,438$ ;  $\text{cos } \hat{C} = \frac{56}{62,3} \approx 0,90$ ;  $\text{tg } \hat{C} = \frac{27,3}{56} = 0,4875$

b)   $\text{sen } \hat{B} = \frac{33,6}{\sqrt{4,5^2 + 33,6^2}} = \frac{33,6}{33,9} \approx 0,991$   
 $\text{cos } \hat{B} = \frac{4,5}{33,9} \approx 0,133$   
 $\text{tg } \hat{B} = \frac{33,6}{4,5} \approx 7,467$   
 $\text{sen } \hat{C} = \frac{4,5}{33,9} \approx 0,133$ ;  $\text{cos } \hat{C} = \frac{33,6}{33,9} \approx 0,991$ ;  $\text{tg } \hat{C} = \frac{4,5}{33,6} \approx 0,133$

c)   $\text{sen } \hat{B} = \frac{\sqrt{36^2 - 16^2}}{36} \approx \frac{32,25}{36} \approx 0,896$   
 $\text{cos } \hat{B} = \frac{16}{36} = 0,4\bar{4}$   
 $\text{tg } \hat{B} = \frac{32,25}{16} \approx 2,016$   
 $\text{sen } \hat{C} = \frac{16}{36} = 0,4\bar{4}$ ;  $\text{cos } \hat{C} = \frac{32,25}{36} \approx 0,896$ ;  $\text{tg } \hat{C} = \frac{16}{32,25} \approx 0,496$

**4**  Comprueba, con el teorema de Pitágoras, que los triángulos  $ABC$  y  $AHB$  son rectángulos.



Halla en cada uno las razones trigonométricas del ángulo  $B$  y compara los resultados. ¿Qué observas?

El triángulo  $ABC$  es rectángulo en  $A$ :

$$24^2 + 7^2 = 625 = (23,04 + 1,96)^2 = 25^2 = 625$$

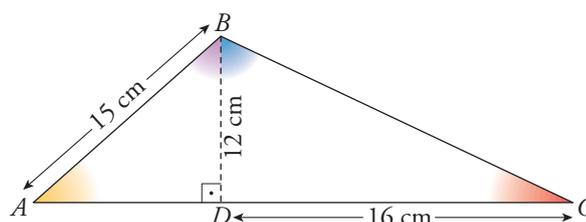
El triángulo  $AHB$  es rectángulo en  $H$ :

$$23,04^2 + 6,72^2 = 576 = 24^2$$

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

	$\text{sen } \hat{B}$	$\text{cos } \hat{B}$	$\text{tg } \hat{B}$
en $ABC$	$\frac{7}{25} = 0,28$	$\frac{24}{25} = 0,96$	$\frac{7}{24} \approx 0,292$
en $AHB$	$\frac{6,72}{24} = 0,28$	$\frac{23,04}{24} = 0,96$	$\frac{6,72}{23,04} \approx 0,292$

5 ■■■ Calcula las razones trigonométricas de los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{C}$ ,  $\widehat{ABD}$  y  $\widehat{CBD}$ .



$$\overline{AD} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9; \quad \overline{BC} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\widehat{ABD}$	$\widehat{CBD}$
$\text{sen}$	$\frac{12}{15} = 0,8$	$\frac{12}{20} = 0,6$	$\frac{9}{15} = 0,6$	$\frac{16}{20} = 0,8$
$\text{cos}$	$\frac{9}{15} = 0,6$	$\frac{16}{20} = 0,8$	$\frac{12}{15} = 0,8$	$\frac{12}{20} = 0,6$
$\text{tg}$	$\frac{12}{9} = 1,3\bar{3}$	$\frac{12}{16} = 0,75$	$\frac{9}{12} = 0,75$	$\frac{16}{12} = 1,3\bar{3}$

## Relaciones fundamentales

6 ■■■ Si  $\text{sen } \alpha = 0,28$ , calcula  $\text{cos } \alpha$  y  $\text{tg } \alpha$  utilizando las relaciones fundamentales ( $\alpha < 90^\circ$ ).

$$\text{cos } \alpha = \sqrt{1 - 0,28^2} = 0,96; \quad \text{tg } \alpha = \frac{0,28}{0,96} \approx 0,292$$

7 ■■■ Halla el valor exacto (con radicales) de  $\text{sen } \alpha$  y  $\text{tg } \alpha$  sabiendo que  $\text{cos } \alpha = 2/3$  ( $\alpha < 90^\circ$ ).

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{5}/3}{2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

8 ■■■ Si  $tg \alpha = \sqrt{5}$ , calcula  $sen \alpha$  y  $cos \alpha$  ( $\alpha < 90^\circ$ ).

$$\left. \begin{array}{l} \frac{sen \alpha}{cos \alpha} = \sqrt{5} \\ sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 \end{array} \right\} s = \sqrt{5}c$$

$$(\sqrt{5}c)^2 + c^2 = 1 \rightarrow 6c^2 = 1 \rightarrow cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$sen \alpha = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

9 ■■■ Calcula y completa esta tabla con valores aproximados:

<b>sen</b> $\alpha$	0,92		
<b>cos</b> $\alpha$			0,12
<b>tg</b> $\alpha$		0,75	

<b>sen</b> $\alpha$	0,92	0,6	0,99
<b>cos</b> $\alpha$	0,39	0,8	0,12
<b>tg</b> $\alpha$	2,35	0,75	8,27

En todos los casos solo tomaremos valores positivos.

- $sen \alpha = 0,92 \rightarrow cos \alpha = \sqrt{1 - (0,92)^2} = 0,39$

$$tg \alpha = \frac{0,92}{0,39} = 2,35$$

- $tg \alpha = 0,75$

$$\frac{sen \alpha}{cos \alpha} = 0,75 \rightarrow sen \alpha = 0,75 \cdot cos \alpha$$

$$(sen \alpha)^2 + (cos \alpha)^2 = 1 \rightarrow (0,75 \cdot cos \alpha)^2 + (cos \alpha)^2 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow (cos \alpha)^2 = 0,64 \rightarrow cos \alpha = 0,8$$

$$sen \alpha = 0,75 \cdot 0,8 = 0,6$$

- $cos \alpha = 0,12 \rightarrow sen \alpha = \sqrt{1 - (0,12)^2} = 0,99$

$$tg \alpha = \frac{0,99}{0,12} = 8,27$$

10 ■■■ Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan en la tabla siguiente ( $\alpha < 90^\circ$ ):

<b>sen</b> $\alpha$	2/3		
<b>cos</b> $\alpha$		$\sqrt{2}/3$	
<b>tg</b> $\alpha$			2

<b>sen</b> $\alpha$	2/3	$\sqrt{7}/3$	$2\sqrt{5}/5$
<b>cos</b> $\alpha$	$\sqrt{5}/3$	$\sqrt{2}/3$	$\sqrt{5}/5$
<b>tg</b> $\alpha$	$2\sqrt{5}/5$	$\sqrt{7}/2$	2

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

Como  $\alpha < 90^\circ \rightarrow \begin{cases} \text{sen } \alpha > 0 \\ \text{cos } \alpha > 0 \end{cases}$

