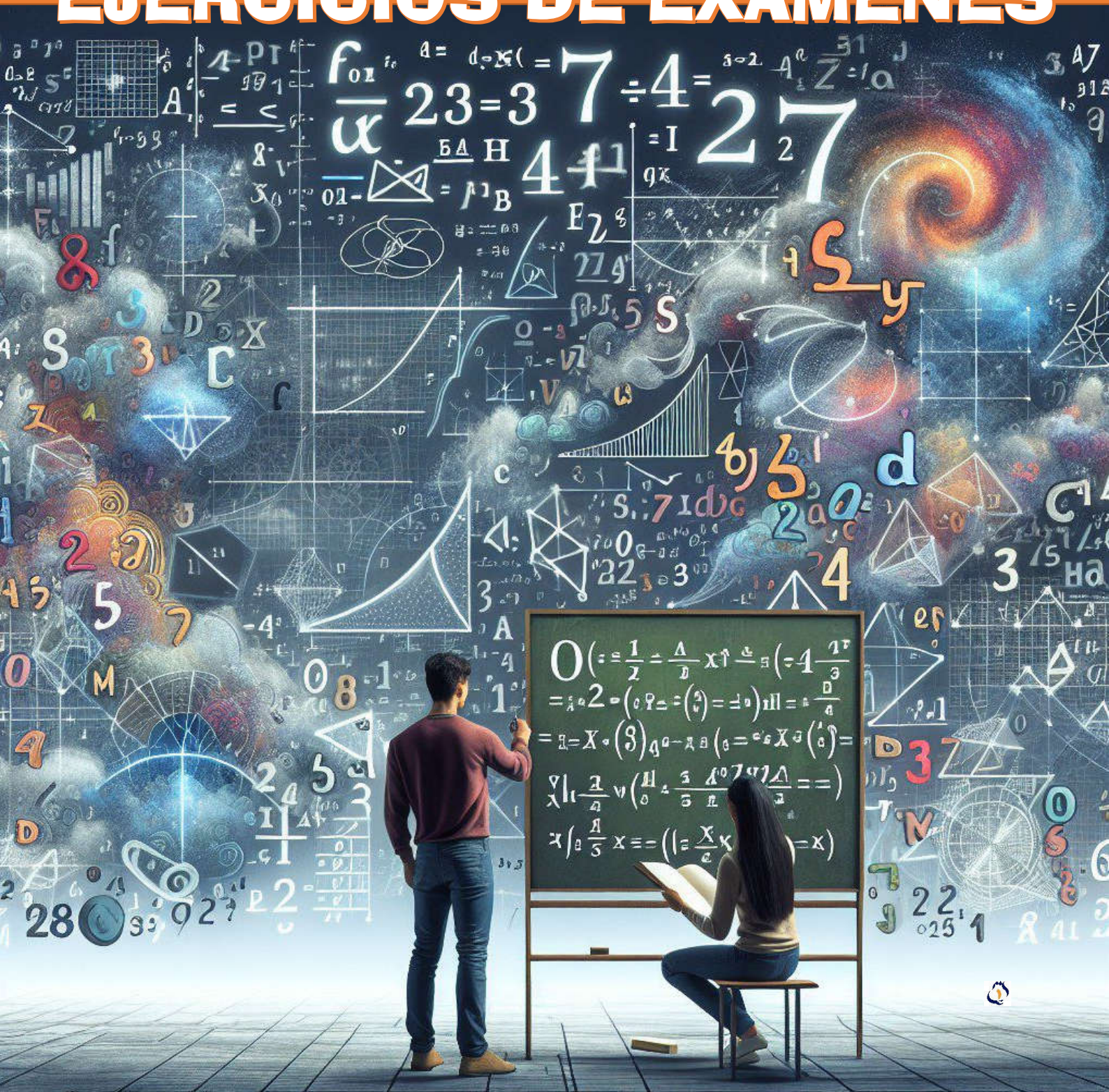
3ª EVALUACIÓN

4º ESO B

MATEMÁTICAS

EJERCICIOS DE EXÁMENES

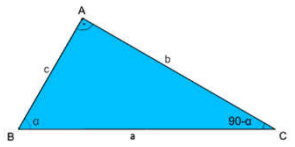


1.- Enuncia y demuestra el teorema del cateto. (2 puntos)

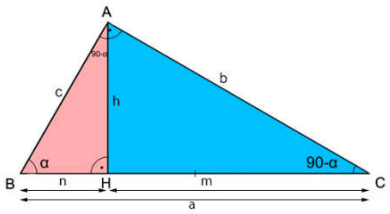
El Teorema de la altura dice: En todo **triángulo rectángulo**, el cuadrado de la altura (h) sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (n y m).

$$h^2 = m \cdot n$$

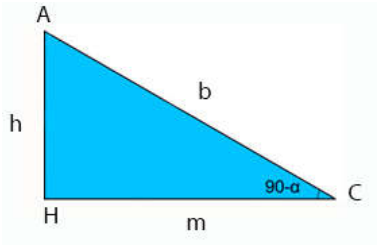
Para demostrarlo, nos ayudaremos de un triángulo rectángulo **ABC** apoyado sobre su hipotenusa,

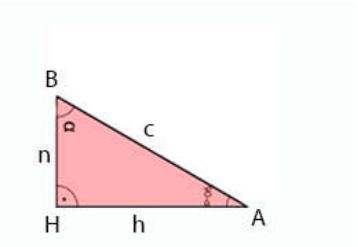


Si trazamos la altura, h, sobre su hipotenusa **a**, la parte en dos segmentos m y n que son las proyecciones sobre ella de los catetos b y c. Además, divide el triángulo rectángulo en otros dos también rectángulos: el HBA y el HAC.



Pues si nos fijamos en los triángulos HAB y en el HAC, podemos observar que son semejantes:



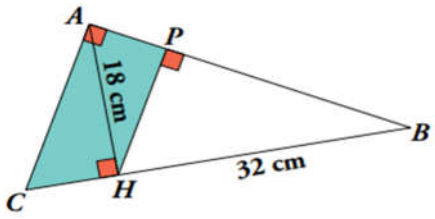


Y por tanto, aplicando la semejanza de triángulos, llegamos a:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \quad \rightarrow \quad h \cdot h = m \cdot n \quad \rightarrow \quad h^2 = m \cdot n$$

Por tanto, queda demostrado el Teorema de la Altura.

2.- En el triángulo ABC, rectángulo en A, conocemos $\overline{AH} = 18\ cm$ y $\overline{HB} = 32\ cm$. (1,5 puntos)



a) Calcula $\overline{CH}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

b) Aplica el teorema del cateto en el triángulo AHB para obtener $\overline{AP}$ y después calcula $\overline{PH}$.

c) Halla el área y el perímetro del trapecio APHC.

a) Para calcular el segmento $\overline{CH}$, que se corresponde con n, utilizaremos el teorema de la altura:

$$h^2 = m \cdot n \quad \rightarrow \quad n = \frac{h^2}{m} = \frac{18^2}{32} = \frac{81}{8} \quad \rightarrow \quad \overline{CH} = 10{,}125\ cm$$

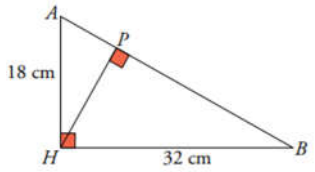
Para calcular el segmento $\overline{AC}$, que se corresponde con el cateto c, utilizaremos el teorema del cateto:

$$c^2 = a \cdot n \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a \cdot n} = \sqrt{\frac{81}{8} \cdot \frac{337}{8}} = \sqrt{\frac{27297}{64}} = \frac{9}{8}\sqrt{337} \quad \rightarrow \quad \overline{AC} = 20{,}652\ cm$$

Por último, para calcular el segmento $\overline{AB}$, que se corresponde con el cateto b, utilizaremos el teorema de Pitágoras en el triángulo AHB:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{18^2+32^2}=\sqrt{1348}=2\sqrt{337} \quad \rightarrow \quad \overline{AB}=36{,}715\ cm$$

b) Si en el triángulo AHB aplicamos el teorema del cateto:



$$\overline{AH}^2=\overline{AB}\cdot\overline{AP} \quad \rightarrow \quad \overline{AP}=\frac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}}=\frac{18^2}{\sqrt{1348}} \quad \rightarrow \quad \overline{AP}=8{,}825\ cm$$

Para calcular el segmento $\overline{HP}$ podemos usar el teorema de Pitágoras en el triángulo AHP:

$$\overline{AH}^2=\overline{HP}^2+\overline{AP}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{HP}^2=\overline{AH}^2-\overline{AP}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{HP}=\sqrt{\overline{AH}^2-\overline{AP}^2}=\sqrt{18^2-8{,}82^2}=15{,}688\ cm$$

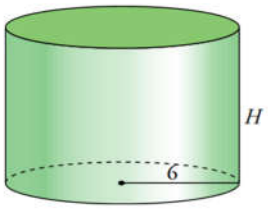
c) El perímetro de APHC será:

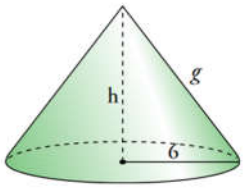
$$P_{APHC}=\overline{CH}+\overline{HP}+\overline{AP}+\overline{AC}=10{,}125+15{,}688+8{,}825+20{,}652=55{,}29\ cm$$

Y el área del trapecio APHC:

$$A_{APHC}=\frac{\overline{PH}+\overline{AC}}{2}\cdot\overline{AP}=\frac{15{,}688+20{,}652}{2}\cdot 8{,}825=160{,}35\ cm^2$$

3.– Un cilindro y un cono tienen la misma superficie total, 96π cm², y el mismo radio, 6 cm. ¿Cuál de los dos tendrá mayor volumen?





Para calcular el volumen de ambas figuras, vamos primero a calcular las alturas H y h de ambas figuras con el dato de sus áreas:

Área del cilindro: Es igual a la suma de las dos bases + el área lateral.

$$A_{Cil}=2(A_{Base})+A_{Lat}=2(\pi R^2)+2\pi RH=2(\pi 6^2)+2\pi 6H=72\pi+12\pi H$$

De aquí, como conocemos el área total, podemos calcular H:

$$A_{Cil}=96\pi \quad \rightarrow \quad 96\pi=72\pi+12\pi H \quad \rightarrow \quad 24\pi=12\pi H \quad \rightarrow \quad H=\frac{24\pi}{12\pi}=2\ cm$$

Así que, la altura del cilindro es de 2 cm.

Conocida su altura, ya podemos calcular su **volumen**, multiplicando el área de la base por la altura:

$$V_{Cil}=A_{Base}\cdot H=\pi\cdot R^2\cdot H=\pi\cdot 6^2\cdot 2=72\pi\ cm^3$$

Y su volumen es de 72π cm³.

Área del cono: Es igual a la suma del área de la base + el área lateral:

$$A_{Cono}=A_{Base}+A_{Lat}=\pi R^2+\pi RH=\pi R(R+g)$$

De aquí, como conocemos el área total, podemos calcular g:

$$A_{Cil}=96\pi \quad \rightarrow \quad 96\not\pi=\not\pi 6(6+g) \quad \rightarrow \quad 96=36+6g \quad \rightarrow \quad 60=6g \quad \rightarrow \quad g=\frac{60}{6}=10\ cm$$

Y con la generatriz, g, ya podemos calcular la altura, h, mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras al cono:

$$g^2=h^2+R^2 \quad \rightarrow \quad h^2=g^2-R^2 \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{g^2-R^2}=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{64}=8\ cm$$

Así que, la altura del cono es de 8 cm.

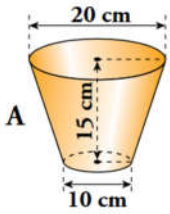
Conocida su altura, ya podemos calcular su volumen, haciendo la tercera parte del producto del área de la base por la altura:

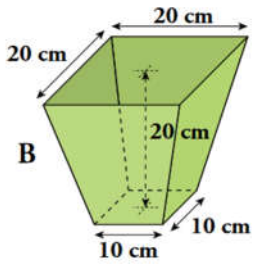
$$V_{Cono} = \frac{1}{3} A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi \ cm^3$$

Por lo tanto, su volumen es de 96π cm^3.

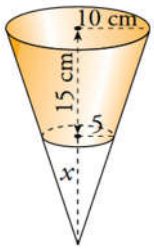
Así que, de los dos, el de mayor volumen es el cono.

4.– En un cine, las palomitas se vendían hasta ahora en recipientes del tipo A, por 3 €. El gerente está pensando en ofertar también otro formato, B, más grande. ¿Cuál crees que debería ser el precio del formato B?





Vamos a calcular primero el volumen del tronco de cono, y para ello, prolongamos la generatriz y formamos un cono. El volumen del tronco de cono será la diferencia entre el cono grande y el pequeño:



Para calcular la altura del cono pequeño, x, en el dibujo, utilizaremos la semejanza de triángulos, puesto que, en la figura, podemos observar que, dos de los lados de los triángulos están sobre la misma recta y los otros son paralelos:

$$\frac{10}{5} = \frac{15+x}{x} \quad \rightarrow \quad 10x = 5(15+x) \quad \rightarrow \quad 10x = 75 + 5x \quad \rightarrow \quad 5x = 75 \quad \rightarrow \quad x = 15 \ cm$$

Con esto ya podemos calcular los volúmenes de los conos grande y pequeño:

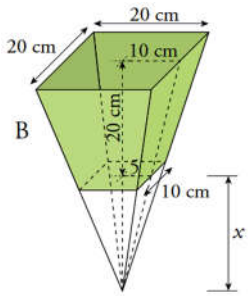
$$V_{Cono\ Grande} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 30 = 1000\pi \ cm^3$$

$$V_{Cono\ Pequeño} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 125\pi \ cm^3$$

Y el volumen del tronco de cono será la diferencia entre ambos:

$$V_{Tronco\ de\ Cono} = V_{Cono\ Grande} - V_{Cono\ Pequeño} = 1000\pi - 125\pi = 875\pi \ cm^3$$

Para calcular el volumen del tronco de pirámide, procederemos de forma similar.



Para calcular la altura de la pirámide pequeña, x, en el dibujo, utilizaremos la semejanza de triángulos, puesto que, en la figura, podemos observar que, dos de los lados de los triángulos están sobre la misma recta y los otros son paralelos:

$$\frac{10}{5} = \frac{20+x}{x} \quad \rightarrow \quad 10x = 5(20+x) \quad \rightarrow \quad 10x = 100 + 5x \quad \rightarrow \quad x = 20 \ cm$$

Con esto ya podemos calcular los volúmenes de las pirámides grande y pequeña:

$$V_{Pirámide\ Grande} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 40 = \frac{16.000}{3} \ cm^3$$

$$V_{\text{Pirámide Pequeña}} = \frac{1}{3}\cdot l^2 \cdot h = \frac{1}{3}\cdot 10^2 \cdot 20 = \frac{2000}{3}\ cm^3$$

Con todo esto, el volumen del tronco de pirámide será la diferencia entre ambos:

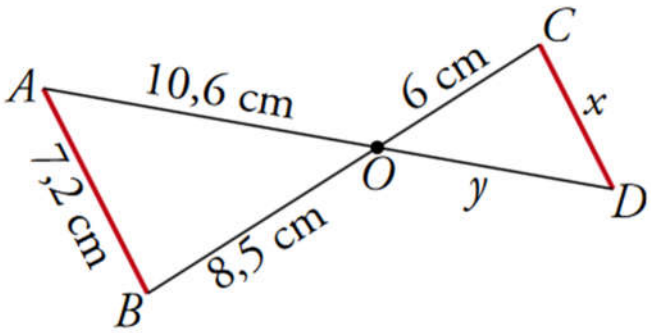
$$V_{\text{Tronco de Pirámide}} = V_{\text{Pirámide Grande}} - V_{\text{Pirámide Pequeña}} = \frac{16.000}{3} - \frac{2.000}{3} = \frac{14.000}{3}\ cm^3$$

Una vez conocidos los volúmenes de ambos recipientes de palomitas, para calcular el precio del más grande, del tronco de pirámide, haremos una regla de tres:

$$\frac{875\pi}{3€} = \frac{\frac{14000}{3}}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\frac{14000}{3}\cdot 3}{875\pi} = \frac{14000}{875\pi} = 5{,}09 \simeq 5$$

Así que, el precio del formato B será de 5 €

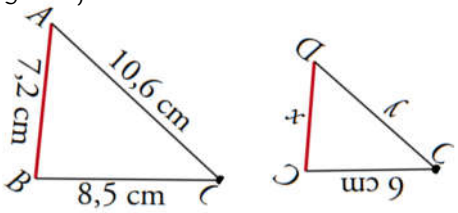
5.– Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD. **(1 punto)**



a) Razona por qué son semejantes los triángulos OAB y ODC.

Los triángulos OAB y ODC **son semejantes** porque cumplen el segundo de los criterios de semejanza, es decir, el hecho de que tengan un ángulo opuesto por el vértice $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ y un ángulo recto cada uno, implica que dos de sus ángulos sean iguales, en este caso los tres.

También son semejantes porque si giramos el triángulo COD 180° sobre su vértice O, conseguimos ponerlos en posición Tales.



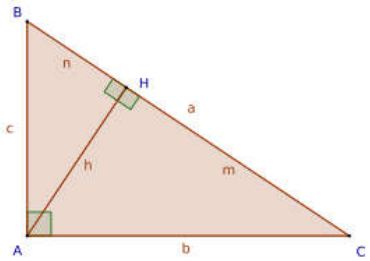
b) Calcula razonadamente el valor de x e y.