•  $\text{sen } \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \text{cos } \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\text{tg } \alpha = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

•  $\text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{7}/3}{\sqrt{2}/3} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

•  $\text{tg } \alpha = 2 \rightarrow \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = 2 \rightarrow \text{sen } \alpha = 2 \text{ cos } \alpha$

$(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = 1 \rightarrow 4(\text{cos } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 = 1 \rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\text{sen } \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

## Calculadora

**11** ■■■ Completa la tabla siguiente, utilizando la calculadora:

$\alpha$	$15^\circ$	$55^\circ 20'$	$72^\circ 25' 40''$	$85,5^\circ$
<b>sen</b> $\alpha$				
<b>cos</b> $\alpha$				
<b>tg</b> $\alpha$				

$\alpha$	$15^\circ$	$55^\circ 20'$	$72^\circ 25' 40''$	$85,5^\circ$
<b>sen</b> $\alpha$	0,26	0,82	0,95	0,997
<b>cos</b> $\alpha$	0,97	0,57	0,30	0,078
<b>tg</b> $\alpha$	0,27	1,45	3,16	12,71

**12** ■■■ Halla el ángulo  $\alpha$  en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos.

a)  $\text{sen } \alpha = 0,58$

b)  $\text{cos } \alpha = 0,75$

c)  $\text{tg } \alpha = 2,5$

d)  $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

e)  $\text{cos } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

f)  $\text{tg } \alpha = 3\sqrt{2}$

a)  $\alpha = 35^\circ 27' 2''$

b)  $\alpha = 41^\circ 24' 35''$

c)  $\alpha = 68^\circ 11' 55''$

d)  $\alpha = 48^\circ 11' 23''$

e)  $\alpha = 54^\circ 44' 8''$

f)  $\alpha = 76^\circ 44' 14''$

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

**13** ■■■ Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  en cada uno de los casos siguientes:

a)  $\text{sen } \alpha = 0,23$

b)  $\text{cos } \alpha = 0,74$

c)  $\text{tg } \alpha = 1,75$

d)  $\text{sen } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

e)  $\text{tg } \alpha = \sqrt{3}$

f)  $\text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a)  $\text{cos } \alpha = 0,97$ ;  $\text{tg } \alpha = 0,24$

b)  $\text{sen } \alpha = 0,67$ ;  $\text{tg } \alpha = 0,91$

c)  $\text{sen } \alpha = 0,87$ ;  $\text{cos } \alpha = 0,5$

d)  $\text{cos } \alpha = 0,71$ ;  $\text{tg } \alpha = 1$

e)  $\text{sen } \alpha = 0,87$ ;  $\text{cos } \alpha = 0,5$

f)  $\text{sen } \alpha = 0,5$ ;  $\text{tg } \alpha = 0,58$

## PÁGINA 162

### Resolución de triángulos rectángulos

**14** ■■■ Halla la medida de los lados y ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos ( $\hat{A} = 90^\circ$ ):

a)  $b = 7 \text{ cm}$

$c = 18 \text{ cm}$

b)  $a = 25 \text{ cm}$

$b = 7 \text{ cm}$

c)  $b = 18 \text{ cm}$

$\hat{B} = 40^\circ$

d)  $c = 12,7 \text{ cm}$

$\hat{B} = 65^\circ$

e)  $a = 35 \text{ cm}$

$\hat{C} = 36^\circ$

a)  $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{7^2 + 18^2} \approx 19,31 \text{ cm}$

$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} = \frac{7}{18} = 0,38 \rightarrow \hat{B} \approx 21^\circ 15' 2''$

$\hat{C} = 90^\circ - 21^\circ 15' 2'' = 68^\circ 44' 58''$

b)  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24 \text{ cm}$

$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{7}{25} = 0,28 \rightarrow \hat{B} \approx 16^\circ 15' 37''$

$\hat{C} = 90^\circ - 16^\circ 15' 37'' = 73^\circ 44' 23''$

c)  $\hat{C} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow \text{sen } 40^\circ = \frac{18}{a} \rightarrow a \approx 28 \text{ cm}$

$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \text{tg } 40^\circ = \frac{18}{c} \rightarrow c \approx 21,45 \text{ cm}$

d)  $\hat{C} = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$

$\text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow \text{tg } 65^\circ = \frac{b}{12,7} \rightarrow b \approx 27,23 \text{ cm}$

$\text{cos } \hat{B} = \frac{c}{a} \rightarrow \text{cos } 65^\circ = \frac{12,7}{a} \rightarrow a \approx 30,05 \text{ cm}$

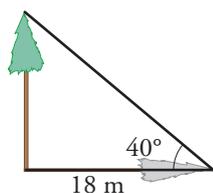
# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

e)  $\hat{B} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} \rightarrow \operatorname{sen} 36^\circ = \frac{c}{35} \rightarrow c \approx 20,57 \text{ cm}$$

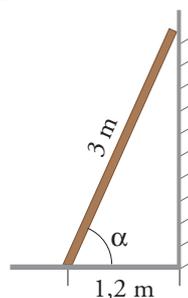
$$\operatorname{cos} \hat{C} = \frac{b}{a} \rightarrow \operatorname{cos} 36^\circ = \frac{b}{35} \rightarrow b \approx 28,32 \text{ cm}$$

- 15** ■■■ Cuando los rayos del sol forman  $40^\circ$  con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?



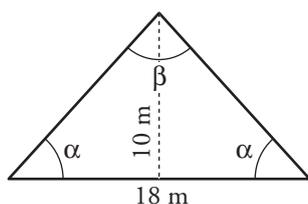
$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{x}{18} \rightarrow x = 15,1 \text{ m mide el árbol.}$$

- 16** ■■■ Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?



$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{1,2}{3} = 0,4 \rightarrow \alpha = 66^\circ 25' 19''$$

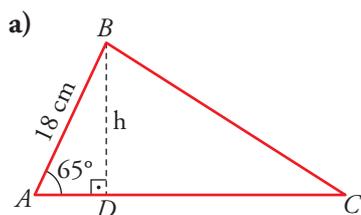
- 17** ■■■ De un triángulo isósceles conocemos su lado desigual, 18 m, y su altura, 10 m. ¿Cuánto miden sus ángulos?



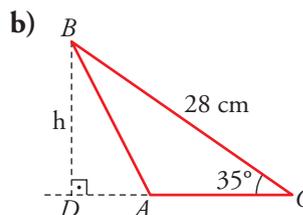
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{9} = 1,1 \rightarrow \alpha = 48^\circ 46''$$

$$\beta = 180^\circ - 2\alpha = 83^\circ 58' 28''$$

- 18** ■■■ Calcula la altura, h, de los siguientes triángulos:



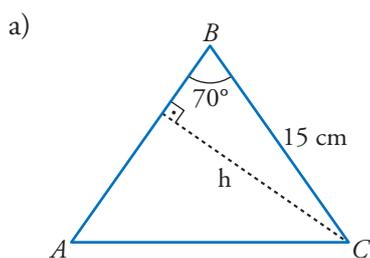
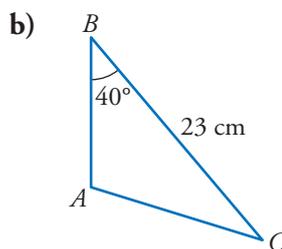
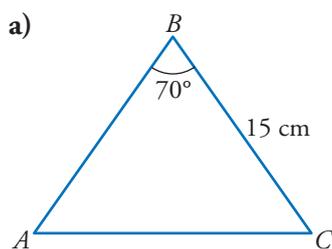
$$\text{a) } \operatorname{sen} 65^\circ = \frac{h}{18} \rightarrow h \approx 16,3 \text{ cm}$$



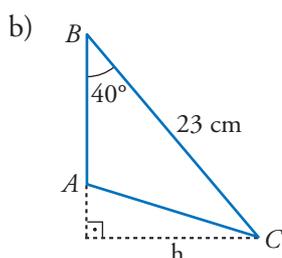
$$\text{b) } \operatorname{sen} 35^\circ = \frac{h}{28} \rightarrow h \approx 16,1 \text{ cm}$$

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

**19** ■■■ Calcula la altura sobre el lado  $AB$  en los siguientes triángulos:



$$\text{sen } 70^\circ = \frac{h}{15} \rightarrow h \approx 14,1\text{ cm}$$



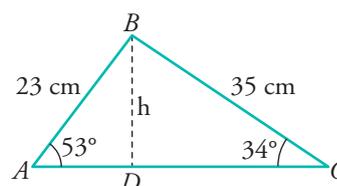
$$\text{sen } 40^\circ = \frac{h}{23} \rightarrow h \approx 14,8\text{ cm}$$

**20** ■■■ Halla:

a) La longitud  $AC$ .

b) El área del triángulo  $ABC$ .

👉 Ten en cuenta que  $AC = AD + DC$ .



$$\left. \begin{array}{l} \text{a) En } \widehat{ABD}, \cos 53^\circ = \frac{\overline{AD}}{23} \rightarrow \overline{AD} \approx 13,84\text{ cm} \\ \text{En } \widehat{BDC}, \cos 34^\circ = \frac{\overline{DC}}{35} \rightarrow \overline{DC} \approx 29\text{ cm} \end{array} \right\} \overline{AC} \approx 13,84 + 29 = 42,84\text{ cm}$$

b) Hallamos la altura  $h$  en el triángulo  $ABD$ :

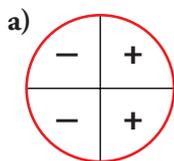
$$\text{sen } 53^\circ = \frac{h}{23} \rightarrow h \approx 18,37\text{ cm}$$

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} = \frac{42,84 \cdot 18,37}{2} \approx 393,49\text{ cm}^2$$

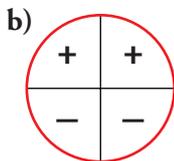


# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

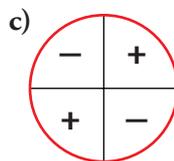
**23** ■■■ En cada uno de estos círculos está indicado el signo de las razones trigonométricas de  $\alpha$ , según el cuadrante en el que esté  $\alpha$ . ¿Cuál corresponde a  $\text{sen } \alpha$ . ¿Cuál a  $\text{cos } \alpha$ ? ¿Y cuál a  $\text{tg } \alpha$ ?



a)  $\text{cos } \alpha$



b)  $\text{sen } \alpha$

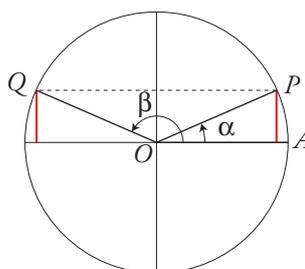


c)  $\text{tg } \alpha$

**24** ■■■ Resuelto en el libro de texto.

## PÁGINA 163

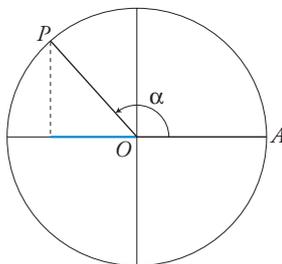
**25** ■■■ Dibuja dos ángulos cuyo seno sea  $2/5$  y halla su coseno.



$$\text{sen } \alpha = \frac{2}{5} \rightarrow \text{cos } \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \pm \sqrt{\frac{21}{25}} = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{cos } \widehat{AOP} = \frac{\sqrt{21}}{5}; \text{cos } \widehat{AOQ} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

**26** ■■■ Dibuja un ángulo menor que  $180^\circ$  cuyo coseno sea  $-2/3$  y halla su seno y su tangente.



El ángulo  $\widehat{AOP}$  cumple las condiciones.

$$\text{cos } \alpha = -\frac{2}{3} \rightarrow \text{sen } \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \text{sen } \widehat{AOP} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{tg } \widehat{AOP} = \frac{\sqrt{5}/3}{-2/3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

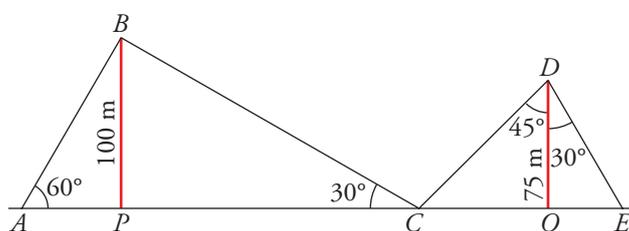
**27** ■■■ Sabiendo que  $\operatorname{tg} \alpha = -2$  y  $\alpha < 180^\circ$ , halla  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\operatorname{cos} \alpha$ .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -2 \\ (\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\operatorname{cos} \alpha)^2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s = -2c \\ 4c^2 + c^2 = 1 \rightarrow 5c^2 = 1 \rightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \end{array}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}; \operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

## PIENSA Y RESUELVE

**28** ■■■ Dos antenas de radio están sujetas al suelo por cables tal como indica la figura. Calcula la longitud de cada uno de los tramos de cable y la distancia  $AE$ .



$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{100}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} \approx 115,47 \text{ m} \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{100}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} \approx 57,74 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{100}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = 200 \text{ m} \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{100}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{PC} \approx 173,21 \text{ m}$$

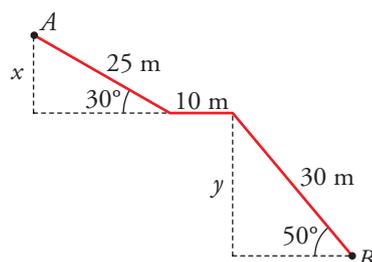
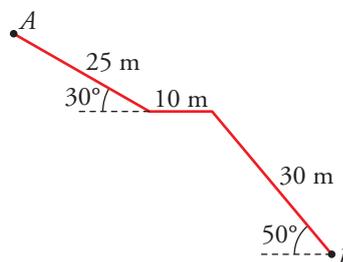
$$\operatorname{cos} 45^\circ = \frac{75}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} \approx 106,07 \text{ m} \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\overline{CQ}}{75} \rightarrow \overline{CQ} = 75 \text{ m}$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{75}{\overline{DE}} \rightarrow \overline{DE} \approx 86,6 \text{ m} \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{QE}}{75} \rightarrow \overline{QE} \approx 43,3 \text{ m}$$

$$\overline{AE} = 57,74 + 173,21 + 75 + 43,3 = 349,25 \text{ m}$$

**29** ■■■ Una escalera para acceder a un túnel tiene la forma y las dimensiones de la figura.

Calcula la profundidad del punto  $B$ .