Al ser semejantes sus lados son proporcionales, y de esta forma podemos calcular fácilmente los valores de x e y, mediante una simple proporción o regla de 3:

$$\frac{x}{7{,}2} = \frac{6}{8{,}5} = \frac{y}{10{,}6} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si } \frac{x}{7{,}2} = \frac{6}{8{,}5} \quad \rightarrow \quad x = \frac{6\cdot 7{,}2}{8{,}5} = 5{,}08\ cm \\ \text{Si } \frac{6}{8{,}5} = \frac{y}{10{,}6} \quad \rightarrow \quad y = \frac{6\cdot 10{,}6}{8{,}5} = 7{,}48\ cm \end{cases}$$

Por tanto, x=5,08 cm e y=7,48 cm

6.– Un triángulo rectángulo de 60 cm² de área tiene un cateto que mide 8 cm. Calcula la altura sobre la hipotenusa y las proyecciones (m y n) de los catetos sobre ella. **(2 puntos)**



Si el cateto c mide 8 cm, y el área mide 60 cm², podemos calcular el otro cateto simplemente con la ayuda del área y apoyándolo sobre uno de los catetos:

$$A=\frac{b\cdot c}{2}=\frac{b\cdot 8}{2}=4b \quad \rightarrow \quad b=\frac{A}{4}=\frac{60}{4}=15\ cm$$

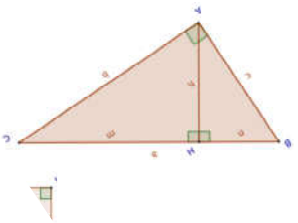
Si utilizamos Pitágoras, podemos calcular la hipotenusa a:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{15^2+8^2}=\sqrt{289}=17\ cm$$

Con todo esto, ya tenemos el valor de los catetos y de la hipotenusa.

Ahora con el cateto c y el teorema del cateto, podemos calcular su proyección sobre la hipotenusa n.

$$c^2=a\cdot n \quad \rightarrow \quad n=\frac{c^2}{a}=\frac{64}{17}=3{,}765\ cm$$



Y conocido n, podemos calcular m:

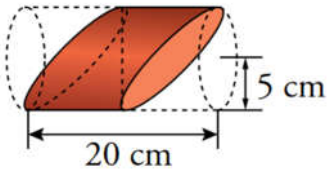
$$a=m+n \quad \rightarrow \quad m=a-n=17-\frac{64}{17}=\frac{225}{17}=13{,}235\ cm$$

Una vez conocidos m y n, y utilizando el teorema de la altura, podemos calcular h:

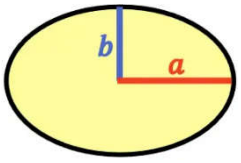
$$h^2=m\cdot n \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{m\cdot n}=\sqrt{\frac{225}{17}\cdot\frac{64}{17}}=\frac{120}{17}=7{,}059\ cm$$

Por tanto: n=64/17, m=225/17 y h=120/17

7.– Cortamos una barra de mortadela con un cuchillo como ves en la figura para hacer bocadillos. Halla la superficie y el volumen del trozo que queda.



Observando la figura podemos apreciar que se ha gastado la mitad de la mortadela, así que queda la otra mitad. Además, vemos que se han formado dos elipses paralelas de las que conocemos uno de los semiejes b=2,5 cm, que coincide con el radio, y de las que vamos a calcular el otro mediante el teorema de Pitágoras.



$D=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$ → Por tanto, el otro semieje es de $a=\frac{D}{2}=5\sqrt{2}=7{,}07\ cm$

Para calcular el área de la figura, sumaremos el área de las dos elipses más la del área lateral, recordando que el área de una elipse viene dada por: $A=\pi\cdot a\cdot b$ y que su perímetro $P=\pi(a+b)$

$$\left.\begin{aligned} A_{Bases}&=2\cdot\pi\cdot a\cdot b=2\cdot\pi\cdot 2{,}5\cdot 5\sqrt{2}=25\pi\sqrt{2}=111{,}07\ cm^2\\ A_{Lateral}&=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot r\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 5\cdot 20=100\pi=314{,}16\ cm^2\end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad A_{Total}=A_{Bases}+A_{Lat}=425{,}23\ cm^2$$

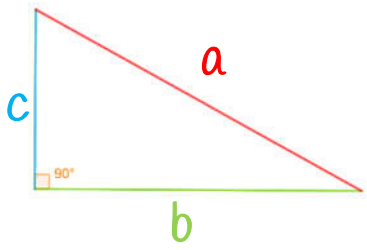
Y el volumen, será la mitad del volumen del cilindro:

$$V=\frac{1}{2}\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{1}{2}\pi\cdot 5^2\cdot 20=250\pi=784{,}4\ cm^3$$

Por tanto, el área es de 425,23 cm² y el volumen de 784,4 cm³

8.– Obtén el teorema de Pitágoras utilizando solamente el teorema del cateto. ¿Se podría demostrar utilizando solo el teorema de la altura?

Sabemos que, en un triángulo rectángulo,



$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2} \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

"La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

Aunque geométricamente se puede expresar como

« El área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos »

أو **نظرية فيثاغورس** هي علاقةٌ أساسية في الهندسة الإقليدية بين أضلاع المثلث القائم. تنص النظرية على أن مساحة المربع الذي ضلعه الوتر (المقابل للزاوية القائمة) يساوي مجموع مساحتي مربعي الضلعين الآخرين

« Si un triangle est rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse (ou côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés »

« Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos »

« The area of the square whose side is the hypotenuse (the side opposite the right angle) is equal to the sum of the areas of the squares on the other two sides »

Mediante el Teorema del cateto: $\begin{cases} b^2 = n \cdot a \\ c^2 = m \cdot a \end{cases}$ Si sumamos ambas expresiones $\rightarrow$ $b^2 + c^2 = n \cdot a + m \cdot a$ Si sacamos factor común a $\rightarrow$

$\rightarrow$ $b^2 + c^2 = a(n + m)$ Pero sabemos que m + n = a $\rightarrow$ $b^2 + c^2 = a(a)$ $\rightarrow$ $b^2 + c^2 = a^2$

y, seguidos estos sencillos pasos, llegamos al Teorema de Pitágoras.

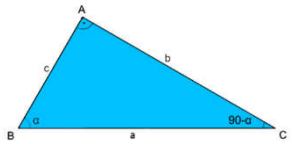
Mediante el Teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n$ **no se puede demostrar** porque en esta expresión solo tenemos información de las proyecciones de los catetos m y n, pero no de los catetos, y, como mínimo, necesitamos uno.

9.- Enuncia y demuestra el teorema de la altura.

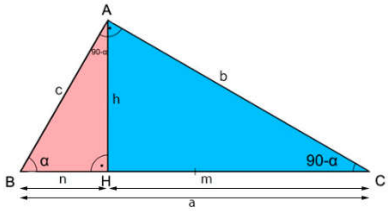
El Teorema de la altura dice: En todo **triángulo rectángulo**, el cuadrado de la altura (h) sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (n y m).

$$h^2 = m \cdot n$$

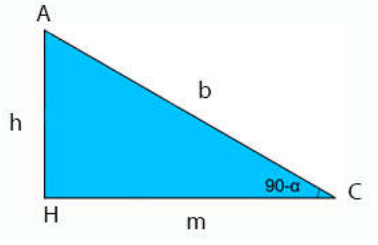
Para demostrarlo, nos ayudaremos de un triángulo rectángulo ABC apoyado sobre su hipotenusa,

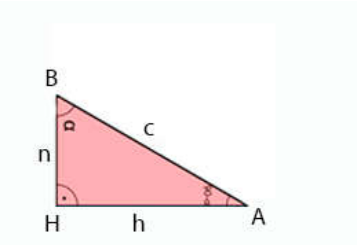


Si trazamos la altura, h, sobre su hipotenusa **a**, la parte en dos segmentos m y n que son las proyecciones sobre ella de los catetos b y c. Además divide el triángulo rectángulo en otros dos también rectángulos: el HBA y el HAC.



Pues si nos fijamos en los triángulos HAB y en el HAC, podemos observar que son semejantes:



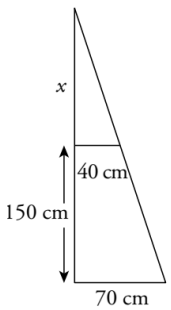


Y por tanto, aplicando la semejanza de triángulos, llegamos a:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \quad \rightarrow \quad h \cdot h = m \cdot n \quad \rightarrow \quad h^2 = m \cdot n$$

Por tanto, queda demostrado el Teorema de la Altura.

10.- La base de una escultura tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 80 cm y 140 cm, y su altura, 150 cm. Halla su área y su volumen.



Calculamos la altura de la pirámide:

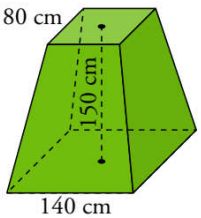
$$\frac{x+150}{x} = \frac{70}{40} \rightarrow 40x + 6\,000 = 70x \rightarrow 30x = 6\,000 \rightarrow$$

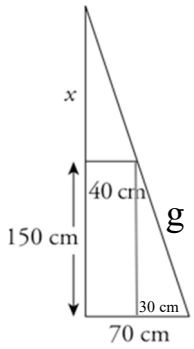
$$\rightarrow x = 200 \text{ cm}$$

Altura = 200 + 150 = 350 cm

Volumen tronco = $V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}}$

$$V = \frac{1}{3}\,140^2 \cdot 350 - \frac{1}{3}\,8^2 \cdot 200 = 1\,860\,000 \text{ cm}^3 = 1\,860 \text{ dm}^3$$





El área será la suma de todas las áreas, las dos bases mas los 4 trapecios. Así que lo primero será calcular la altura del trapecio mediante Pitágoras:

$$g^2 = 150^2 + 30^2 \quad \rightarrow \quad g = \sqrt{23400} = 30\sqrt{26}\ cm$$

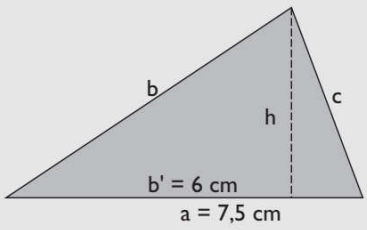
Así que el área será:

$$A = A_C + A_c + 4A_T = 140^2 + 80^2 + 4 \cdot \frac{80+140}{2} \cdot 30\sqrt{26} =$$
$$= 19.600 + 6.400 + 67.307{,}06 = 93.307{,}06\ cm^2$$

Por tanto, el área es 9,33 m² y el volumen es 1,86 m³

11.– En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide a=7,5 cm, y uno de los segmentos en que la divide la altura correspondiente mide m=6 cm. Dibuja el triángulo rectángulo y halla la longitud de b, c, n y h.

Solución:



$h^2 = b' \cdot c'$

$b' = 6$ cm

$c' = a - b' = 7{,}5 - 6 = 1{,}5$ cm

$h^2 = 6 \cdot 1{,}5 = 9$

$h = 3$ cm

Ya tenemos m=6, n=1,5 que los hemos calculado restando.

La altura la hemos calculado con el teorema de la altura:

$$h^2 = m \cdot n \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{m \cdot n} = \sqrt{1{,}5 \cdot 6} = \sqrt{9} = 3$$

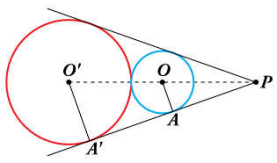
La altura mide 3 cm.

Solo nos faltan b y c que lo haremos con el teorema del cateto:

$$b^2 = m \cdot a \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{m \cdot a} = \sqrt{7{,}5 \cdot 6} = 3\sqrt{5} = 6{,}7$$

$$c^2 = n \cdot a \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{n \cdot a} = \sqrt{7{,}5 \cdot 1{,}5} = \frac{3\sqrt{5}}{2} = 3{,}35$$

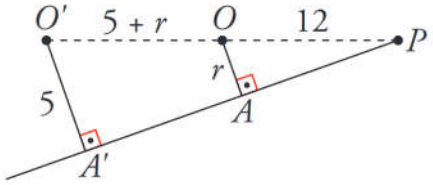
Por tanto, b=6,7 cm; c=3,35 cm; n=1,5 cm y m=6 cm



12.– Desde un punto P trazamos tangentes a dos circunferencias tangentes exteriores. Si el segmento OP mide 12 cm y el O'A' mide 5 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia menor?

Si nos fijamos en la figura, los triángulos OAP y O'A'P' son semejantes por estar en posición Tales, ya que los segmentos OA y O'A' son paralelos, además los triángulos tienen un lado común y por último comparten un ángulo.

Si extraemos de la figura dichos triángulos semejantes, podemos observar que el segmento OO' mide exactamente la suma de los dos radios de ambas circunferencias, es decir; OO'=OA+O'A', si llamamos **r** a la medida OA, podemos escribir el segmento OO' como **5+r.**



Así que con todos estos datos y utilizando la semejanza de triángulos, tenemos que: $\frac{12}{r} = \frac{12+5+r}{5}$

Operando un poco, llegamos a una ecuación de segundo grado:

$$\frac{12}{r}=\frac{12+5+r}{5} \rightarrow \frac{12}{r}=\frac{17+r}{5} \rightarrow 12\cdot 5=(17+r)\cdot r \rightarrow r^2+17r-60=0$$

Que por factorización mediante la Regla de Ruffini nos da: $(r-3)\cdot(r+20)=0$ y cuyas soluciones son:

	1	17	−60
3		3	60
	1	20	|0
−20		−20	
	1	|0	

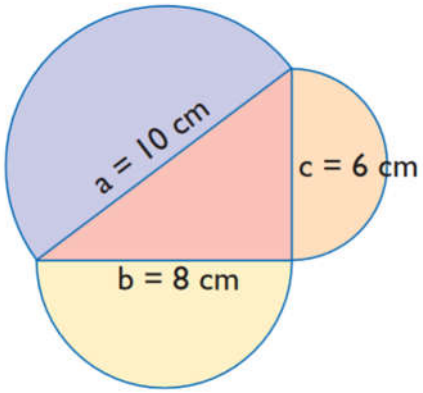
$$\rightarrow (r-3)\cdot(r+20)=0 \rightarrow \begin{cases} r-3=0 \rightarrow r=3 \\ r+20=0 \rightarrow r=-20 \end{cases}$$

Desechamos la solución r=−20 puesto que r es una distancia y no puede ser negativa.

Y con esto nos queda que, el radio de la circunferencia pequeña mide 3 cm. OA=3 cm.

13.– Se tiene un triángulo rectángulo cuyos lados miden a = 10 cm, b = 8 cm y c = 6 cm. En la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, cambia el cuadrado por un semicírculo. Calcula el área de los tres semicírculos y comprueba si se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

La interpretación geométrica adaptada a este caso diría que el área del semicírculo de la hipotenusa tiene que ser igual a la suma de las áreas de los semicírculos de los catetos:



Área del semicírculo de radio a = 10 cm

$A_1 = \pi \cdot 10^2/2 = 157{,}08\ cm^2$

Área del semicírculo de radio b = 8 cm

$A_2 = \pi \cdot 8^2/2 = 100{,}53\ cm^2$

Área del semicírculo de radio c = 6 cm

$A_3 = \pi \cdot 6^2/2 = 56{,}55\ cm^2$

$A_2 + A_3 = 100{,}53 + 56{,}55 = 157{,}08\ cm^2$

Por tanto, vemos que se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, ya que la suma da el mismo resultado.

14.– Sabiendo que la tangente de un ángulo agudo del segundo cuadrante es $\tan\beta=-\sqrt{3}$, calcula las otras restantes razones trigonométricas y expresa el ángulo β en radianes y en grados sexagesimales.

Sabemos que la tangente de un ángulo viene dada por el cociente entre su seno y su coseno:

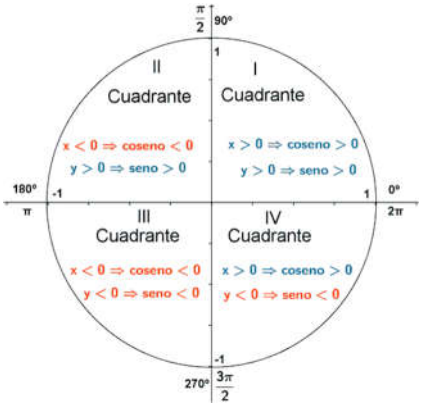
$$tg\,\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}=-\sqrt{3} \rightarrow sen\alpha=-\sqrt{3}\cdot\cos\alpha$$

Con esta relación entre ambas, y sustituyendo en la identidad fundamental de la trigonometría:

$$sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \rightarrow \left(-\sqrt{3}\cdot\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1 \rightarrow 3\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \rightarrow 4\cos^2\alpha=1$$

Llegamos a:

$$4\cos^2\alpha = 1 \quad \overset{\text{De donde}}{\rightarrow} \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$



Como estamos en el segundo cuadrante, usando el criterio de signos de las razones trigonométricas, sabemos que el coseno es negativo, por tanto:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

Y ahora calculamos el seno:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \leftarrow \quad \text{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Otra vez, usando el criterio de signos, el seno valdrá: $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Conocidas las razones trigonométricas principales, podemos calcular las inversas:

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \text{sec}\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

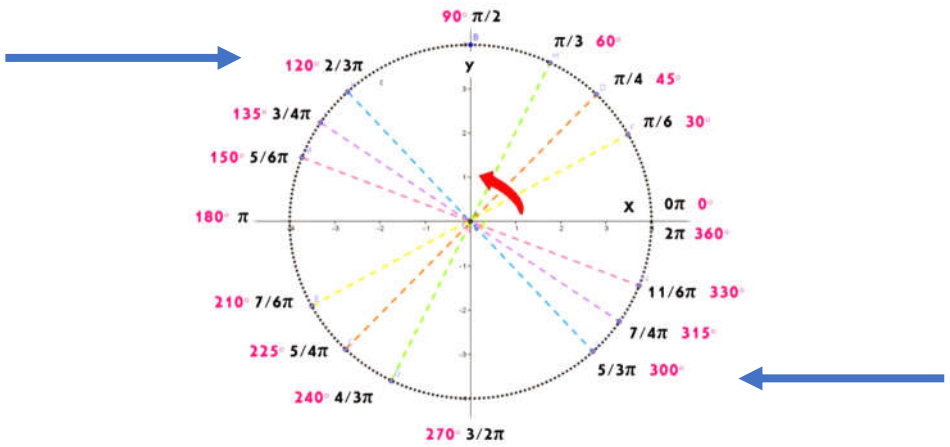
Por tanto, las razones pedidas del ángulo α son:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$	$\tan\alpha = -\sqrt{3}$
$\text{cosec}\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\text{sec}\,\alpha = -2$	$\cot\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Para calcular el ángulo β, basta con hacer el arco tangente de $-\sqrt{3}$, por tanto:

$$\beta = \text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -60° \quad \rightarrow \quad \beta = 300° \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{180} = \frac{\beta}{60} \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

El ángulo de -60°, se corresponde con el ángulo de 300°, pero este está en el 4° cuadrante y nuestro ángulo β está en el segundo cuadrante, así que tenemos que buscar el ángulo equivalente en el segundo cuadrante. Para ello nos ayudaremos de la circunferencia goniométrica:



Se ve claramente que el ángulo de 300° se corresponde con el de 120° en el segundo cuadrante, por lo tanto:

$$\beta = 120° \rightarrow \frac{2\pi}{360} = \frac{\beta}{120} \rightarrow \beta = \frac{2\cdot\pi\cdot 120}{360} \rightarrow \beta = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

15.– Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $\dfrac{\text{sen}\,\Delta + \cot\Delta}{\tan\Delta + \text{cosec}\,\Delta} = \cos\Delta$

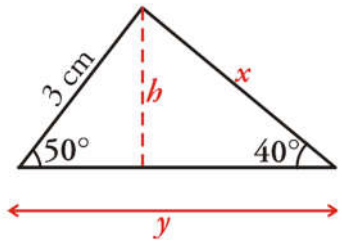
$$\frac{\text{sen}\,\Delta + \cot\Delta}{\tan\Delta + \text{cosec}\,\Delta} = \cos\Delta \xrightarrow{\text{Escribimos todas en función de seno y coseno}} \frac{\text{sen}\,\Delta + \dfrac{\cos\Delta}{sen\Delta}}{\dfrac{sen\Delta}{\cos\Delta} + \dfrac{1}{sen\Delta}} = \cos\Delta \xrightarrow{\text{Reducimos a común denominador}} \frac{\dfrac{sen^2\Delta + \cos}{\text{sen}\,\Delta}}{\dfrac{sen^2\Delta + \cos}{\cos\Delta\cdot\text{sen}\,\Delta}} = \cos\Delta$$

$$\xrightarrow{\text{Operamos}} \frac{(sen^2\Delta + \cos)\cdot(\cos\Delta\cdot\text{sen}\,\Delta)}{(sen^2\Delta + \cos)\cdot(\text{sen}\,\Delta)} = \cos\Delta \xrightarrow{\text{Simplificamos}} \frac{\cancel{(sen^2\Delta + \cos)}\cdot(\cos\Delta\cdot\cancel{\text{sen}\,\Delta})}{\cancel{(sen^2\Delta + \cos)}\cdot\cancel{(\text{sen}\,\Delta)}} = \cos\Delta$$

→ Llegamos a: $\cos\Delta = \cos\Delta$

Por tanto, queda demostrada la identidad.

16.– Halla los valores de x, y, h en el siguiente triángulo:



Como podemos observar, la altura parte el triángulo dado en otros dos triángulos rectángulos, y **si nos fijamos en el triángulo de la izquierda**, con ayuda del seno de 50, podemos calcular h:

$$\text{sen}\,50° = \frac{h}{3} \xrightarrow{\text{de donde}} h = 3\cdot sen50° \rightarrow h = 2{,}30 \text{ cm}$$

Fijándonos ahora en el triángulo de la derecha, con el seno de 40° podemos calcular el valor de x:

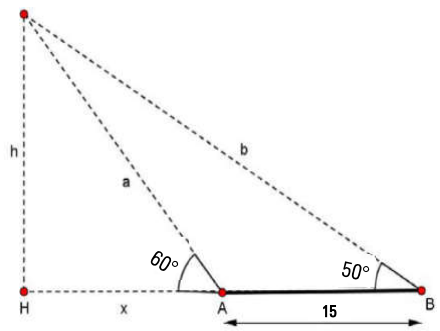
$$\text{sen}\,40° = \frac{h}{x} \xrightarrow{\text{de donde}} x = \frac{h}{\text{sen}\,40°} \rightarrow x = \frac{2{,}30}{\text{sen}\,40°} \rightarrow x = 3{,}58 \text{ cm}$$

Conocida la x, con la ayuda del teorema de Pitágoras podemos calcular la y:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow y^2 = 3^2 + (3{,}58)^2 \rightarrow y = 4{,}67 \text{ cm}$$

Por tanto, h=2,30 cm; x=3,58 cm e y=4,67 cm

17.– Desde la calle, vemos el punto más alto del campanario de la iglesia de mi pueblo con un ángulo de 60°. Si nos retiramos 15 metros en línea recta, este ángulo pasa a ser de es de 50°. ¿Cuál es la altura de la iglesia?



Si nos ayudamos de un croquis obtenemos el dibujo de la izquierda, donde hemos llamado h a la altura de la iglesia y x a la distancia entre el observador y el pie de la iglesia.

La razón trigonométrica que relaciona los catetos opuestos y los catetos contiguos es la tangente, así que:

En el triángulo pequeño: $\tan 60° = \dfrac{h}{x}$

Mientras que en el triángulo grande: $\tan 50° = \dfrac{h}{x+15}$

Con ambas ecuaciones, formamos un sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \tan 60° = \dfrac{h}{x} \\ \tan 50° = \dfrac{h}{x+15} \end{cases}$

Como nos piden calcular primero h, vamos a despejar x en la primera ecuación:

$$\text{De } \tan 60° = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{h}{\tan 60°}$$

Para después sustituirla en la segunda:

$$\text{En } \tan 50° = \frac{h}{x+15} \quad \rightarrow \quad \tan 50° = \frac{h}{\frac{h}{\tan 60°}+15} \quad \xrightarrow{\text{Operando un poco}} \quad \tan 50° = \frac{h}{\frac{h}{\tan 60°}+\frac{15\cdot\tan 60°}{\tan 60°}} \quad \rightarrow$$

$$\tan 50° = \frac{h}{\frac{h+15\tan 60°}{\tan 60°}} \quad \rightarrow \quad \tan 50° = \frac{h\cdot\tan 60°}{h+15\tan 60°} \quad \xrightarrow{\text{Operando}} \quad (h+15\tan 60°)\tan 50° = h\cdot\tan 60° \quad \rightarrow$$

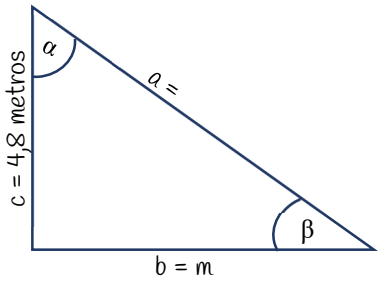
$$\rightarrow \quad h\cdot\tan 50° + 15\cdot\tan 60°\cdot\tan 50° = h\cdot\tan 60° \quad \xrightarrow{\text{Agrupando}} \quad h\cdot\tan 60° - h\cdot\tan 50° = 15\cdot\tan 60°\cdot\tan 50° \quad \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{Sacamos factor común h}} \quad h\cdot(\tan 60° - \tan 50°) = 15\cdot\tan 60°\cdot\tan 50° \quad \xrightarrow{\text{Despejamos h}} \quad h = \frac{15\cdot\tan 60°\cdot\tan 50°}{\tan 60° - \tan 50°} = 5{,}806 \ m$$

$$\rightarrow \quad h = 57{,}31 \ m$$

Por tanto, la alturade la iglesia es de 57,31 metros

18.– Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54°. Halla la medida del resto de los lados, de los ángulos del triángulo y de su área.



Como es un triángulo rectángulo y conocemos un ángulo y su cateto opuesto, podemos ayudarnos del seno para calcular la hipotenusa:

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad a = \frac{c}{\text{sen } \beta} = \frac{4{,}8}{\text{sen } 54°}$$

$$\rightarrow \quad a = 5{,}93 \ m$$

Una vez hecho esto, por el Teorema de Pitágoras, calculamos el cateto restante, b:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad b = \sqrt{5{,}93^2 - 4{,}8^2} = 3{,}49 \quad \rightarrow \quad b = 3{,}49 \ m$$

Conocidos ya los 3 lados y un ángulo, calcularemos el otro sabiendo que son complementarios

$$\alpha = 90° - \beta = 90° - 54° = 36° \quad \rightarrow \quad \alpha = 36°$$

Así que, los lados son a=5,93; b= 3,49 y c=4,8 m y los ángulos 54° y 36°

Para calcular el área, lo haremos mediante el semiproducto de la base por la altura:

$$A = \frac{b\cdot c}{2} = \frac{4{,}8 \cdot 3{,}49}{2} \quad \rightarrow \quad A = 8{,}38 \ m^2$$

Y el área es de A=8,38 metros cuadrados.

19.– Dado un ángulo del segundo cuadrante cuyo $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}$, calcula las restantes razones trigonométricas e indica la amplitud del ángulo α, tanto en radianes como en grados sexagesimales.

De la identidad fundamental de la trigonometría, como conocemos el seno, despejamos el coseno:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \rightarrow \cos^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\alpha \rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

Operando:

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} \rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5} \rightarrow \cos\alpha=-\frac{4}{5}$$

Cogemos la **solución negativa** por que estamos en el segundo cuadrante y en él, el coseno es negativo.

Como la tangente de un ángulo es el cociente entre el seno y el coseno y conocemos ambos, podemos calcularla:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{3/5}{-4/5}=-\frac{3}{4} \rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$$ (1 punto)

Las funciones trigonométricas inversas son:

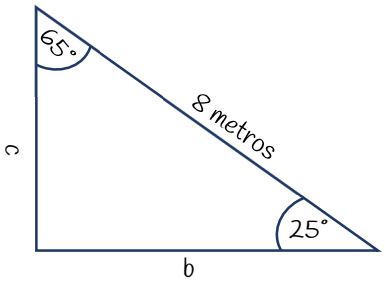
$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{-4/5}=-\frac{5}{4} \rightarrow \sec\alpha=-\frac{5}{4} \qquad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1}{3/5}=\frac{5}{3} \rightarrow \operatorname{cosec}\alpha=\frac{5}{3}$$

Y por último la cotangente: $\operatorname{cotg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \rightarrow \operatorname{cotg}\alpha=\frac{-4/5}{3/5}=-\frac{4}{3} \rightarrow \operatorname{cotg}\alpha=-\frac{4}{3}$ (0,5 puntos)

Si cos α= –4/5, entonces **α = Arcsen (–4/5) = 143° 7' 48,37" =2,5 rad.** (0,5 puntos)

Así, Sen α=3/5; Cos α=–4/5; Tg α=–3/4; Cosec α=5/3; Sec α=–5/4 y Cotg α=–4/3 y α=143° 7' 48,37" = 2,5 rad.

20.– De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide 8 cm y que uno de sus ángulos es de 25°. Calcula todos sus ángulos y lados, además de su área. **(2 puntos)**



Si uno de los ángulos mide 25°, como se trata de un triángulo rectángulo, el otro ángulo mide 90°–25°=65°.

Y ahora, conocidos los tres ángulos, solo falta a conocer los lados. (0,5 puntos)

Para ello, utilizaremos las razones trigonométricas del ángulo de 25°:

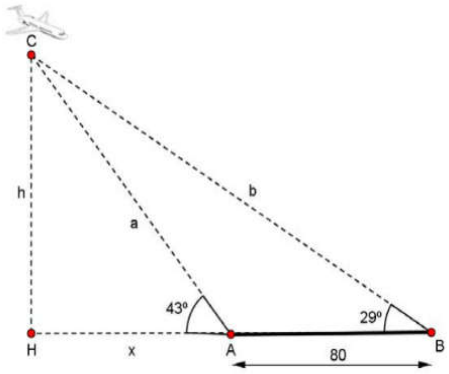
$$\operatorname{sen}25°=\frac{c}{8} \rightarrow c=8\cdot\operatorname{sen}25° \rightarrow c=3{,}38 \text{ m}$$

$$\cos 25°=\frac{b}{8} \rightarrow b=8\cdot\cos 25° \rightarrow b=7{,}25 \text{ m}$$ (1 punto)

Para calcular el área, utilizaremos: $A=\frac{\text{base x altura}}{2}=\frac{7{,}25\cdot 3{,}38}{2}=12{,}253 \text{ m}^2$ (0,5 puntos)

Por tanto, C=25 °, B=65 °, c=3,38 m, b=7,25 m y el área es de 12,253 m².

21.– Desde el centro de Granada se observa un avión bajo un ángulo de 29° con la horizontal, en ese mismo instante, y desde la ciudad de Jaén, se ve ese mismo avión bajo otro ángulo de 43° también con la horizontal. Sabiendo que el avión no se encuentra entre ambas ciudades, y que distan 80 kilómetros entre ellas. ¿A qué altura está el avión en ese momento? ¿A qué distancia se encuentra de cada ciudad? **(2 puntos)**



Tenemos dos triángulos rectángulos: el AHC y el BHC.

- ✓ En el triángulo AHC se verifica que: $tg(43°)=\frac{h}{x}$
- ✓ En el triángulo BHC se verifica que: $tg(29°)=\frac{h}{x+80}$

Con estas dos ecuaciones podemos formar un sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} tg(43°)=\frac{h}{x} \\ tg(29°)=\frac{h}{x+80} \end{cases}$ (0,5 puntos)

Si despejamos **h** de la primera ecuación llegamos a: $tg\,(43°)=\frac{h}{x} \overset{\text{De donde}}{\rightarrow} h=x\cdot tg\,(43°)$ (1)

y si lo **sustituimos** en la segunda, llegamos a:

$$tg\,(29°)=\frac{h}{x+80} \rightarrow tg\,(29°)=\frac{x\cdot tg\,(43°)}{x+80}$$

Donde, si operamos, llegamos a:

$$(x+80)tg(29°)=x\cdot tg(43°) \rightarrow x\cdot tg(29°)+80\cdot tg(29°)=x\cdot tg(43°)$$

$$\rightarrow 80\cdot tg(29°)=x\cdot tg(43°)-x\cdot tg(29°)$$

Y sacando factor común la x, podemos despejarla y calcularla:

$$80\cdot tg(29°)=x\cdot tg(43°)-x\cdot tg(29°) \rightarrow 80\cdot tg(29°)=x\left[tg(43°)-tg(29°)\right]$$

$$\rightarrow x=\frac{80\cdot tg(29°)}{\left[tg(43°)-tg(29°)\right]}=117{,}25 \text{ km}$$

Una vez conocida la x, podemos calcular la altura **h** de la expresión (1), así que;

$$h=x\cdot tg(43°) \rightarrow h=117{,}25\cdot tg(43°)=109{,}34 \text{ km}$$ (1 punto)

Para calcular la distancia del avión a Granada (B) y a Jaén (A) podemos hacerlo usando el teorema de Pitágoras o utilizando las razones trigonométricas, vamos a hacerlo usando las razones trigonométricas:

$$sen(29°)=\frac{h}{b} \rightarrow b=\frac{h}{sen(29°)}=\frac{109{,}34}{sen(29°)}=225{,}53 \text{ km}$$

(0,5 puntos)

$$sen(43°)=\frac{h}{a} \rightarrow a=\frac{h}{sen(43°)}=\frac{109{,}34}{sen(43°)}=160{,}32 \text{ km}$$

Por tanto, el avión vuela a casi 110 km de altura y está a 225 km de Granada y a 160 km de Jaén.