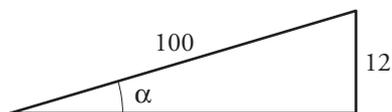
$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{x}{25} \rightarrow x = 12,5 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} 50^\circ = \frac{y}{30} \rightarrow y \approx 22,98 \text{ m}$$

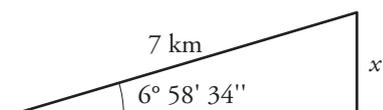
$$\text{Profundidad: } 12,5 + 22,98 = 35,48 \text{ m}$$

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 30** ■■■ Una señal de peligro en una carretera nos advierte que la pendiente es del 12%. ¿Qué ángulo forma ese tramo de carretera con la horizontal? ¿Cuántos metros hemos descendido después de recorrer 7 km por esa carretera?

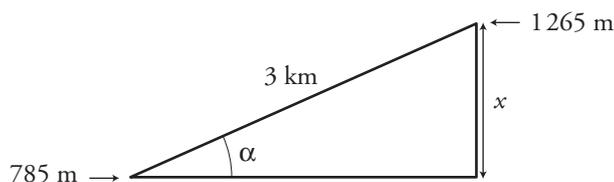


$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{12}{100} = 0,12 \rightarrow \alpha = 6^\circ 53' 32''$$



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{x}{7} \rightarrow x = 0,12 \cdot 7 = 0,84 \text{ km} = 840 \text{ m}$$

- 31** ■■■ En una ruta de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1 265 m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.



$$x = 1\,265 - 785 = 480 \text{ m}$$

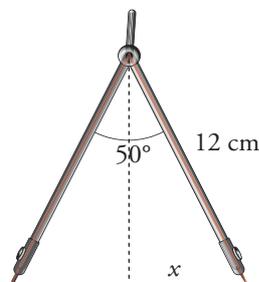
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{480}{3\,000} = 0,16 \rightarrow \alpha = 9^\circ 12' 25''$$

$$\text{Pendiente} = \operatorname{tg} \alpha = 0,162 \rightarrow 16,2\%$$

- 32** ■■■ Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de  $50^\circ$ . ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

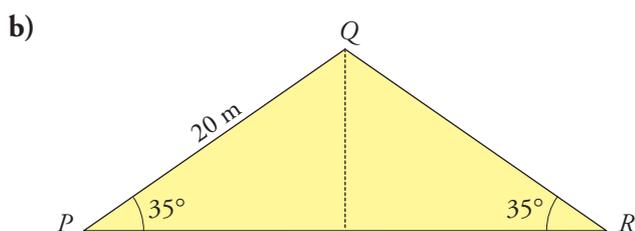
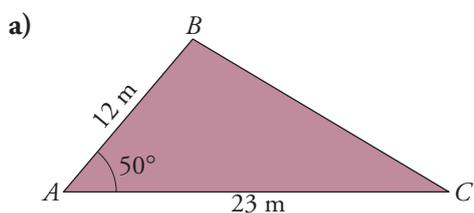
$$\operatorname{sen} 25^\circ = \frac{x}{12} \rightarrow x \approx 5,07 \text{ cm}$$

$$\text{Radio de la circunferencia} \approx 10,14 \text{ cm}$$



# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

**33** ■■■ Calcula el área de cada uno de estos triángulos:



a) Calculamos la altura,  $h$ , sobre  $AC$ :

$$\operatorname{sen} 50^\circ = \frac{h}{12} \rightarrow h \approx 9,19 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{23 \cdot 9,19}{2} = 105,685 \text{ m}^2$$

b) Calculamos la altura,  $h$ , sobre  $PR$ :

$$\operatorname{sen} 35^\circ = \frac{h}{20} \rightarrow h \approx 11,47 \text{ m}$$

Calculamos la base,  $\overline{PR}$ :

$$\operatorname{cos} 35^\circ = \frac{\overline{PR}/2}{20} \rightarrow \overline{PR} = 40 \cdot \operatorname{cos} 35^\circ \approx 32,77 \text{ m}$$

$$\text{Área} = \frac{32,77 \cdot 11,47}{2} \approx 188 \text{ m}^2$$

**34** ■■■ En el triángulo  $ABC$  calcula  $h$  y  $a$ .

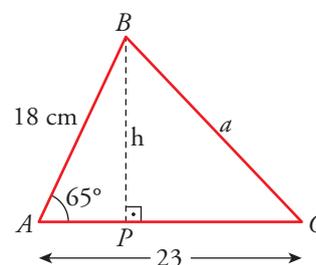
• En el triángulo  $ABP$ :

$$\operatorname{sen} 65^\circ = \frac{h}{18} \rightarrow h \approx 16,31 \text{ cm}$$

$$\bullet \operatorname{cos} 65^\circ = \frac{\overline{AP}}{18} \rightarrow \overline{AP} \approx 7,61$$

$$\overline{PC} = \overline{AC} - \overline{AP} = 23 - 7,61 = 15,39$$

$$a = \sqrt{h^2 + \overline{PC}^2} = \sqrt{16,31^2 + 15,39^2} \approx 22,42 \text{ cm}$$



# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

**35** ■■■ En el triángulo  $ABC$  halla  $x$ ,  $h$  e  $y$ .

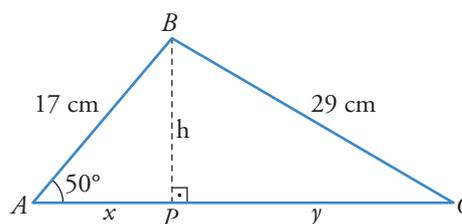
- En el triángulo  $ABP$ :

$$\cos 50^\circ = \frac{x}{17} \rightarrow x \approx 10,93 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} 50^\circ = \frac{h}{17} \rightarrow h \approx 13,02 \text{ cm}$$

- En el triángulo  $BCP$ :

$$y = \sqrt{29^2 - h^2} = \sqrt{29^2 - 13,02^2} \approx 25,91 \text{ cm}$$



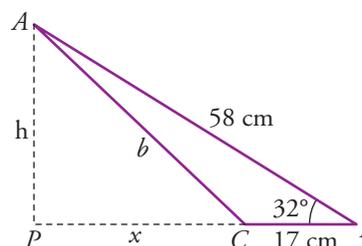
**36** ■■■ Calcula  $h$ ,  $x$  y  $b$ .