22.- Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $(sen\,x-cos x)^2+(sen\,x+cos x)^2=2$

Si desarrollamos ambas identidades notables:

$$(sen\,x-cos x)^2+(sen\,x+cos x)^2=2 \rightarrow sen^2x+cos^2x-2\cdot senx\cdot cos x+sen^2x+cos^2x+2\cdot senx\cdot cos x=2$$

Y agrupamos términos, vemos que los dobles productos se anulan:

$$sen^2x+\cos^2x-\cancel{2\cdot senx\cdot\cos x}+sen^2x+\cos^2x+\cancel{2\cdot senx\cdot\cos x}=2 \quad \rightarrow \quad 2sen^2x+2\cos^2x=2$$

Por tanto, sacando factor común 2 en la expresión anterior llegamos a:

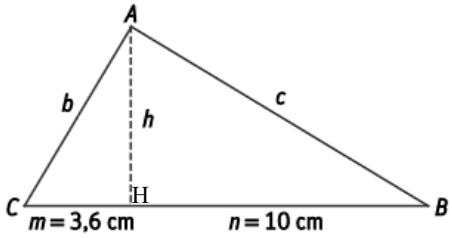
$$2sen^2x+2\cos^2x=2 \quad \rightarrow \quad 2\left(sen^2x+\cos^2x\right)=2$$

Y sabiendo que la identidad fundamental de la trigonometría afirma que: $sen^2x+\cos^2x=1$ llegamos a:

$$2\left(sen^2x+\cos^2x\right)=2 \quad \rightarrow \quad 2(1)=2 \quad \rightarrow \quad 2=2$$ **que es una identidad.**

Por tanto, queda demostrada la identidad trigonométrica propuesta.

23.– Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre su hipotenusa valen m = 3,6 cm y n = 10 cm, respectivamente. Resuelve el triángulo y calcula su área. (2 puntos)



Si hacemos un croquis con los datos del problema, obtenemos la figura de la izquierda.

Para obtener la hipotenusa del triángulo, bastaría con sumar las dos proyecciones m y n, por tanto:

$$a=m+n=10+3{,}6=13{,}6 \quad \rightarrow \quad a=13{,}6\ cm$$

Como conocemos m y n, podemos calcular la altura **h** aplicando el **teorema de la altura**, que decía que en un triángulo rectángulo la altura al cuadrado era igual al producto de las proyecciones de los dos catetos sobre ella, por tanto:

$$h^2=m\cdot n \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{m\cdot n}=\sqrt{3{,}6\cdot 10}=\sqrt{36}=6 \quad \rightarrow \quad h=6\ cm$$

Para calcula el ángulo B, nos podemos fijar en el triángulo AHB y utilizar la tangente puesto que conocemos el cateto opuesto h y el cateto contiguo n, así q

$$tg\ B=\frac{h}{n} \quad \rightarrow \quad B=Arctg\left(\frac{h}{n}\right)=Arctg\left(\frac{6}{10}\right)=30^\circ\ 57'\ 49.52'' \quad \rightarrow \quad B=31^\circ$$

Conocido B, podemos calcular C:

$$C=90^\circ-B=90^\circ-30^\circ\ 57'\ 49.52''=59^\circ\ 2'\ 10{,}48'' \quad \rightarrow \quad C=59^\circ$$

El cateto c lo podemos calcular áplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo AHB:

$$c^2=n^2+h^2 \quad \rightarrow \quad c=\sqrt{n^2+h^2}=\sqrt{10^2+6^2}=\sqrt{136}=2\sqrt{34}=11{,}66 \quad \rightarrow \quad c=11{,}66\ cm$$

Y el cateto b, por ejemplo, mediante el seno de C en el triángulo AHC:

$$sen\ C=\frac{h}{b} \quad \rightarrow \quad b=\frac{h}{sen\ C}=\frac{6}{sen(59^\circ)}=6{,}9998 \quad \rightarrow \quad b=7\ cm$$

Y para terminar, su área será:

$$A=\frac{base\ x\ altura}{2}=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{13{,}6\cdot 6}{2}=40{,}8 \quad \rightarrow \quad Area=40{,}8\ cm^2$$

Por tanto, a=13,6 cm; b=7 cm; c) 11,66 cm; A=90°, B=31°, C=59° y el Área=40,8 cm².

24.– Dado un ángulo α del cuarto cuadrante cuya $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

a) Calcula el valor exacto de las restantes razones trigonométricas del ángulo α (las 5) **(1,5 puntos)**

Sabemos que la tangente de un ángulo viene dada por el cociente entre su seno y su coseno:

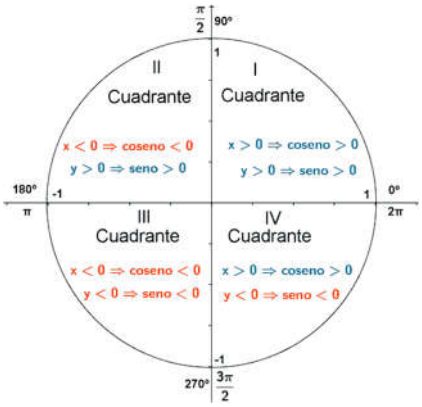
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos\alpha$$

Con esta relación entre ambas, y sustituyendo en la identidad fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \frac{1}{3}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \frac{4}{3}\cos^2\alpha = 1$$

Llegamos a:

$$\frac{4}{3}\cos^2\alpha = 1 \xrightarrow{\text{De donde}} \cos^2\alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Como estamos en el cuarto cuadrante, usando el criterio de signos de las razones trigonométricas, sabemos que el coseno es positivo, por tanto:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y ahora calculamos el seno:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \leftarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Otra vez con el criterio de signos, el seno valdrá: $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$

Conocidas las razones trigonométricas principales, podemos calcular las inversas:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

Por tanto, las razones pedidas del ángulo α son:

$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$	$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{cosec}\alpha = -2$	$\sec\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot\alpha = -\sqrt{3}$

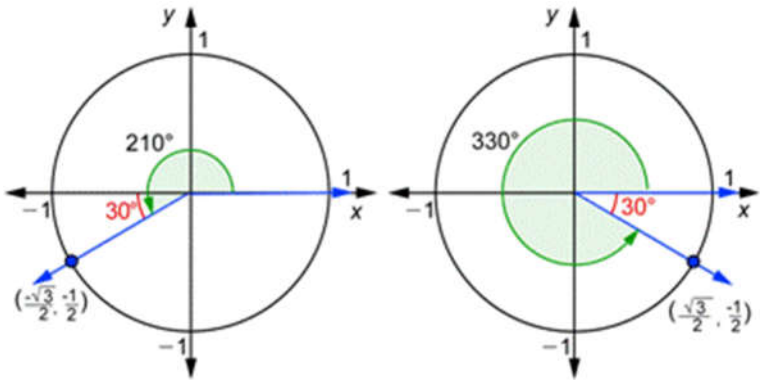
b) Da el valor de un ángulo de otro cuadrante que tenga exactamente el mismo seno que α. **(0,5 puntos)**

Sabemos que en el cuarto cuadrante el seno es negativo, $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$, así que, en el otro cuadrante donde tiene exactamente el mismo valor es en el tercero, donde también es negativo.

Así que el ángulo buscado estará en el tercer cuadrante.

El ángulo original del 4º cuadrante es de 330º porque el ángulo de seno –½ se corresponde con el ángulo de –30º que en realidad es el de 330º.

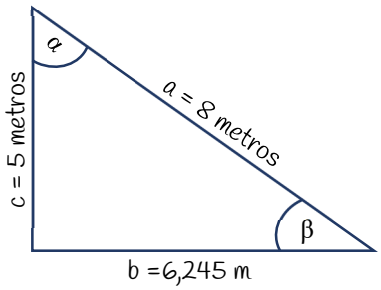
En el tercer cuadrante el ángulo será de 180 + 30 =210º



Por tanto, el ángulo de otro cuadrante con el mismo seno es el ángulo de 210º o de 7π/6.

El ángulo pedido es: $\beta = \frac{7}{6}\pi$

25.– De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide 8 m y que uno de sus catetos mide 5 m. Calcula todos sus ángulos y lados, además de su área.



Como es un triángulo rectángulo y conocemos dos de sus lados, por el Teorema de Pitágoras, calculamos el cateto restante:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow b = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39} \rightarrow b = \sqrt{39}$$

Y conocidos los 3 lados, vamos a calcular ahora los ángulos α y β:

Para calcular el ángulo α, usaremos el coseno: $\rightarrow \cos\alpha = \frac{\text{Cateto Contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{8} \rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{8}$

Y conocido el coseno, calculamos el ángulo α mediante la función Arco:

$$\text{Si } \cos\alpha = \frac{5}{8} \rightarrow \alpha = \text{Arccos}\left(\frac{5}{8}\right) = 51º\ 19'\ 4{,}13'' \rightarrow \alpha = 51º\ 19'\ 4{,}13''$$

Como es rectángulo el ángulo A es recto, y el ángulo β será 90 – α.

$$\beta = 90º - \alpha = 90º - 51º\ 19'\ 4{,}13'' = 38º\ 40'\ 55{,}87'' \rightarrow \beta = 38º\ 40'\ 55{,}87''$$

Y el área, la calculamos haciendo el semiproducto de la base por la altura:

$$A = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{39}}{2} \rightarrow A = 15{,}61\ m^2$$

Por tanto, a=8 m; b=6,245 m y c=5 m; α=51º 19' 4,13"; β=38º 40' 55,87" y A=90º

26.– Demuestra paso a paso y razonando las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$

b) $\frac{\text{sen}x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x}$

a) $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = 2\cdot\cos^2 x - 1$ $\xrightarrow{\text{Desarrollamos la Id. Notable}}$ $(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\cdot\underbrace{(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)}_{\text{Id. fund. de la Trigonometría } \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1} = (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\cdot(1) =$

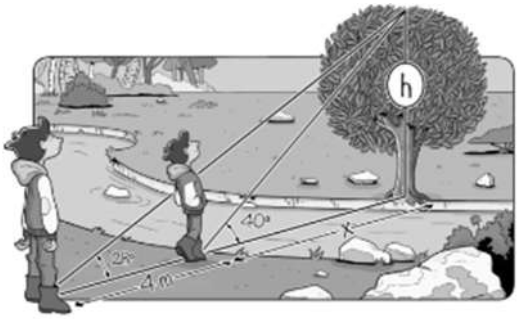
$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow$ C.q.d.

b) $\dfrac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} = \dfrac{\tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \dfrac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x - \text{sen}^2 x} \underset{\text{Sacamos factor común } \cos^2 x}{=} \dfrac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x\left(1 - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)} \underset{\text{Subimos el } \cos^2 x}{=}$

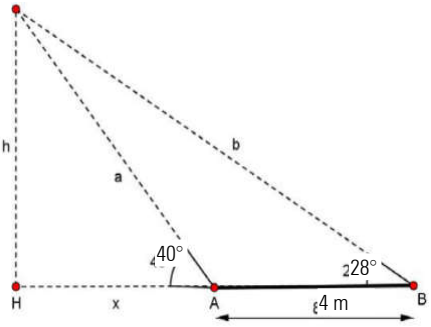
$= \dfrac{\dfrac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x}}{\left(1 - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)} \underset{\text{Simplificamos}}{=} \dfrac{\dfrac{\text{sen}x\cdot\cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x}}{1 - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} \underset{\text{Cambiamos } \frac{\text{sen}}{\cos} = \tan}{=} \dfrac{\dfrac{\text{sen}x}{\cos x}}{1 - \tan^2 x} = \dfrac{\tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow$ C.q.d.

27.- Resuelve paso a paso y de forma razonada uno de los dos siguientes problemas:

a) Desde la orilla de un río vemos un gran árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40°, y si se retroceden 4 m, se ve bajo un ángulo de 28°. Calcula, primero la altura del árbol y después la anchura del río.



Si nos ayudamos de un croquis obtenemos el dibujo de la izquierda, donde hemos llamado h a la altura del árbol y x a la anchura del río.



La razón trigonométrica que relaciona los catetos opuestos y los catetos contiguos es la tangente, así que:

En el triángulo pequeño: $\tan 40° = \dfrac{h}{x}$

Mientras que en el triángulo grande: $\tan 28° = \dfrac{h}{x+4}$

Con ambas ecuaciones, formamos un sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \tan 40° = \dfrac{h}{x} \\ \tan 28° = \dfrac{h}{x+4} \end{cases}$

Como nos piden calcular primero h, vamos a despejar x en la primera ecuación:

$$\text{De } \tan 40° = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 40°}$$

Para después sustituirla en la segunda:

$$\text{En } \tan 28° = \frac{h}{x+4} \rightarrow \tan 28° = \frac{h}{\frac{h}{\tan 40°}+4} \xrightarrow{\text{Operando un poco}} \tan 28° = \frac{h}{\frac{h}{\tan 40°}+\frac{4\cdot\tan 40°}{\tan 40°}} \rightarrow$$

$$\tan 28° = \frac{h}{\frac{h+4\tan 40°}{\tan 40°}} \rightarrow \tan 28° = \frac{h\cdot\tan 40°}{h+4\tan 40°} \xrightarrow{\text{Operando}} (h+4\tan 40°)\tan 28° = h\cdot\tan 40° \rightarrow$$

$$\rightarrow h\cdot\tan 28° + 4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28° = h\cdot\tan 40° \xrightarrow{\text{Agrupando}} h\cdot\tan 40° - h\cdot\tan 28° = 4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28° \rightarrow$$

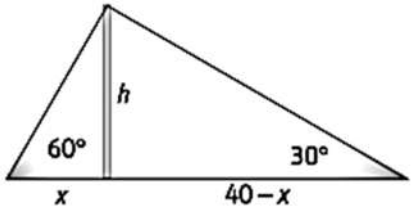
$$\xrightarrow{\text{Sacamos factor común h}} h\cdot(\tan 40° - \tan 28°) = 4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28° \xrightarrow{\text{Despejamos h}} h = \frac{4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28°}{\tan 40° - \tan 28°} = 5{,}806\ m$$

$$\rightarrow h = 5{,}806\ m \rightarrow \text{El árbol mide 5,81 metros}$$

Y para calcular la anchura del río x, la calcularemos de: $\tan 40° = \frac{h}{x}$, por tanto:

$$\tan 40° = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 40°} = \frac{5{,}8057}{\tan 40°} \rightarrow x = 6{,}919\ m \rightarrow \text{La anchura del río es de 6,92 metros}$$

b) Para que una antena permanezca vertical se le han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados y alineados con su base. La distancia entre los anclajes es de 40 m y si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30° y 60°, respectivamente. Halla primero la altura de la antena y después las distancias que la separan de los anclajes.



Si nos ayudamos de un croquis obtenemos el dibujo de la izquierda.

Donde hemos llamado h a la altura de la antena, x a la distancia de un anclaje a la antena y 40−x al otro.

Como la razón trigonométrica que relaciona los catetos opuestos y los catetos contiguos es la tangente, tenemos que:

En el triángulo de la izquierda: $\tan 60° = \frac{h}{x}$ y en el triángulo de la derecha: $\tan 30° = \frac{h}{40-x}$

Con ambas ecuaciones, formamos un sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \tan 60° = \frac{h}{x} \\ \tan 30° = \frac{h}{40-x} \end{cases}$

Como nos piden calcular primero h, vamos a despejar x en la primera ecuación:

$$\text{De } \tan 60° = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 60°}$$

Para después sustituirla en la segunda:

$$\text{En } \tan 30° = \frac{h}{40-x} \rightarrow \tan 30° = \frac{h}{40-\frac{h}{\tan 60°}} \xrightarrow{\text{Operando un poco}} \tan 30° = \frac{h}{\frac{40\cdot\tan 60°}{\tan 60°}-\frac{h}{\tan 60°}} \rightarrow$$

$$\tan 30° = \frac{h}{\frac{40\cdot\tan 60° - h}{\tan 60°}} \rightarrow \tan 30° = \frac{h\cdot\tan 60°}{40\cdot\tan 60° - h} \xrightarrow{\text{Operando}} (40\tan 60° - h)\tan 30° = h\cdot\tan 60° \rightarrow$$

$$\rightarrow 40\cdot\tan 60°\cdot\tan 30° - h\cdot\tan 30° = h\cdot\tan 60° \xrightarrow{\text{Agrupando}} h\cdot\tan 60° + h\cdot\tan 30° = 40\cdot\tan 60°\cdot\tan 30° \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{Sacamos factor común h}} h\cdot(\tan 60° + \tan 30°) = 40\cdot\tan 60°\cdot\tan 30° \xrightarrow{\text{Despejamos h}} h = \frac{40\cdot\tan 60°\cdot\tan 30°}{\tan 60° + \tan 30°} = 10\sqrt{3}\ m$$

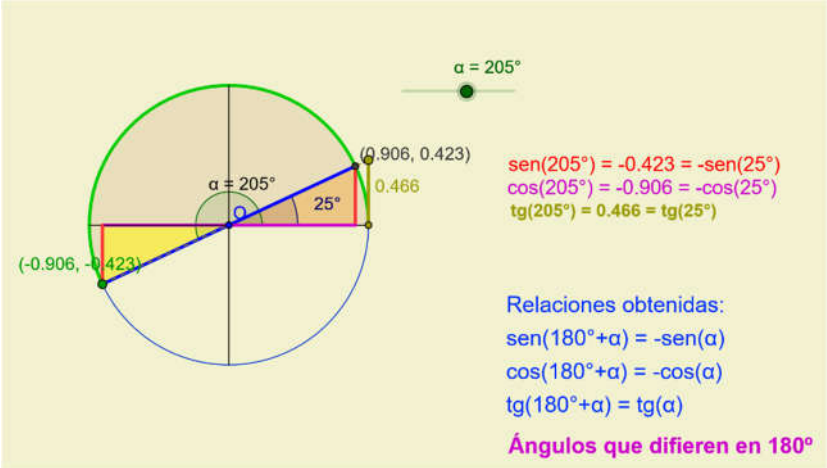
$$\rightarrow h = 17{,}32\ m \rightarrow \text{La antena mide 17,32 metros}$$

Y para calcular las longitudes de la antena a los anclajes, lo haremos con: $\tan 60° = \frac{h}{x}$, por tanto:

$$\tan 60° = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 60°} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10 \rightarrow x = 10\ m$$

Por tanto, la distancia a uno de los anclajes es 10 metros y la otra 30.

28.– Si sabemos que **sen 25° = 0,4226**; ¿cuáles son las razones trigonométricas de un ángulo cuya amplitud es 205°?

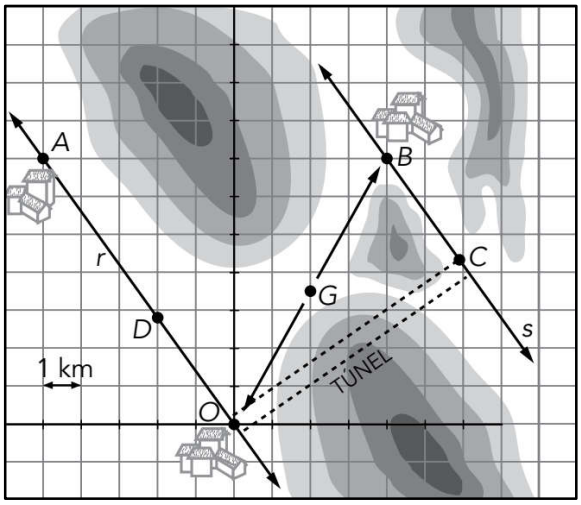


Como podemos observar en la figura, los valores del ángulo de 25 y de 205 coinciden en valor absoluto, y solo tenemos que ajustar los signos con la ayuda de un dibujo:

$$sen(205°) = -sen(25°) = -0{,}4226$$

$$\cos(205°) = -\cos(25°) = -0{,}9063$$

$$\tan(205°) = \tan(25°) = 0{,}4663$$



En una zona de montaña, como puedes ver en el plano de la derecha, las autoridades quieren proyectar un nuevo sistema de carreteras. Pretenden construir dos tramos paralelos de autovía por los valles de la zona.

Los topógrafos han elaborado un mapa orográfico sobre unos ejes coordenados para facilitar los cálculos de los ingenieros.

Sofía está en el equipo de planificación y os enseña el mapa para que la ayudéis con los cálculos. El centro del sistema de coordenadas lo han puesto en una localidad cercana.

Escala 1:1000

29.– "Vamos a ver, chicos. Según el plano, ¿cuáles son las coordenadas de O y de A?, una vez que las hayáis calculado, ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de la carretera r?"

Si nos fijamos en el plano, las coordenadas de los puntos O y A son, O(0,0) y A(–5,7)

Además, nos piden las ecuaciones paramétricas de la recta r (carretera r), y sabemos que, para ello necesitamos un punto y un vector:

$$r:\begin{cases} P(p_x,p_y) \\ \vec{r}=(r_x,r_y) \end{cases} \xrightarrow[\text{de una recta, vienen dadas por:}]{\text{Las ecuaciones Paramétricas}} r:\begin{cases} x=p_x+\lambda\cdot r_x \\ y=p_y+\lambda\cdot r_y \end{cases}$$

Calculamos el vector director de la recta r con la ayuda de los puntos O y A.:

$$\vec{r}=\overrightarrow{OA}=A-O=(-5,7) \quad \rightarrow \quad \vec{r}=(-5,7)$$

Pues con el punto O(0,0) y con el vector $\vec{r}=(-5,7)$, ya podemos escribir las ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases} x=p_x+\lambda\cdot r_x \\ y=p_y+\lambda\cdot r_y \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=0-5\lambda \\ y=0+7\lambda \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=-5\lambda \\ y=7\lambda \end{cases}$$

Por tanto: O(0,0), A(–5,7) y $r:\begin{cases} x=-5\lambda \\ y=7\lambda \end{cases} \rightarrow r: 7x+5y=0$

30.– "Supongo que ahora os resultará más fácil decirme cuál es la ecuación general de la autovía **s** que pasa por B".

Del enunciado sabemos que las rectas r y s son paralelas, así que, con el vector director de r y el punto B, puedo calcular dicha ecuación:

$$s:\begin{cases} B(4,7) \\ \vec{r}=(-5,7) \end{cases} \xrightarrow[Ax+By+c=0 \text{ con el vector } (-B,A)]{\text{Escribimos la Ec General}} 7x+5y+c=0 \xrightarrow[\text{el punto B(4,7) en la recta}]{\text{Calculamos C sustutuyendo}} 7\cdot 4+5\cdot 7+c=0$$

De donde:

$$7\cdot 4+5\cdot 7+c=0 \rightarrow 28+35+c=0 \rightarrow c=-63$$

Por tanto, la recta s, tiene por ecuación general: $s: 7x+5y-63=0$

31.– "Acaban de decirme que quieren construir un nuevo ramal entre O y B con una gasolinera, G, en su punto medio. Tenemos que calcular la ecuación continua de este nuevo ramal, las coordenadas de G y la distancia de la gasolinera hasta B (mirad la escala del plano)".

Sabemos que la ecuación continua de una recta viene dada por la expresión: $\frac{x-p_x}{v_x}=\frac{y-p_y}{v_y}$ donde

$P(P_x,P_y)$ es un punto de la recta y $\vec{v}=(v_x,v_y)$ su vector director.

Con los puntos O y B(4,7), podemos sacar un vector y con un punto y 1 vector podemos escribir la ecuación de la recta:

$$t:\begin{cases} B(4,7) \\ \vec{r}=(4,7) \end{cases} \xrightarrow{\text{Escribimos la Ec Continua}} \frac{x-4}{4}=\frac{x-7}{7} \quad \text{O lo que es lo mismo:} \quad \text{recta OB: } \frac{x}{4}=\frac{x}{7}$$

Como el punto G está en el punto medio del segmento $\overline{OB}$, basta con calcularlo:

$$G(G_x,G_y)=\left(\frac{O_x+B_x}{2},\frac{O_y+B_y}{2}\right) \rightarrow (G_x,G_y)=\left(\frac{0+4}{2},\frac{0+7}{2}\right) \rightarrow G\left(2,\frac{7}{2}\right)$$

La distancia de la gasolinera G al punto B, es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OB}=B-O=(4,7) \rightarrow \overrightarrow{OB}=(4,7) \rightarrow \left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$

Así que la distancia de la gasolinera a B es de :

$$d_{G\rightarrow B}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{65} \rightarrow d_{G\rightarrow B}=4{,}03\ Km$$

Por tanto, la distancia de la gasolinera al punto B es de aproximadamente 4 km

32.– "Los ingenieros quieren construir un túnel que una las autovías **r** y **s**, y que sea perpendicular a ambas. Una de las entradas debe estar en O. ¿Qué ecuación tendrá?, ¿Cuánto será su pendiente?, ¿Qué coordenadas tendrá la otra salida del túnel, C?"

Como el túnel es perpendicular a las rectas r y s, la ecuación de dicho túnel será perpendicular a ambas y para ellos basta con cambiar las coordenadas y cambiarle el signo a una de ellas: $túnel: 5x-7y=0$ puesto que pasa por el origen O.

Como nos piden su pendiente, escribiré su ecuación en forma explícita:

$$y=\frac{5}{7}x \quad \text{cuya pendiente es:} \quad m=\frac{5}{7}$$

Para calcular las coordenadas de C basta con resolver el sistema formado por la recta s y el túnel:

$$\begin{cases} s: 7x+5y-63=0 \\ túnel: 5x-7y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Por reducción:}} \begin{cases} 7x+5y=63 \\ 5x-7y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 49x+35y=441 \\ 25x-35y=0 \end{cases} \rightarrow 74x=441$$

De donde despejando x:

$$x=\frac{441}{74}$$

Calculamos y mediante:

$$5x-7y=0 \rightarrow 5\cdot\frac{441}{74}-7y=0 \rightarrow \frac{2205}{74}=7y \rightarrow y=\frac{315}{74}$$

Por tanto, las coordenadas del punto C son: $C\left(\frac{441}{74},\frac{315}{74}\right)$

33.– "He oído rumores de que en un futuro no muy lejano quieren construir una electro-gasolinera en la carretera **s** en el punto X, de forma que los puntos AOBX formen un paralelogramo. ¿En qué punto de la recta **s** estará la gasolinera? ¿Cuántas hectáreas de superficie tiene ese paralelogramo?

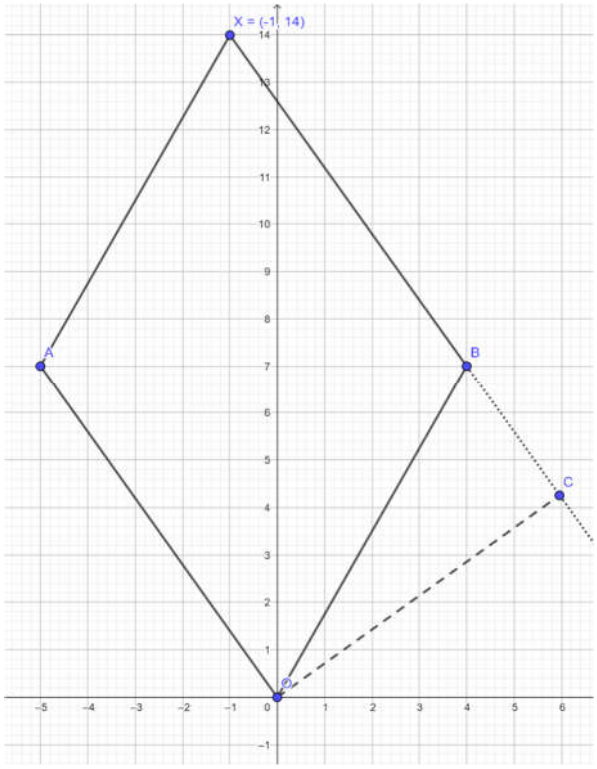
Como se forma un paralelogramo, tiene que ocurrir que los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{BX}$ sean iguales, por tanto, si llamamos al punto X(x,y) tenemos:

$$\overrightarrow{OA}=A-O=(-5,7) \qquad \overrightarrow{BX}=x-B=(x,y)-(4,7)=(x-4,y-7)$$

Y como son iguales:

$$(-5,7)=(x-4,y-7) \rightarrow \begin{cases} -5=x-4 \\ 7=y-7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=14 \end{cases} \rightarrow X(-1,14)$$

Para calcular la superficie del paralelogramo, nos ayudaremos con un dibujo:



Sabemos que el área de un paralelogramo viene dada por el producto de su base por su altura, y, si nos fijamos, la base es el segmento OA y la altura el segmento OC.

Así que calculamos los módulos de los vectores:

$$\overrightarrow{OA}=(-5,7) \rightarrow \left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$$

$$\overrightarrow{OC}=\left(\frac{441}{74},\frac{315}{74}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\sqrt{\frac{293706}{5476}}=\frac{63}{74}\sqrt{74}$$

Y su área será:

$$A=\text{base x altura}=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\sqrt{74}\cdot\frac{63}{74}\cdot\sqrt{74}=63\ km^2$$

Por tanto, el área del paralelogramo es de 6.300 Ha

34.– Dados los puntos A(–2,1), B(3,2) y C(4,–3) halla:

a) Las coordenadas del punto medio M del segmento $\overline{AC}$.

Las coordenadas del punto medio de un segmento $\overline{AC}$, vienen dadas por: $M_{AC}=\left(\frac{a_x+c_x}{2},\frac{a_y+c_y}{2}\right)$, por tanto:

$$M_{AC}=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{1-3}{2}\right)=(1,-1) \rightarrow M_{AC}=(1,-1)$$

b) Las coordenadas del punto D, simétrico de B respecto de M.

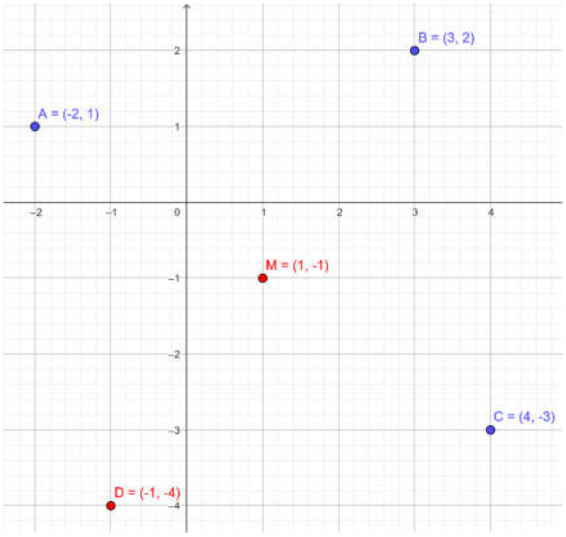
Si D es simétrico de B, respecto de M, esto quiere decir que M es el punto medio del segmento $\overline{DB}$, así que:

$$M_{DB}=\left(\frac{d_x+b_x}{2},\frac{d_y+b_y}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} M_x=\frac{d_x+b_x}{2} \rightarrow d_x=2\cdot M_x-b_x \rightarrow d_x=-1 \\ M_y=\frac{d_y+b_y}{2} \rightarrow d_y=2\cdot M_y-b_y \rightarrow d_y=-4 \end{cases}$$

Por tanto, el punto D=(–1,–4)

c) Comprueba que el polígono ABDC es un cuadrado.

Si representamos todos los puntos calculados en un gráfico, obtenemos:



Para que un polígono sea cuadrado han de ocurrir dos cosas: que sus lados midan todos lo mismo y que sus ángulos sean rectos (lados perpendiculares).

Calculamos los vectores que unen puntos consecutivos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,1) \qquad \overrightarrow{BC} = C - B = (1,-5)$$
$$\overrightarrow{CD} = D - C = (5,1) \qquad \overrightarrow{DA} = A - D = (1,-5)$$

Y vemos que son paralelos dos a dos, que todos tienen el mismo módulo:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \qquad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$
$$\overrightarrow{CD} = D - C = (5,1) \qquad \overrightarrow{DA} = A - D = (1,-5)$$

Además, vemos fácilmente también que son perpendiculares dos a dos porque el producto de sus componentes es nulo:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 5\cdot 1 - 1\cdot 5 = 0$$

Así que claramente se trata de un cuadrado.

d) Halla las coordenadas del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{AC} - 5\cdot\overrightarrow{BC}$

Para calcular el vector $\vec{v}$, basta con cambiar cada vector por sus componentes y realizar la operación:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{AC} - 5\cdot\overrightarrow{BC} = (5,1) + 2\cdot(6,-4) - 5\cdot(1,-5) = (5+12-5, 1-8+25) = (12,18) \quad \rightarrow \quad \vec{v} = (12,18)$$

35.– Escribe la ecuación general de las rectas siguientes:

a) Paralela a la recta s: $2x + 3y - 9 = 0$ y que pasa por (4,5)

Si es paralela a la recta s, tiene el mismo vector director, así que la ecuación de la nueva recta sería:

$$2x + 3y + k = 0$$

Nos falta conocer k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto (4,5), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2\cdot 4 + 3\cdot 5 + k = 0 \quad \rightarrow \quad 8 + 15 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -23$$

Por lo tanto, la recta pedida es: 2x + 3y – 23 = 0

b) Perpendicular a la recta r: $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por (7,1)

Si es perpendicular tiene como vector director el vector (1,–2) y por tanto su ecuación vendrá dada por:

$$2x + y + k = 0$$

Nos falta conocer k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto (7,1), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2\cdot 7+1\cdot 1+k=0 \quad \rightarrow \quad 14+1+k=0 \quad \rightarrow \quad k=-15$$

Por lo tanto, la recta pedida es: 2x + y – 15 = 0

c) Paralela al eje X y que pasa por el punto P(5,–2)

Si es paralela al eje, tiene pendiente m=0 así que la ecuación en forma explícita sería:

$$y=0x+b$$

Nos falta conocer b, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto P (5,–2), así que los sustituimos y calculamos b:

$$y=0x+b \quad \rightarrow \quad -2=0\cdot 5+b \quad \rightarrow \quad b=-2$$

Por lo tanto, la recta pedida es: y = – 2

d) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

Las ecuaciones de ambas rectas son: $r: x-2y-3=0$ y $s: 2x+3y-9=0$

Sus vectores directores son: $\vec{r}=(2,1)$ y $\vec{s}=(-3,2)$ que como podemos observar no son paralelos ni perpendiculares.

Por tanto, las rectas r y s son secantes.

36.– Las rectas r y s se cortan en el punto A(–1, 3), y son perpendiculares. La ecuación de la recta r viene dada por r: x + ay – 5 =0. Obtén el valor de a y la ecuación explícita de la recta s.

Como ambas rectas son secantes en A, ambas pasan por A, así que sustituyendo el punto A en la recta r podemos calcular el valor del parámetro a:

$$r: x+ay-5=0 \quad \rightarrow \quad -1+3a-5=0 \quad \rightarrow \quad 3a=6 \quad \rightarrow \quad a=2$$

Así que, a=2.

Como la recta r es $x+2y-5=0$, una recta perpendicular a ella sería:

$$2x-y+k=0$$

Nos falta conocer k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto (–1,3), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2\cdot(-1)-3+k=0 \quad \rightarrow \quad -2-3+k=0 \quad \rightarrow \quad k=5$$

Con esto, la recta pedida es en forma general es: 2x – y + 5 = 0 y en forma explícita sería: y = 2x + 5

Por tanto, el valor de a es 2 y la recta es y =2x+5

37.– Dados los puntos A(1,–2), B(0,2) y C(–2,0) calcula:

a) Ecuación de la recta que pasa por B y C.