- 👁 En el triángulo  $PAB$ ,  $PB = x + 17$ .

$$\operatorname{sen} 32^\circ = \frac{h}{58} \rightarrow h \approx 30,74 \text{ cm}$$

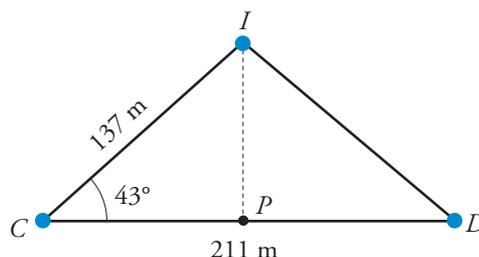
$$\cos 32^\circ = \frac{x + 17}{58} \rightarrow x \approx 32,19 \text{ cm}$$

$$b = \sqrt{x^2 + h^2} \approx 44,51 \text{ cm}$$



**37** ■■■ Conocemos la distancia de nuestra casa a la iglesia, 137 m; la distancia de nuestra casa al depósito de agua, 211 m, y el ángulo,  $43^\circ$ , bajo el cual se ve desde nuestra casa el segmento cuyos extremos son la iglesia y el depósito.

¿Cuál es la distancia que hay de la iglesia al depósito de agua?



En el triángulo  $IPC$ :

$$\cos 43^\circ = \frac{\overline{CP}}{137} \rightarrow \overline{CP} \approx 100,2 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} 43^\circ = \frac{\overline{IP}}{137} \rightarrow \overline{IP} \approx 93,43 \text{ m}$$

$$\overline{PD} = 211 - 100,2 = 110,8 \text{ m}$$

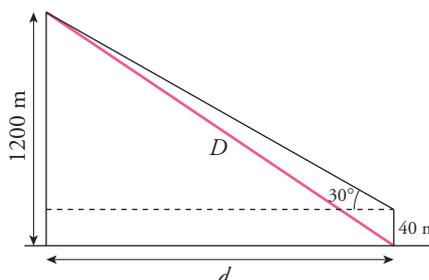
Distancia de la iglesia al depósito:

$$\overline{ID} = \sqrt{\overline{PD}^2 + \overline{IP}^2} = \sqrt{110,8^2 + 93,43^2} \approx 144,93 \text{ m}$$

## PÁGINA 164

- 38** ■■■ Desde la torre de control de un aeropuerto se establece comunicación con un avión que va a aterrizar. En ese momento, el avión se encuentra a una altura de 1 200 metros y el ángulo de observación desde la torre (ángulo que forma la visual hacia el avión con la horizontal) es de  $30^\circ$ .

¿A qué distancia está el avión del pie de la torre si esta mide 40 m de altura?



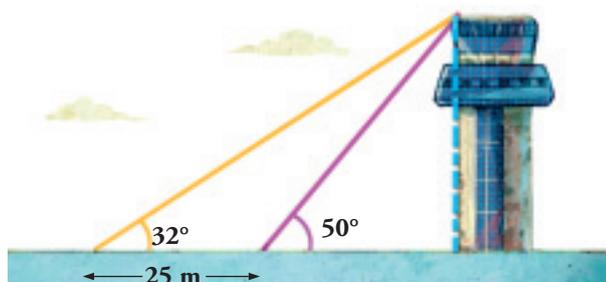
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1\,200 - 40}{d} \rightarrow d = \frac{1\,160}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 2\,009,2 \text{ m}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$D = \sqrt{(1\,200)^2 + (2\,009,2)^2} = 2\,340,3 \text{ m}$$

La distancia del avión al pie de la torre es de 2 340,3 m.

- 39** ■■■ Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de  $32^\circ$  con la horizontal.



Si me acerco 25 m, el ángulo es de  $50^\circ$ . ¿Cuál es la altura de la torre?

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 32^\circ = \frac{h}{25 + x} \\ \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 25 \operatorname{tg} 32^\circ + x \operatorname{tg} 32^\circ = h \\ x \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = h \end{array}$$

$$25 \operatorname{tg} 32^\circ + x \operatorname{tg} 32^\circ = x \operatorname{tg} 50^\circ$$

$$25 \operatorname{tg} 32^\circ = x(\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ)$$

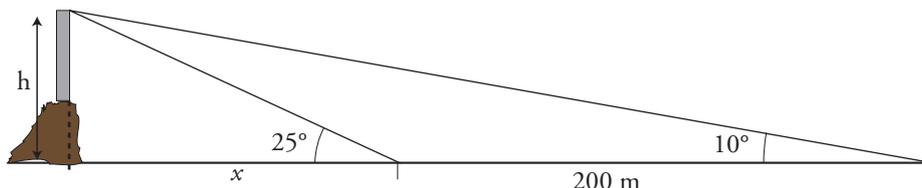
$$x = \frac{25 \operatorname{tg} 32^\circ}{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ} = 27,56 \text{ m}$$

La altura de la torre es  $h = 27,56 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = 32,84 \text{ m}$ .

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

**40** ■■■ Calcula la altura de la luz de un faro sobre un acantilado cuya base es inaccesible, si desde un barco se toman las siguientes medidas:

- El ángulo que forma la visual hacia la luz con la línea de horizonte es de  $25^\circ$ .
- Nos alejamos 200 metros y el ángulo que forma ahora dicha visual es de  $10^\circ$ .



$$\operatorname{tg} 25^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \operatorname{tg} 25^\circ$$

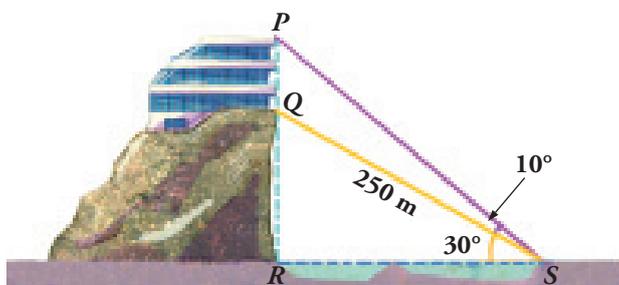
$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{h}{x + 200} \rightarrow h = (x + 200) \operatorname{tg} 10^\circ$$

$$x \operatorname{tg} 25^\circ = (x + 200) \operatorname{tg} 10^\circ \rightarrow x(\operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ) = 200 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{200 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ}{\operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ} = 121,6 \text{ m}$$

$$h = x \operatorname{tg} 25^\circ = 121,6 \cdot \operatorname{tg} 25^\circ = 56,7 \text{ m}$$

**41** ■■■ Para calcular la altura del edificio,  $\overline{PQ}$ , hemos medido los ángulos que indica la figura. Sabemos que hay un funicular para ir de  $S$  a  $Q$ , cuya longitud es de 250 m. Halla  $\overline{PQ}$ .



Calculamos  $\overline{SR}$  y  $\overline{RQ}$  con el triángulo  $SQR$ :

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{SR}}{250} \rightarrow \overline{SR} = 250 \cdot \cos 30^\circ \approx 216,5 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\overline{RQ}}{250} \rightarrow \overline{RQ} = 250 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 125 \text{ m}$$

Calculamos  $\overline{RP}$  con el triángulo  $SPR$ :

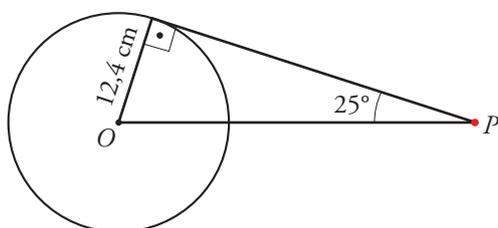
$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\overline{RP}}{\overline{SR}} \rightarrow \overline{RP} = 216,5 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \approx 181,66 \text{ m}$$

$$\text{Luego, } \overline{PQ} = \overline{RP} - \overline{RQ} = 181,66 - 125 = 56,66 \text{ m}$$

La altura del edificio es de 56,66 m.

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 42** ■■■ Las tangentes a una circunferencia de centro  $O$ , trazadas desde un punto exterior,  $P$ , forman un ángulo de  $50^\circ$ . Halla la distancia  $PO$  sabiendo que el radio de la circunferencia es 12,4 cm.



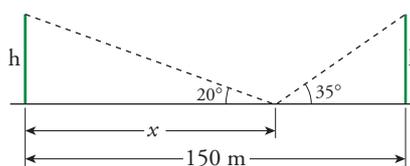
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 25^\circ &= \frac{12,4}{PO} \rightarrow \\ \rightarrow PO &= \frac{12,4}{\operatorname{sen} 25^\circ} \approx 29,34 \text{ cm} \end{aligned}$$

- 43** ■■■ Dos edificios distan entre sí 150 metros. Desde un punto del suelo que está entre los dos edificios, vemos que las visuales a los puntos más altos de estos forman con la horizontal ángulos de  $35^\circ$  y  $20^\circ$ .

¿Cuál es la altura de los edificios, si sabemos que los dos miden lo mismo?

$$\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{150 - x}$$



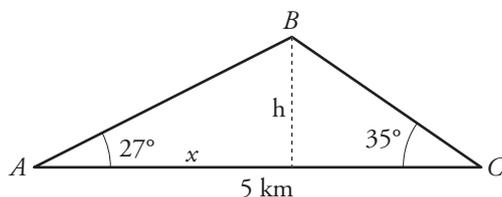
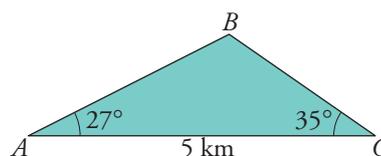
$$\left. \begin{aligned} h &= x \operatorname{tg} 20^\circ \\ h &= (150 - x) \operatorname{tg} 35^\circ \end{aligned} \right\} (150 - x) \operatorname{tg} 35^\circ = x \operatorname{tg} 20^\circ \rightarrow x = \frac{150 \cdot \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ} = 98,7 \text{ m}$$

$$h = 98,7 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = 35,92 \text{ m}$$

La altura de los dos edificios es de 35,92 m.

- 44** ■■■ En dos comisarías de policía,  $A$  y  $C$ , se escucha la alarma de un banco  $B$ .

Con los datos de la figura, calcula la distancia del banco a cada una de las comisarías.



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 27^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 35^\circ &= \frac{h}{5 - x} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} h &= x \operatorname{tg} 27^\circ \\ h &= (5 - x) \operatorname{tg} 35^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$(5 - x) \operatorname{tg} 35^\circ = x \operatorname{tg} 27^\circ \rightarrow 5 \operatorname{tg} 35^\circ = x \operatorname{tg} 35^\circ + x \operatorname{tg} 27^\circ$$

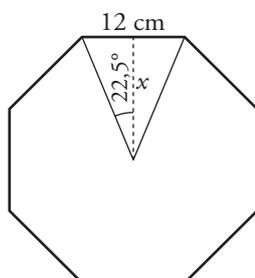
$$x = \frac{5 \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 27^\circ} = 2,89 \text{ km} \rightarrow h = 1,47 \text{ km}$$

$$\overline{AB}^2 = x^2 + h^2 \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{2,89^2 + 1,47^2} = 3,24 \text{ km}$$

$$\overline{BC}^2 = (5 - x)^2 + h^2 \rightarrow \overline{BC} = \sqrt{2,11^2 + 1,47^2} = 2,57 \text{ km}$$

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

**45** ■■■ Halla el área de un octógono regular de 12 cm de lado.



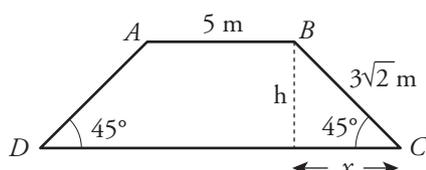
$$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ; \quad \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ; \quad \text{apotema: } x$$

$$\operatorname{tg} 22,5^\circ = \frac{6}{x} \rightarrow x = 14,49 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{(12 \cdot 8) \cdot 14,49}{2} = 695,52 \text{ cm}^2$$

**46** ■■■ En un trapecio isósceles de bases  $AB$  y  $DC$ , conocemos los lados  $\overline{AB} = 5\text{ m}$  y  $\overline{BC} = 3\sqrt{2}\text{ m}$ , y los ángulos que forma la base mayor con los lados oblicuos, que son de  $45^\circ$ .

Halla su área.



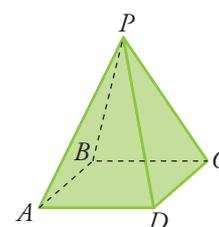
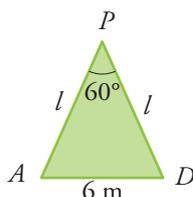
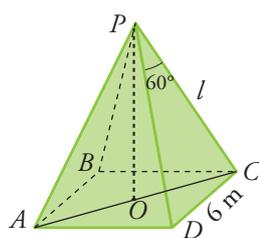
$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{h}{3\sqrt{2}} \rightarrow h = 3 \text{ m}$$

$$\operatorname{cos} 45^\circ = \frac{x}{3\sqrt{2}} \rightarrow x = 3 \text{ m}$$

$$\text{Base mayor: } 5 + 3 + 3 = 11 \text{ m}$$

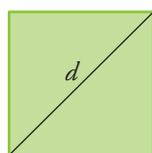
$$\text{Área} = \frac{(5 + 11) \cdot 3}{2} = 24 \text{ m}^2$$

**47** ■■■ El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular mide 6 m y el ángulo  $\widehat{APD} = 60^\circ$ . Halla su volumen.



El triángulo  $APD$  es equilátero;  $l = 6 \text{ m}$

• Altura de la pirámide:



$$d^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ m}$$

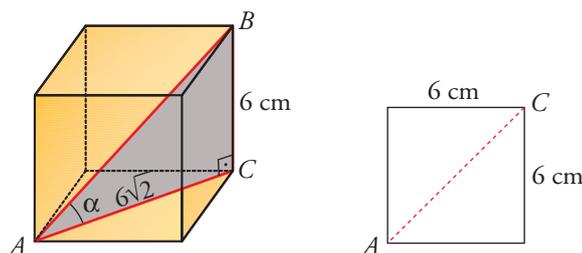
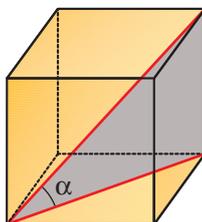
$$\overline{AO} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

En el triángulo  $APO$ ,  $\overline{PO} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ m}$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \text{ m}^3$$

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

- 48** ■■■ Halla el ángulo que forma la diagonal de un cubo de arista 6 cm con la diagonal de la base.