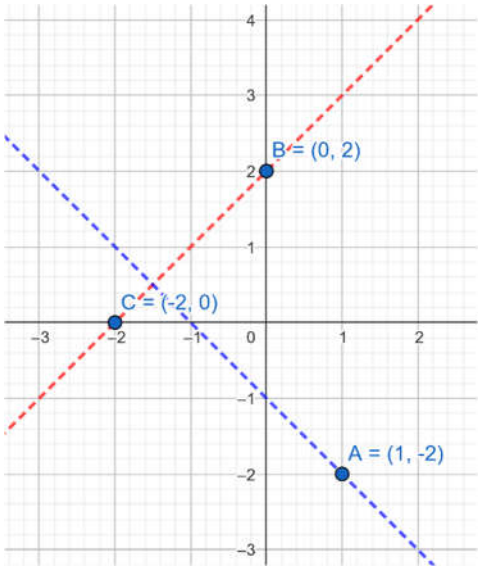
Para la ecuación de una recta, se necesita un punto y un vector: $r: \begin{cases} P(p_x, p_y) \\ \vec{r}=(r_x, r_y) \end{cases}$ $\begin{cases} P(0,2) \\ \vec{r}=(-2,-2) \end{cases}$

Además, sabemos que la ecuación continua de una recta viene dada por la expresión: $\frac{x-p_x}{v_x}=\frac{y-p_y}{v_y}$,

así que bastaría con sustituir: $\frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{-2}$, que en forma general sería: $r_{BC}: 2x-2y+4=0$

Por lo tanto, la recta pedida es: x – y + 2 = 0

b) Ecuación de la altura que parte de A.



Vamos a representar la situación para ver que es lo que nos piden exactamente:

La altura es una recta perpendicular a la recta r_{BC}, por tanto, conociendo dicha recta, la perpendicular se obtiene cambiando la x por la y, y cambiándole el signo a una de ellas.

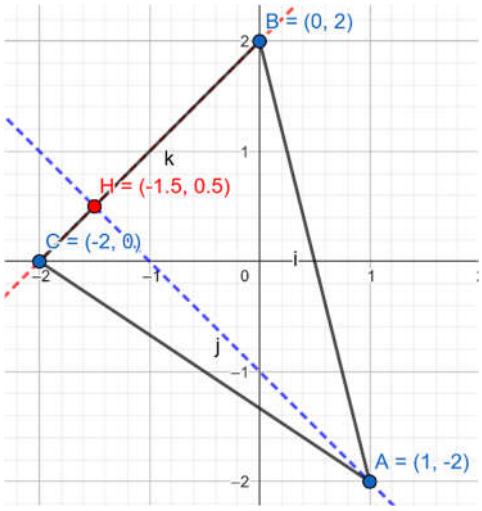
$$h: x+y+k=0$$

Ya solo faltaría calcular k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto A (1,–2), así que los sustituimos y calculamos k:

$$1\cdot(1)+1\cdot(-2)+k=0 \quad \rightarrow \quad 1-2+k=0 \quad \rightarrow \quad k=1$$

Con esto, la ecuación de la altura es: x + y + 1 = 0

c) El área del triángulo ABC.



Para calcular el área del triángulo, haremos el semiproducto de su base por su altura:

$$A=\frac{base\ x\ altura}{2}$$

La base es el módulo del vector $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-2,-2) \quad \rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Para calcular la altura, necesitamos calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AH}$, donde H es el punto de corte entre las rectas $h: x+y+1=0$ y $r_{BC}: x-y+2=0$, por tanto:

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Por Reducción}} 2x+3=0 \quad \rightarrow \quad x=-\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad H=\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Una vez conocido H, ya podemos calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AH}$:

$$\overrightarrow{AH}=H-A=\left(\frac{-5}{2},\frac{5}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AH}\right\|=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Y por último, el área es: $A=\frac{base\ x\ altura}{2}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{10}{2}=5$ u.a.

d) Determina si se trata de un triángulo rectángulo.

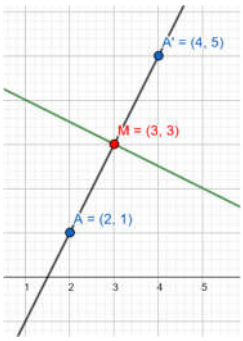
En el dibujo se ve claramente que no lo es, pero vamos a demostrarlo. Para que sea rectángulo ha de tener un ángulo recto, o lo que es lo mismo que el producto de las componentes de sus vectores ha de ser 0.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=C-B=(-2,-2)\\ \overrightarrow{AC}=C-A=(-3,2)\\ \overrightarrow{AB}=B-A=(-1,4)\end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{BC}\ y\ \overrightarrow{AC} & \rightarrow \quad (-2)\cdot(-3)+(-2)\cdot(2)=6-4=2\neq 0\\ \overrightarrow{BC}\ y\ \overrightarrow{AB} & \rightarrow \quad (-2)\cdot(-1)+(-2)\cdot(4)=2-8=-6\neq 0\end{cases}$$

Por tanto, el triángulo no es rectángulo.

Otra forma de comprobarlo es utilizando el teorema de Pitágoras

38.– La recta r: x + 2y −9 = 0 es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto A (2, 1). Halla las coordenadas del otro extremo.



Para calcular las coordenadas del otro extremo antes hemos de calcular la recta perpendicular a r que pasa por A:

La recta perpendicular viene dada por: $s: 2x-y+k=0$

Para calcular k, obligamos a la recta s a pasar por el punto A (2, 1), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2\cdot(2)-1\cdot(1)+k=0 \quad \rightarrow \quad 4-1+k=0 \quad \rightarrow \quad k=-3$$

Así que la recta s tiene por ecuación: $s: 2x-y-3=0$

El punto de corte de ambas, será el punto medio del segmento, que llamaremos M:

$$\begin{cases}x+2y=9\\ 2x-y=3\end{cases} \xrightarrow[\text{multiplicando la 2ª ecuación por 2}]{\text{Por reducción}} \begin{cases}x+2y=9\\ 4x-2y=6\end{cases} \xrightarrow{\text{y sumando}} 5x=15 \rightarrow x=3 \quad e \quad y=2\cdot 3-3=3$$

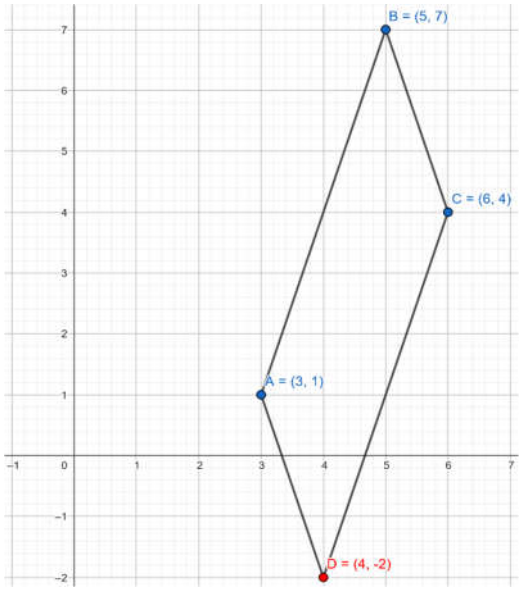
Así que las coordenadas de M son: M(3,3)

Y con ello ya podemos las coordenadas del punto A':

$$M=\left(\frac{a_x+a'_x}{2},\frac{a_y+a'_y}{2}\right) \rightarrow \begin{cases}M_x=\dfrac{a_x+a'_x}{2} \rightarrow a'_x=2\cdot M_x-a_x \rightarrow a'_x=2\cdot 3-2=4\\ M_y=\dfrac{a_y+a'_y}{2} \rightarrow a'_y=2\cdot M_y-a_y \rightarrow a'_y=2\cdot 3-1=5\end{cases}$$

Así que, las coordenadas del otro punto son (4, 5)

39.– Si A(3,1), B(5,7) y C(6,4) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, encuentra el cuarto vértice D.



Como los vértices son consecutivos, y se trata de un paralelogramo, tiene que ocurrir que los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean iguales, por tanto, si al punto D le asignamos las coordenadas D(x,y), tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AD}=D-A=(x-3,y-1)\\ \overrightarrow{BC}=C-B=(1,-3)\end{array}\right\} \rightarrow \quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \quad \rightarrow$$

$$(x-3,y-1)=(1,-3) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-3=1 & \rightarrow \quad x=4 \\ y-1=-3 & \rightarrow \quad y=-2 \end{cases}$$

Por tanto, el cuarto vértice es el punto D(4,-2)

40.- Escribe la ecuación general de la diagonal BD y comprueba que dicha recta contiene el punto medio del segmento AC.

Calculemos primero el punto medio del segmento AC:

$$M_{AC}=\left(\frac{a_x+c_x}{2},\frac{a_y+c_y}{2}\right) \quad = \quad \left(\frac{3+6}{2},\frac{1+4}{2}\right) \quad \rightarrow \quad M_{AC}=\left(\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Ahora calcularemos la recta BD, para ello, y como siempre, necesitaremos un punto y un vector:

$$r:\begin{cases} B(b_x,b_y) \\ \vec{r}=(r_x,r_y) \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} B(5,7) \\ \overrightarrow{BD}=(-1,-9) \end{cases} \rightarrow \quad \frac{x-5}{-1}=\frac{y-7}{-9} \quad \rightarrow \quad r: 9x-y-38=0$$

Y para comprobar que M pertenece a la recta, hemos de sustituirlo y verificar que se cumple la igualdad:

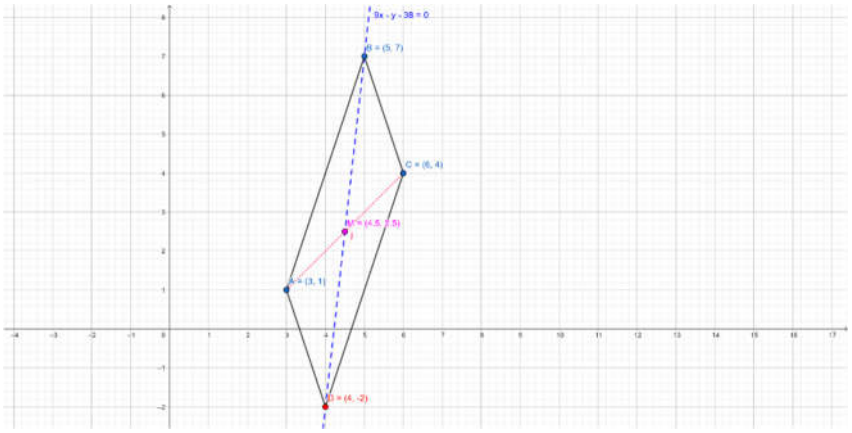
$$M\in r \quad \leftrightarrow \quad 9x-y-38=0 \quad \rightarrow \quad 9\cdot\left(\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{5}{2}\right)-38=0$$

Operando, llegamos a:

$$\frac{81}{2}-\frac{5}{2}-38=\frac{76}{2}-38=38-38=0$$

Por tanto, queda comprobado que el punto medio del segmento AC pertenece a la diagonal del paralelogramo que pasa por BD.

De forma gráfica podemos ver que la mediatriz de AC pertenece a la diagonal BD:

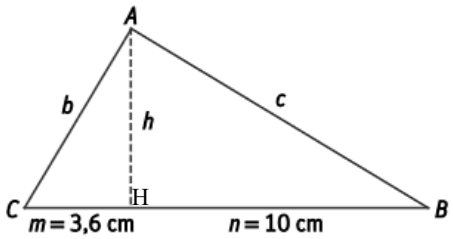


41.- Demuestra paso a paso la siguiente identidad: $\dfrac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\text{sen}^2 x}=\dfrac{\tan x}{1-\tan^2 x}$

$$\frac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\text{sen}^2 x}=\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}\ \rightarrow\ \frac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x-\text{sen}^2 x}\ \underset{\text{Sacamos factor común }\cos^2 x}{=}\ \frac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x\left(1-\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)}\ \underset{\text{Subimos el }\cos^2 x}{=}$$

$$=\ \frac{\dfrac{\text{sen}x\cdot\cos x}{\cos^2 x}}{\left(1-\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)}\ \underset{\text{Simplificamos}}{=}\ \frac{\dfrac{\text{sen}x\cdot\cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x}}{1-\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}\ \underset{\text{Cambiamos }\frac{\text{sen}}{\cos}=\tan}{=}\ \frac{\dfrac{\text{sen}x}{\cos x}}{1-\tan^2 x}=\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}\ \rightarrow\ \text{C.q.d.}$$

42.- Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre su hipotenusa valen m = 3,6 cm y n = 10 cm, respectivamente. Resuelve el triángulo y calcula su área.



Si hacemos un croquis con los datos del problema, obtenemos la figura de la izquierda.

Para obtener la hipotenusa del triángulo, bastaría con sumar las dos proyecciones m y n, por tanto:

$$a=m+n=10+3{,}6=13{,}6\ \rightarrow\ a=13{,}6\ cm$$

Como conocemos m y n, podemos calcular la altura **h** aplicando el **teorema de la altura**, que decía que en un triángulo rectángulo la altura al cuadrado era igual al producto de las proyecciones de los dos catetos sobre ella, por tanto:

$$h^2=m\cdot n\ \rightarrow\ h=\sqrt{m\cdot n}=\sqrt{3{,}6\cdot 10}=\sqrt{36}=6\ \rightarrow\ h=6\ cm$$

Para calcula el ángulo B, nos podemos fijar en el triángulo AHB y utilizar la tangente puesto que conocemos el cateto opuesto h y el cateto contiguo n, así q

$$tg\ B=\frac{h}{n}\ \rightarrow\ B=Arctg\left(\frac{h}{n}\right)=Arctg\left(\frac{6}{10}\right)=30^\circ\ 57'\ 49.52''\ \rightarrow\ B=31^\circ$$

Conocido B, podemos calcular C:

$$C=90^\circ-B=90^\circ-30^\circ\ 57'\ 49.52''=59^\circ\ 2'\ 10{,}48''\ \rightarrow\ C=59^\circ$$

El cateto c lo podemos calcular áplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo AHB:

$$c^2=n^2+h^2\ \rightarrow\ c=\sqrt{n^2+h^2}=\sqrt{10^2+6^2}=\sqrt{136}=2\sqrt{34}=11{,}66\ \rightarrow\ c=11{,}66\ cm$$

Y el cateto b, por ejemplo, mediante el seno de C en el triángulo AHC:

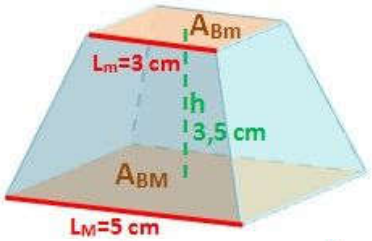
$$sen\ C=\frac{h}{b}\ \rightarrow\ b=\frac{h}{sen\ C}=\frac{6}{sen(59^\circ)}=6{,}9998\ \rightarrow\ b=7\ cm$$

Y para terminar, su área será:

$$A=\frac{base\ x\ altura}{2}=\frac{a\cdot h}{2}=\frac{13{,}6\cdot 6}{2}=40{,}8\ \rightarrow\ Area=40{,}8\ cm^2$$

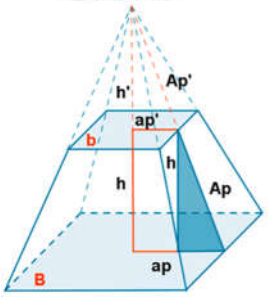
Por tanto, a=13,6 cm; b=7 cm; c) 11,66 cm; A=90°, B=31°, C=59° y el Área=40,8 cm².

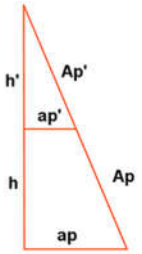
43.– Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular del que se conoce su altura h=3,5 cm, el lado de la base mayor L_M=5 cm y el lado de la base menor L_m=3 cm.