$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AC} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

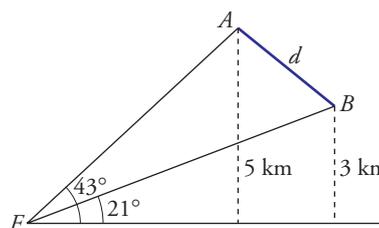
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = 35^\circ 15' 52''$$

- 49** ■■■ Desde un faro  $F$  se observa un barco  $A$  bajo un ángulo de  $43^\circ$  con respecto a la línea de la costa; y un barco  $B$ , bajo un ángulo de  $21^\circ$ . El barco  $A$  está a 5 km de la costa, y el  $B$ , a 3 km. Calcula la distancia entre los barcos.

Calculamos  $\overline{FA}$  y  $\overline{FB}$ :

$$\operatorname{sen} 43^\circ = \frac{5}{\overline{FA}} \rightarrow \overline{FA} = \frac{5}{\operatorname{sen} 43^\circ} = 7,33 \text{ km}$$

$$\operatorname{sen} 21^\circ = \frac{3}{\overline{FB}} \rightarrow \overline{FB} = \frac{3}{\operatorname{sen} 21^\circ} = 8,37 \text{ km}$$



Para calcular  $d$  utilizamos el triángulo de la derecha:

$$\operatorname{sen} 22^\circ = \frac{5}{7,33}$$

$$h = 7,33 \cdot \operatorname{sen} 22^\circ = 2,74 \text{ km}$$

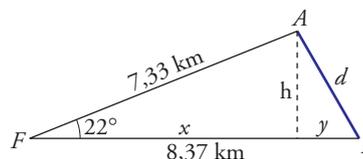
$$\operatorname{cos} 22^\circ = \frac{x}{7,33} \rightarrow x = 7,33 \cdot \operatorname{cos} 22^\circ = 6,8 \text{ km}$$

$$y = 8,37 - x \rightarrow y = 8,37 - 6,8 = 1,57 \text{ km}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{h^2 + y^2} = \sqrt{2,74^2 + 1,57^2} = 3,16 \text{ km}$$

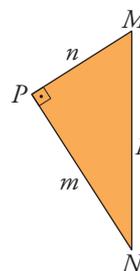
La distancia entre  $A$  y  $B$  es de 3,16 km.



## PÁGINA 165

### REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

**50** ■■■ Observa el triángulo rectángulo  $MPN$ , y en las siguientes igualdades, sustituye los puntos suspensivos por *sen*, *cos* o *tg*.



a) ...  $\hat{M} = \frac{m}{p}$

b) ...  $\hat{N} = \frac{m}{p}$

c) ...  $\hat{M} = \frac{m}{n}$

d) ...  $\hat{N} = \frac{n}{p}$

a)  $\text{sen } \hat{M} = \frac{m}{p}$

b)  $\text{cos } \hat{N} = \frac{m}{p}$

c)  $\text{tg } \hat{M} = \frac{m}{n}$

d)  $\text{sen } \hat{N} = \frac{n}{p}$

**51** ■■■ ¿Existe algún ángulo  $\alpha$  tal que  $\text{sen } \alpha = 3/5$  y  $\text{tg } \alpha = 1/4$ ?

No, porque si  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\text{cos } \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$  y  $\text{tg } \alpha = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{4}$ .

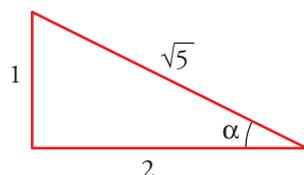
**52** ■■■ ¿Existe algún ángulo agudo cuyo seno sea mayor que la tangente? Justifica la respuesta.

El seno es siempre menor que la tangente, porque

$$\text{seno} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{y} \quad \text{tangente} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

y la hipotenusa es, siempre, mayor que el cateto contiguo.

**53** ■■■ En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide el doble que el otro. ¿Cuánto valen las razones trigonométricas del ángulo menor?



$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}; \quad \text{cos } \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{1}{2}$$

**54** ■■■ ¿Puede existir un ángulo cuyo seno sea igual a 2? ¿Y uno cuyo coseno sea igual a 3/2? Razona las respuestas.

No, porque el cateto opuesto es siempre menor que la hipotenusa y, por ello, el valor del seno de un ángulo agudo es siempre menor que 1.

El coseno es también menor que 1 por la misma razón. No puede ser igual a 3/2.

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

**55** ■■■ Indica, en cada caso, en qué cuadrante está el ángulo  $\alpha$ :

a)  $\text{sen } \alpha > 0$ ,  $\text{cos } \alpha < 0$

b)  $\text{tg } \alpha > 0$ ,  $\text{cos } \alpha > 0$

c)  $\text{sen } \alpha < 0$ ,  $\text{cos } \alpha > 0$

d)  $\text{sen } \alpha < 0$ ,  $\text{cos } \alpha < 0$

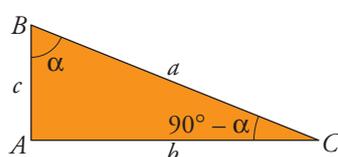
a) 2.º cuadrante.

b) 1.º cuadrante.

c) 4.º cuadrante.

d) 3.º cuadrante.

**56** ■■■ Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se llaman complementarios porque su suma es uno recto. Observa la figura, completa la tabla y expresa simbólicamente lo que obtienes:



	$\alpha$	$90^\circ - \alpha$
<b>sen</b>		
<b>cos</b>		
<b>tg</b>		

	$\alpha$	$90^\circ - \alpha$
<b>sen</b>	$b/a$	$c/a$
<b>cos</b>	$c/a$	$b/a$
<b>tg</b>	$b/c$	$c/b$

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } (90^\circ - \alpha)$$

$$\text{cos } \alpha = \text{sen } (90^\circ - \alpha)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg}(90^\circ - \alpha)}$$

**57** ■■■ Usando las relaciones fundamentales, demuestra que:

a)  $(\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha)^2 + (\text{sen } \alpha - \text{cos } \alpha)^2 = 2$

b)  $\frac{(\text{sen } \alpha)^3 + \text{sen } \alpha \cdot (\text{cos } \alpha)^2}{\text{sen } \alpha} = 1$

c)  $\frac{(\text{sen } \alpha)^3 + \text{sen } \alpha \cdot (\text{cos } \alpha)^2}{\text{cos } \alpha} = \text{tg } \alpha$

d)  $1 + (\text{tg } \alpha)^2 = \frac{1}{(\text{cos } \alpha)^2}$

a)  $(\text{sen } \alpha + \text{cos } \alpha)^2 + (\text{sen } \alpha - \text{cos } \alpha)^2 =$   
 $= (\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 + 2\text{sen } \alpha \text{cos } \alpha + (\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2 - 2\text{sen } \alpha \text{cos } \alpha = 1 + 1 = 2$

b)  $\frac{(\text{sen } \alpha)^3 + \text{sen } \alpha \cdot (\text{cos } \alpha)^2}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha [(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2]}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha} = 1$

c)  $\frac{(\text{sen } \alpha)^3 + \text{sen } \alpha \cdot (\text{cos } \alpha)^2}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha [(\text{sen } \alpha)^2 + (\text{cos } \alpha)^2]}{\text{cos } \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \text{tg } \alpha$

d)  $1 + (\text{tg } \alpha)^2 = 1 + \frac{(\text{sen } \alpha)^2}{(\text{cos } \alpha)^2} = \frac{(\text{cos } \alpha)^2 + (\text{sen } \alpha)^2}{(\text{cos } \alpha)^2} = \frac{1}{(\text{cos } \alpha)^2}$

## PROFUNDIZA

**58** ■■■ Sobre la circunferencia goniométrica señalamos un ángulo  $\alpha$  en el primer cuadrante y a partir de él dibujamos los ángulos:

$$180^\circ - \alpha \quad 180^\circ + \alpha \quad 360^\circ - \alpha$$

Busca la relación que existe entre:

a)  $\text{sen}(180^\circ - \alpha)$  y  $\text{sen } \alpha$

$\text{cos}(180^\circ - \alpha)$  y  $\text{cos } \alpha$

$\text{tg}(180^\circ - \alpha)$  y  $\text{tg } \alpha$

b)  $\text{sen}(180^\circ + \alpha)$  y  $\text{sen } \alpha$

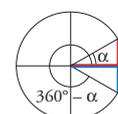
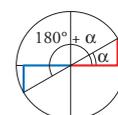
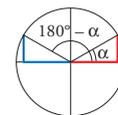
$\text{cos}(180^\circ + \alpha)$  y  $\text{cos } \alpha$

$\text{tg}(180^\circ + \alpha)$  y  $\text{tg } \alpha$

c)  $\text{sen}(360^\circ - \alpha)$  y  $\text{sen } \alpha$

$\text{cos}(360^\circ - \alpha)$  y  $\text{cos } \alpha$

$\text{tg}(360^\circ - \alpha)$  y  $\text{tg } \alpha$



a)  $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$

$\text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha$

$\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

c)  $\text{sen}(360^\circ - \alpha) = -\text{sen } \alpha$

$\text{cos}(360^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$

$\text{tg}(360^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha$

b)  $\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$

$\text{cos}(180^\circ + \alpha) = -\text{cos } \alpha$

$\text{tg}(180^\circ + \alpha) = \text{tg } \alpha$

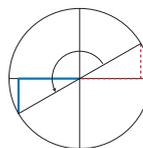
**59** ■■■ Sitúa el ángulo dado sobre la circunferencia goniométrica y expresa sus razones trigonométricas utilizando un ángulo agudo como en el ejemplo:

Ejemplo:  $215^\circ$

$\text{sen } 215^\circ = -\text{sen } 35^\circ$

$\text{cos } 215^\circ = -\text{cos } 35^\circ$

$\text{tg } 215^\circ = \text{tg } 35^\circ$



a)  $150^\circ$

b)  $240^\circ$

c)  $300^\circ$

d)  $225^\circ$

e)  $100^\circ$

f)  $320^\circ$

a)  $\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ$

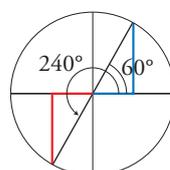
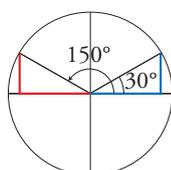
$\text{cos } 150^\circ = -\text{cos } 30^\circ$

$\text{tg } 150^\circ = -\text{tg } 30^\circ$

b)  $\text{sen } 240^\circ = -\text{sen } 60^\circ$

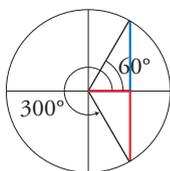
$\text{cos } 240^\circ = -\text{cos } 60^\circ$

$\text{tg } 240^\circ = \text{tg } 60^\circ$

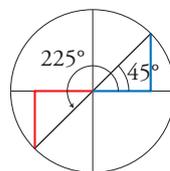


# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

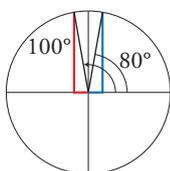
c)  $\text{sen } 300^\circ = -\text{sen } 60^\circ$   
 $\text{cos } 300^\circ = \text{cos } 60^\circ$   
 $\text{tg } 300^\circ = -\text{tg } 60^\circ$



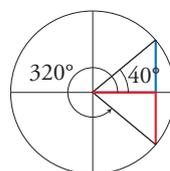
d)  $\text{sen } 225^\circ = -\text{sen } 45^\circ$   
 $\text{cos } 225^\circ = -\text{cos } 45^\circ$   
 $\text{tg } 225^\circ = \text{tg } 45^\circ$



e)  $\text{sen } 100^\circ = \text{sen } 80^\circ$   
 $\text{cos } 100^\circ = -\text{cos } 80^\circ$   
 $\text{tg } 100^\circ = -\text{tg } 80^\circ$



f)  $\text{sen } 320^\circ = -\text{sen } 40^\circ$   
 $\text{cos } 320^\circ = \text{cos } 40^\circ$   
 $\text{tg } 320^\circ = -\text{tg } 40^\circ$



**60** ■■■ Resuelto en el libro de texto.

**61** ■■■ Resuelve las siguientes ecuaciones sabiendo que  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ :

a)  $(\text{sen } x)^2 - \text{sen } x = 0$

b)  $2(\text{cos } x)^2 - \sqrt{3} \text{cos } x = 0$

c)  $3 \text{tg } x + 3 = 0$

d)  $4(\text{sen } x)^2 - 1 = 0$

e)  $2(\text{cos } x)^2 - \text{cos } x - 1 = 0$

a)  $(\text{sen } x)^2 - \text{sen } x = 0$

$$\text{sen } x(\text{sen } x - 1) = 0 \begin{cases} \text{sen } x = 0 & \begin{cases} x = 0 \\ x = 180^\circ \end{cases} \\ \text{sen } x = 1 & \rightarrow x = 90^\circ \end{cases}$$

b)  $2(\text{cos } x)^2 - \sqrt{3} \text{cos } x = 0$

$$\text{cos } x(2 \text{cos } x - \sqrt{3}) = 0 \begin{cases} \text{cos } x = 0 & \begin{cases} x = 90^\circ \\ x = 270^\circ \end{cases} \\ \text{cos } x = \sqrt{3}/2 & \begin{cases} x = 30^\circ \\ x = 330^\circ \end{cases} \end{cases}$$

c)  $3 \text{tg } x + 3 = 0 \rightarrow \text{tg } x = -1 \begin{cases} x = 135^\circ \\ x = 315^\circ \end{cases}$

# 7 Soluciones a los ejercicios y problemas

$$\text{d) } 4(\text{sen } x)^2 - 1 = 0 \rightarrow (\text{sen } x)^2 = \frac{1}{4} \begin{cases} \text{sen } x = \frac{1}{2} & \begin{cases} x = 30^\circ \\ x = 150^\circ \end{cases} \\ \text{sen } x = -\frac{1}{2} & \begin{cases} x = 210^\circ \\ x = 330^\circ \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{e) } 2(\text{cos } x)^2 - \text{cos } x - 1 = 0$$

$$\text{cos } x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} \text{cos } x = 1 & \rightarrow x = 0^\circ \\ \text{cos } x = -\frac{1}{2} & \begin{cases} x = 120^\circ \\ x = 240^\circ \end{cases} \end{cases}$$