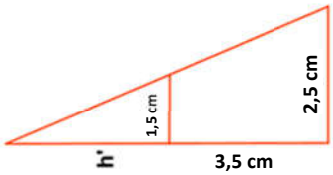


Dado el tronco de pirámide, lo primero es dibujarlo anotando sus medidas:

Para calcular tanto el área como el volumen tanto de dicho tronco de pirámide, lo primero será ampliarlo continuando las líneas hasta obtener las pirámide completa:







Si aplicamos semejanza en los triángulos de la derecha, llegamos a:

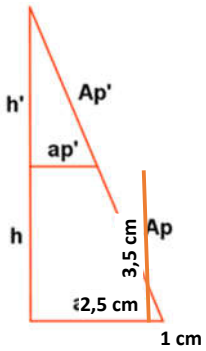
$$\frac{1,5}{h'}=\frac{2,5}{h'+3,5} \quad \rightarrow \quad 1,5(h'+3,5)=2,5h \quad \rightarrow \quad 1,5h'+5,25=2,5h' \quad \rightarrow \quad h'=5,25$$

Por tanto, la altura de la pirámide grande será de 5,25 + 3,5 = 8,75 cm y para calcular el volumen del tronco de pirámide, calcularemos primero el volumen de la pirámide grande y el de la pequeña:

$$V_{Pirámide\ G}=\frac{1}{3}A_{base}\cdot h=\frac{1}{3}5^2\cdot 8,75=\frac{875}{12}cm^3 \qquad V_{Pirámide\ peq}=\frac{1}{3}A_{base}\cdot h'=\frac{1}{3}3^2\cdot 5,25=\frac{63}{4}cm^3$$

Y el volumen del tronco será la diferencia de ambas:

$$V_{Tronco}=V_{Pirámide\ G}-V_{Pirámide\ p}=\frac{875}{12}-\frac{63}{4}=\frac{343}{6}=51,17cm^3$$



Para poder calcular el área del tronco, necesitamos calcular el área de los trapecios laterales, y para ello hemos de hacer Pitágoras para encontrar la altura de dichos trapecios:

En el triángulo de la derecha, $Ap=\sqrt{1^2+3,5^2}=\frac{\sqrt{53}}{2}cm$

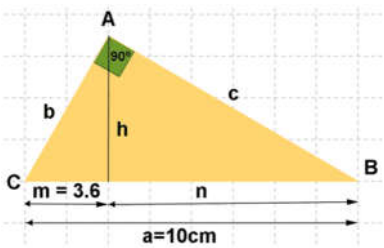
Y el área de cada uno de los trapecios es: $A=\frac{B+b}{2}\cdot h=\frac{5+3}{2}\cdot\frac{\sqrt{53}}{2}=2\sqrt{53}\ cm^2$

Y el área total del tronco será 4 veces el área del trapecio más el área de las bases:

$$A=A_{BM}+A_{Bm}+4\cdot A_{Trapecio}=25+9+4\cdot 2\sqrt{53}=34+8\sqrt{53}=92,24\ cm^2$$

Por tanto, el área del tronco de pirámide es de 92,24 cm² y el volumen de 51,17 cm³

44.– En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 10 cm y la proyección del cateto b sobre ella mide 3,6 cm. Dibuja dicho triángulo y calcula las medidas de b, c, n y h. **(2 puntos)**



Para calcular la medida de **b**, utilizaremos el teorema del Cateto, en el que:

$$b^2=a\cdot m \quad \rightarrow \quad b=\sqrt{a\cdot m}=\sqrt{10\cdot 3,6}=\sqrt{36}=6\ cm$$

Conocido el segmento m, podemos calcular el **n**, restándoselo a la hipotenusa:

$$a=n+m \quad \rightarrow \quad n=a-m=10-3,6=6,4\ cm$$

Con el segmento n, y volviendo a utilizar el teorema del cateto, calculamos la medida del cateto c:

$$c^2 = a \cdot n \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a \cdot n} = \sqrt{10 \cdot 6{,}4} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

Y, por último, para calcular la altura h referida a la hipotenusa a, utilizaremos el teorema de la altura:

$$h^2 = m \cdot n \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{m \cdot n} = \sqrt{6{,}4 \cdot 3{,}6} = 4{,}8 \text{ cm}$$

Aunque también la podríamos haber calculado mediante el Teorema de Pitágoras.

Por tanto, b=6 cm; n=6,4 cm; c=8 cm y h=4,8 cm.

45.- El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $B(x) = -3x^2 + 120x + 675$ donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

1) Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.

La función B(x) es una función cuadrática, para calcular el gasto a partir del cual la empresa no tiene beneficios, hemos de igualar la función a cero para calcular los puntos de corte con el eje x. Para buscar los x que hacen el gasto cero. A partir de este gasto la empresa no tiene beneficios porque tiene pérdidas:

$$B(x) = -3x^2 + 120x + 675 \quad \rightarrow \quad B(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad -3x^2 + 120x + 675 = 0$$

Así que vamos a resolver la ecuación de segundo grado:

$$-3x^2 + 120x + 675 = 0 \quad \leftrightarrow \quad 3x^2 - 120x - 675 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x^2 - 40x - 225 = 0$$

Por descomposición mediante la Regla de Ruffini, llegamos a:

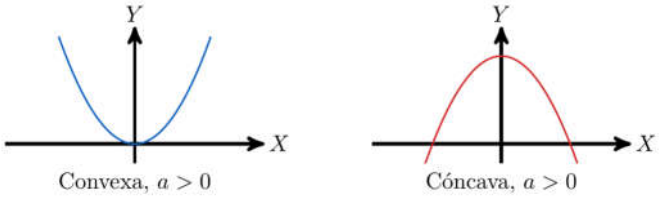
$$x^2 - 40x - 225 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+5)\cdot(x-45) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \cancel{x_1 = -5} \\ x_2 = 45 \end{cases}$$

La primera solución la desechamos porque si x es el gasto en publicidad, éste no puede ser negativo.

Por tanto, a partir de 45.000 € de gasto en publicidad, la empresa no tiene beneficios.

2) Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?

Como ya hemos dicho, B(x) es una función cuadrática en la que a<0, por tanto se trata de una función cuadrática cóncava (de ramas hacia abajo). Por tanto el máximo se corresponde con el vértice como podemos apreciar en la imagen de debajo.



Así que, vamos a calcular el vértice que, como ya hemos trabajado en clase, viene dado por (V_x, V_y):

$$\begin{cases} V_x = -\dfrac{b}{2a} \quad \rightarrow \quad V_x = -\dfrac{120}{2\cdot(-3)} = -\dfrac{120}{-6} = 20 \\ V_y = B(V_x) \quad \rightarrow \quad V_y = B(20) = -3(20)^2 + 120\cdot(20) + 675 = -3\cdot 400 + 2400 + 675 = 1875 \end{cases}$$

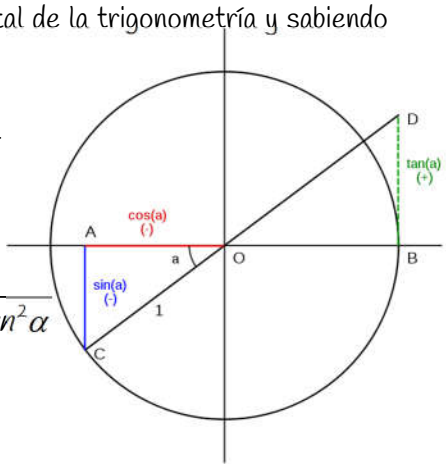
Por tanto, el máximo de beneficios se alcanza a los 20.000 € de gasto en publicidad y ese gasto, generan unos beneficios a la empresa de 1.875.000 €.

46.- Sabemos que un ángulo del tercer cuadrante verifica que $sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Calcula el valor exacto de las otras razones trigonométricas.

Calcularemos las otras razones trigonométricas usando la identidad fundamental de la trigonometría y sabiendo que la tangente de un ángulo es el cociente entre su seno y su coseno:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$$



Cono nos dan el seno, de la Ec. Fundamental de la trigonometría despejaremos el coseno:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

$$\rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Como nos encontramos en el tercer cuadrante, tanto **el seno** como **el coseno** son **negativos**, mientras que la tangente es positiva.

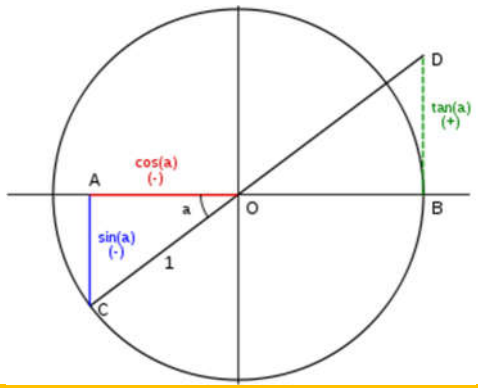
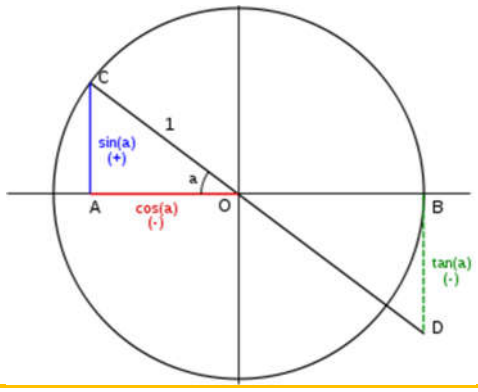
Por tanto: $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ y la tangente: $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Las razones trigonométricas inversas serían la secante, inversa del coseno, la cosecante, inversa del seno y la cotangente, inversa de la tangente.

Resumiendo: Cosα = -1/2 y tg α=√3

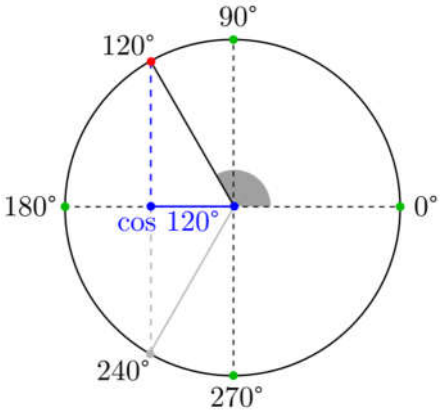
2) Da el valor (en radianes) de un ángulo de otro cuadrante que tenga exactamente el mismo coseno que α.

De los cuatro cuadrantes, el único en el que el coseno tiene exactamente el mismo valor que en el tercero, es en el segundo.

Tercer cuadrante	Segundo Cuadrante
	

Sabemos que en el primer cuadrante, el único ángulo α que tiene $\begin{cases} sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$ es el ángulo $\alpha = 60°$

Pues en el segundo cuadrante, el ángulo de 60 se correspondería con el de 180° - 60° = 120°



Por simetría, y observando la circunferencia goniométrica de la izquierda, puede deducirse que el coseno de 120° es exactamente igual al coseno de 240°.

Si calculamos con la calculadora el arcoseno de -1/2 obtenemos:

$$\underbrace{Arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)=120°}_{\text{En grados sexagesimales (Modo Deg)}} \qquad \underbrace{Arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}}_{\text{En Radianes (Modo Rad)}}$$

Dependiendo del modo en que pongamos nuestra calculadora, podemos obtener el resultado directamente en radianes o en grados sexagesimales.

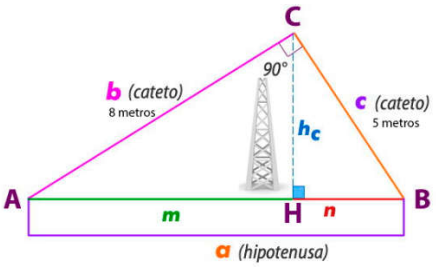
Puesto que en el segundo cuadrante, el ángulo de 60 se correspondería con el de 180° - 60° = 120°

Por tanto, el ángulo buscado es el de 120°, que en radianes se expresa como $\frac{2\pi}{3}$ rad.

47.- Una antena de telecomunicaciones está sujeta al suelo con dos cables de acero que forman entre sí un ángulo de 90° y miden 8 y 5 m, respectivamente. Si la antena está ente los dos anclajes:

1) ¿A qué distancia del poste de la antena están sujetos ambos cables del suelo?

Si nos ayudamos con un dibujo, podemos observar que se trata de un problema en el que nos piden el valor de m y n en un triángulo rectángulo apoyado en su hipotenusa. Para calcularlos utilizaremos el teorema del Cateto:



El **Teorema del Cateto** dice que en todo triángulo rectángulo, como por ejemplo el ABC representados en la figura anterior, el cuadrado de cualquier cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre ella, así que lo primero será calcularla aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{8^2+5^2}=\sqrt{89}$$

Hecho esto, ya podemos calcular las dos proyecciones m y n:

$$b^2=m\cdot a \quad \rightarrow \quad m=\frac{b^2}{a}=\frac{64}{\sqrt{89}}=6{,}78\ m \qquad \text{y de la misma forma:} \quad c^2=n\cdot a \quad \rightarrow \quad n=\frac{c^2}{a}=\frac{25}{\sqrt{89}}=2{,}65\ m$$

Por tanto los anclajes están a 6,78 y 2,65 metros de la antena.

2) ¿A qué altura se enganchan a la antena?

Para ello, en este caso nos ayudamos del **Teorema de la altura** que dice que, en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, por tanto:

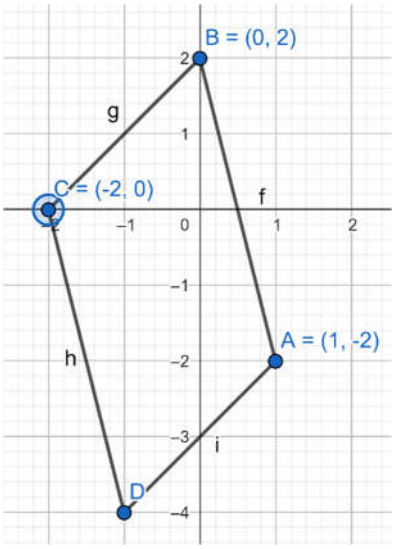
$$h^2=m\cdot n \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{m\cdot n}=\sqrt{6{,}78\cdot 2{,}65}=4{,}24\ m$$

Por tanto la antena mide 4,24 metros de altura.

48.- Dados los puntos $A(1,-2)$, $B(0,2)$, $C(-2,0)$ de un paralelogramo:

1) Calcula las coordenadas del punto D.

Si representamos las coordenadas en un plano cartesiano obtenemos la figura de la derecha, es por ello que podemos predecir que el punto D estaría aproximadamente donde lo hemos representado.



Para calcularlo, podemos hacerlo de varias maneras, pero la más rápida es calcular el vector $\overrightarrow{AB}$ e igualarlo al vector $\overrightarrow{DC}$ y de aquí calcular el punto D.

Así que empezamos calculando el vector $\overrightarrow{AB}=B-A=(0-1,2-(-2))=(-1,4)$

Claramente los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son paralelos (paralelogramo) e iguales, por tanto con esto calcularemos el punto D:

$$\overrightarrow{AB}=(-1,4) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{DC}=(-1,4) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{DC}=C-D$$

Si D es el punto D (x,y), con el vector y el punto C, podemos calcularlo:

$$\overrightarrow{DC}=C-D=(-2-x,0-y)=(-1,4) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -2-x=-1 \quad \rightarrow \quad x=-1 \\ -y=4 \quad \rightarrow \quad y=-4 \end{cases}$$

Por tanto, las coordenadas del punto D son: **D (-1, -4)**

2) Escribe la ecuación general de la diagonal BD y comprueba que dicha recta contiene el punto medio del segmento AC.

Para encontrar la ecuación general voy a partir de la ecuación continua $\frac{x-p_x}{v_x}=\frac{y-p_y}{v_y}$ en la que P es un punto de la recta y V su vector director, por tanto, lo primero será coger un punto y calcular su vector director:

$$\text{Recta BC:} \begin{cases} P=(0,2) \\ \vec{v}=\overrightarrow{DB}=B-D=(1,6) \end{cases} \quad \text{con ello:} \quad \frac{x-p_x}{v_x}=\frac{y-p_y}{v_y} \quad \text{quedaría} \quad \frac{x-0}{1}=\frac{y-2}{6}$$

Y multiplicando en cruz: $\frac{x-0}{1}=\frac{y-2}{6} \quad \rightarrow \quad 6x=y-2 \quad \rightarrow \quad 6x-y+2=0$

Por tanto, la ecuación general de la diagonal BD es: **6x − y + 2 = 0**

Veamos si el punto medio del segmento $\overline{AC}$ pertenece a dicha recta. Para ello calcularemos dicho punto medio:

$$M_{\overline{AC}}=\left(\frac{a_x+c_x}{2},\frac{a_y+c_y}{2}\right)=\left(\frac{1-2}{2},\frac{-2+0}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2},-1\right)$$

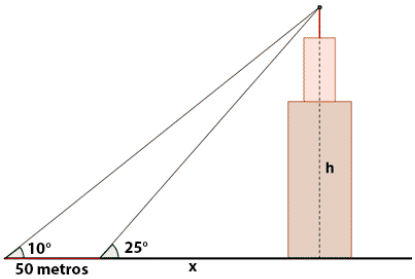
Y ahora lo sustituimos en la ecuación de la recta BD y si la verifica es porque el punto M pertenece a ella:

$6x-y+2=0$ sustituimos $M\left(\frac{-1}{2},-1\right)$ $6\left(\frac{-1}{2}\right)-(-1)+2=0 \quad \rightarrow \quad -3+1+2=0 \quad \rightarrow \quad 0=0$

Por tanto la verifica, así que, podemos afirmar que el punto medio del segmento AC pertenece a la diagonal de los vértices B y D.

49.- Situada en un llano se encuentra una torre. Desde un punto se observa la parte más alta con un ángulo de 10° con la horizontal, y si nos aproximamos a la torre 50 metros observamos que el ángulo es ahora de 25°.

1) ¿Qué altura tiene la torre?



Para calcular la altura de la torre, vamos a utilizar la tangente, que es la razón trigonométrica que relaciona el cateto opuesto con el cateto contiguo y con ella vamos a plantear un sistema de ecuaciones no lineales n el que las incógnitas serán x y h.

$$\begin{cases} 1)\ tg\ 10° = \dfrac{h}{x+50} \\ 2)\ tg\ 25° = \dfrac{h}{x} \end{cases}$$

Para resolverlo, despejamos x de la segunda ecuación y lo sustituiremos en la primera:

De la ecuación 2) despejamos x: $tg\ 25° = \dfrac{h}{x} \rightarrow x = \dfrac{h}{tg\ 25°}$

Y lo sustituimos en la 1) $tg\ 10° = \dfrac{h}{x+50} \rightarrow tg\ 10° = \dfrac{h}{\frac{h}{tg\ 25°}+50} \rightarrow$ operando un poco:

$$tg\ 10° = \frac{h}{\frac{h}{tg\ 25°}+50} \rightarrow \left(\frac{h}{tg\ 25°}+50\right) tg\ 10° = h \rightarrow \left(\frac{h}{tg\ 25°}+\frac{50\cdot tg\ 25°}{tg\ 25°}\right) tg\ 10° = h$$

$$(h+50\cdot tg\ 25°)\cdot tg\ 10° = h\cdot tg\ 25° \rightarrow h\cdot tg10° + 50\cdot tg25°\cdot tg10° = h\cdot tg\ 25°$$

Despejando h, llegamos a:

$$50\cdot tg25°\cdot tg10° = h\cdot tg\ 25° - h\cdot tg10° \rightarrow 50\cdot tg25°\cdot tg10° = h\cdot(tg\ 25° - tg10°) \rightarrow h = \frac{50\cdot tg25°\cdot tg10°}{tg\ 25° - tg10°}$$

Y de aquí:

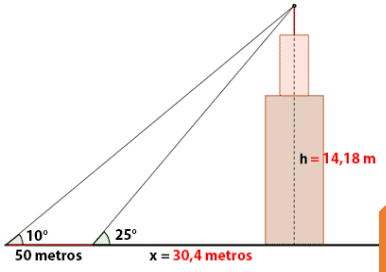
$$h = \frac{50\cdot tg25°\cdot tg10°}{tg\ 25° - tg10°} = 14{,}18\ m$$

Así que, la altura de la torre es de 14,18 metros.

2) ¿A qué distancia de la torre nos encontramos?

En este punto nos piden el valor de x del dibujo, que calcularemos con $x = \dfrac{h}{tg\ 25°}$, por tanto, con sustituir lo obtenido en el apartado anterior, nos bastaría:

$$x = \frac{h}{tg\ 25°} = \frac{14{,}18}{tg\ 25°} = 30{,}4\ m$$

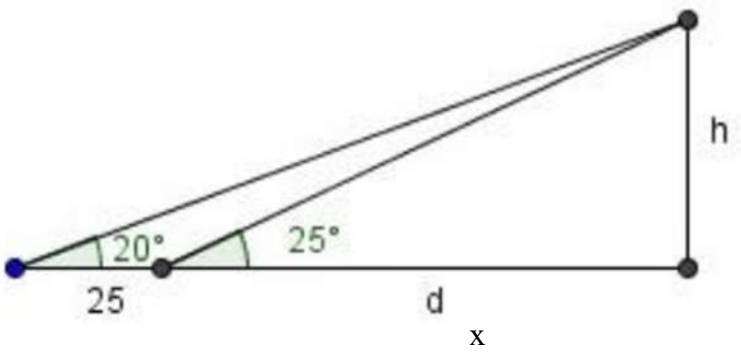


Así que estamos a 30,4 metros de la torre.

50.– Fátima vuelve a su casa y desde un punto de la calle observa bajo un ángulo de 20° que la luz de su balcón está encendida. Se acerca 25 m más hacia el bloque y el ángulo ahora es de 25°.

1) ¿A qué altura está su balcón?

Para calcular la altura del balcón, vamos a utilizar la tangente, que es la razón trigonométrica que relaciona el cateto opuesto con el cateto contiguo y con ella vamos a plantear un sistema de ecuaciones no lineales n el que las incógnitas serán x y h.



$$\begin{cases} 1)\ tg\ 20° = \dfrac{h}{x+25} \\ 2)\ tg\ 25° = \dfrac{h}{x} \end{cases}$$

Para resolverlo, despejamos x de la segunda ecuación y lo sustituiremos en la primera:

$$tg\ 25° = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{h}{tg\ 25°}$$

De la ecuación 2) despejamos x:

Y lo sustituimos en la 1) $tg\ 20° = \dfrac{h}{x+25} \quad \rightarrow \quad tg\ 20° = \dfrac{h}{\frac{h}{tg\ 25°}+25} \quad \rightarrow$ operando un poco:

$$tg\ 20° = \frac{h}{\frac{h}{tg\ 25°}+25} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{h}{tg\ 25°}+25\right) tg\ 20° = h \quad \rightarrow \quad \left(\frac{h}{tg\ 25°}+\frac{25\cdot tg\ 25°}{tg\ 25°}\right) tg\ 20° = h$$

$$(h+25\cdot tg\ 25°)\cdot tg\ 20° = h\cdot tg\ 25° \quad \rightarrow \quad h\cdot tg20° + 25\cdot tg25°\cdot tg20° = h\cdot tg\ 25°$$

Despejando h, llegamos a:

$$25\cdot tg25°\cdot tg20° = h\cdot tg\ 25° - h\cdot tg20° \quad \rightarrow \quad 25\cdot tg25°\cdot tg20° = h\cdot(tg\ 25° - tg20°) \quad \rightarrow \quad h = \frac{25\cdot tg25°\cdot tg20°}{tg\ 25° - tg20°}$$

Y de aquí:

$$h = \frac{25\cdot tg25°\cdot tg20°}{tg\ 25° - tg20°} = 41{,}46\ m$$

Así que, el balcón está a 41,46 m de altura.

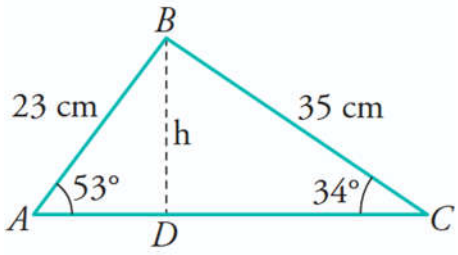
2) ¿A qué distancia del bloque de pisos se encuentra Fátima?

En este punto nos piden el valor de x del dibujo, que calcularemos con $x = \dfrac{h}{tg\ 25°}$, por tanto, con sustituir lo obtenido en el apartado anterior, nos bastaría:

$$x = \frac{h}{tg\ 25°} = \frac{41{,}46}{tg\ 25°} = 88{,}91\ m$$

Así que, Fátima está a 88,91 metros de la torre.

51.- Dado el siguiente triángulo:



1) Halla la longitud AC.

a) En $\widehat{ABD}$, $\cos 53° = \dfrac{\overline{AD}}{23} \rightarrow \overline{AD} \approx 13{,}84$ cm

En $\widehat{BDC}$, $\cos 34° = \dfrac{\overline{DC}}{35} \rightarrow \overline{DC} \approx 29$ cm

$\Big\}\ \overline{AC} \approx 13{,}84 + 29 = 42{,}84$ cm

2) Calcula el área del triángulo ABC.

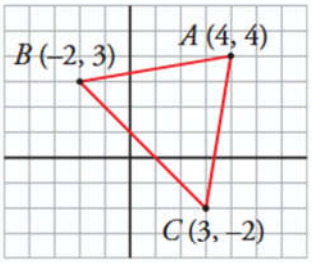
b) Hallamos la altura h en el triángulo ABD:

$$\text{sen } 53° = \frac{h}{23} \rightarrow h \approx 18{,}37 \text{ cm}$$

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} = \frac{42{,}84 \cdot 18{,}37}{2} \approx 393{,}49 \text{ cm}^2$$

52.- Sean los puntos A (4, 4), B (–2, 3) y C (3, –2)

1) Comprueba que forman un triángulo isósceles.



$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(4+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37} \\ \overline{AC} &= \sqrt{(4-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37} \end{aligned}\right\} \overline{AB} = \overline{AC}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Por tanto, el triángulo es isósceles puesto que tiene dos lados iguales y uno desigual.

2) Calcula su área.

Calculamos la altura sobre el lado BC:

$$M_{BC} = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

La altura es la distancia entre A y el punto medio de BC:

$$h = \sqrt{\left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} \cdot 2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{Área} = \frac{5\sqrt{2} \cdot (7/2)\sqrt{2}}{2} = \frac{35}{2} \text{ u}^2$$

Así que, el área es de 17,5 unidades de área.

53.- Dadas las rectas $r: \{3x - 5y + 15 = 0$ y $s: \{$pasa por $(-2,3)$ y $(8,3)$

1) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

Para estudiar la posición relativa nos ayudaremos de los vectores directores de las rectas, así que los calculamos:

- El vector director de la recta r es: $\vec{r} = (5,3)$
- El vector director de la recta s es: $\vec{s} = B - A = (8+2, 3-3) = (10,0)$

Podemos observar que los vectores no son proporcionales

$$\frac{r_x}{s_x} \neq \frac{r_y}{s_y} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{10} \neq \frac{3}{0} \quad \rightarrow \quad \vec{r} \neq k \cdot \vec{s}$$

Por tanto, las rectas son secantes.

$$\text{Y como } r_x \cdot s_x + r_y \cdot s_y \neq 0 \quad \rightarrow \quad 5 \cdot 10 + 3 \cdot 0 = 50 \neq 0$$

Las rectas no son perpendiculares.

Por tanto, las rectas son secantes no perpendiculares.

2) Escribe la ecuación explícita de la recta perpendicular a r que pasa por el origen de coordenadas.

El vector director de la recta r es: $\vec{r} = (5,3)$, por tanto, el vector director de una recta S, perpendicular a r, será: $\vec{s} = (-3,5)$.

Sabemos que la ecuación explícita de la recta es de la forma, **y = m·x + b,** donde:

- **m es la pendiente** o inclinación de la recta con respecto al eje x y que viene dada por el cociente $m = -\frac{s_y}{s_x} = \frac{5}{3}$
- **b es la ordenada en el origen**, que en nuestro caso es 0 porque la recta pasa por el origen de coordenadas.

Según todo esto, la ecuación explícita de la recta s es: $s: \left\{ y = -\frac{5}{3}x \right.$

54.- El laboratorio de la policía científica de Casablanca, han llegado 30 botellas de agua de distintas marcas, para analizar su contenido en sales minerales,

Se han obtenido los siguientes datos, expresados en mg.

46 25 27 30 48 40 76 75 49 59 33 52 21 32 45
27 44 37 62 56 29 54 45 66 69 34 53 45 75 56

Realiza un estudio estadístico del problema contestando a los siguientes apartados:

1.- Clasifica la variable estadística de concentración de sales.
2.- Agrupa los datos en una tabla de 7 intervalos
3.- Completa la tabla con todas las columnas necesarias

X_i		f_i						
Intervalos	x_i							
Totales:								

Calcula:

4.- La media y la moda
5.- La mediana y los cuartiles
6.- Los percentiles P_{40}, P_{80} y P_{98}
7.- La desviación media
8.- La varianza y la desviación típica
9.- El coeficiente de variación
10.- Representa los datos mediante el gráfico que consideres más adecuado.

1.- Clasifica la variable estadística de concentración de sales.

La concentración de sales, x_i, es una variable estadística cuantitativa continua.

2.- Agrupa los datos en una tabla de 7 intervalos.

El recorrido, r, es la diferencia entre los valores máximos y mínimos;

$$r = \max - \min = 76 - 21 = 55 \quad \rightarrow \quad r = 55$$

Elegimos un r', un poco más grande que el recorrido y que además sea múltiplo de 7. $r' = 56$

Calculamos $\Delta r = r' - r = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta r}{2} = 0,5$ y calculamos la amplitud de cada intervalo: $a_i = \frac{r'}{7} = 8$

Con esto cada intervalo tiene una amplitud a=8 y empezamos en: $\min - a = 21 - 0,5 = 20,5$
Por tanto, el primer intervalo es (20,5-28,5).

3.- Completa la tabla con todas las columnas necesarias

x_i		f_i	F_i	h_i	H_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert \cdot f_i$
Intervalos	x_i							
20,5 – 28,5	24,5	4	4	0,133	0,133	98	2401	91,72
28,5 – 36,5	32,5	5	9	0,166	0,3	162,5	5281,25	74,15
36,5 – 44,5	40,5	3	12	0,1	0,4	121,5	4920,75	20,79

44,5 – 52,5	48,5	7	19	0,233	0,633	339,5	16465,75	7,49
52,5 – 60,5	56,5	5	24	0,166	0,8	282,5	15961,25	45,35
60,5 – 68,5	64,5	2	26	0,066	0,866	129	8320,5	34,14
68,5 – 76,5	72,5	4	30	0,133	1	290	21025	100,28
Totales:			N=30			$\sum x_i \cdot f_i = 1423$	$\sum x_i^2 \cdot f_i = 74375,5$	$\sum \lvert x_i - \bar{x} \rvert \cdot f = 373,92$

Calcula:

4.- La media y la moda

La media aritmética viene dada por: $Media: \bar{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \dfrac{1423}{30} = 47,43$

La moda, que es el valor que más se repite, el 7, se encuentra en el intervalo (44,5 – 52,5), así que:

$$Mo = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i = 44,5 + \frac{(7-3)}{(7-3)+(7-5)} \cdot 8 = 49,83$$

5.- La mediana y los cuartiles

La mediana, que es la medida central, N/2=15, se encuentra en el intervalo (44,5 – 52,5) por tanto:

$$Me = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i = 44,5 + \frac{15-12}{7} \cdot 8 = 47,93$$

Los cuartiles vienen dados por: $Q_k = L_i + \dfrac{\frac{k \cdot N}{4} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i$

El primer cuartil, Q_1, está en 30/4=7,5 y se corresponde con la clase (28,5 – 36,5) y su valor es:

$$Q_1 = 28,5 + \frac{7,5-4}{5} \cdot 8 = 34,1$$

El tercer cuartil, Q_3, está en 30·3/4=22,5 y se corresponde con la clase (52,5 -60,5) y su valor es:

$$Q_3 = 52,5 + \frac{22,5-19}{5} \cdot 8 = 58,1$$

6.- Los percentiles P_{40}, P_{80} y P_{98}

Los Percentiles vienen dados por la expresión: $P_k = L_i + \dfrac{\frac{k \cdot N}{100} - F_{i-1}}{fi} \cdot a_i$

El percentil 40 $\dfrac{40 \cdot 30}{100} = 12$ se encuentra en la clase (36,5 – 44,5) y su valor es: $P_{40} = 36,5 + \dfrac{12-9}{3} \cdot 8 = 44,5$

El percentil 80 $\dfrac{80 \cdot 30}{100} = 24$ se encuentra en la clase (52,5 – 60,5) y su valor es: $P_{80} = 52,5 + \dfrac{24-19}{5} \cdot 8 = 60,5$

El percentil 98 $\dfrac{98 \cdot 30}{100} = 29,4$ se encuentra en la clase (68,5 – 76,5) y su valor es: $P_{98} = 68,5 + \dfrac{29,4-26}{4} \cdot 8 = 75,3$

7.- La desviación media

La desviación media viene dada por: $D_{\bar{x}} = \dfrac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N} = \dfrac{373,92}{30} = 12,464$

8.- La varianza y la desviación típica

La Varianza la calculamos mediante la expresión $Var = \dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \dfrac{74375,5}{30} - 47,43^2 = 229,58$

La Desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{Var} = \sqrt{\dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{229,58} = 15,15$

9.- El coeficiente de variación

El coeficiente de variación es: $C.V. = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{15,15}{47,43} = 0,319$

10.- Representa los datos mediante el gráfico que consideres más adecuado.

55.- Se sabe que el 90% de los alumnos de un centro docente está interesado por las redes sociales, el 60% está interesado por sus notas y el 55% por ambas cuestiones. Se elige al azar un alumno de ese centro.

a) Calcule la probabilidad de que dicho alumno esté interesado por alguna de las dos cuestiones.
b) Calcule la probabilidad de que esté interesado por sus notas, sabiendo que no está interesado por las redes sociales.
c) Calcule la probabilidad de que no esté interesado por ninguna de estas dos cuestiones.

Los datos del problema son: $p(R) = 0'9$; $p(N) = 0'6$; $p(R \cap N) = 0'55$

a) $p(R \cup N) = p(R) + p(N) - p(R \cap N) = 0'9 + 0'6 - 0'55 = 0'95 \Rightarrow 95\%$

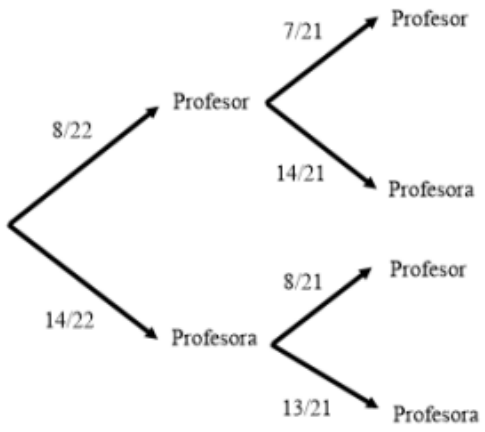
b) $p(N/\overline{R}) = \dfrac{p(N \cap \overline{R})}{p(\overline{R})} = \dfrac{p(N) - p(N \cap R)}{1 - p(R)} = \dfrac{0'6 - 0'55}{1 - 0'9} = 0'5 \Rightarrow 50\%$

c) $p(\overline{N} \cap \overline{R}) = p(\overline{N \cup R}) = 1 - p(N \cup R) = 1 - 0'95 = 0'05 \Rightarrow 5\%$

56.- En un departamento de una Universidad hay 8 profesores y 14 profesoras. Se quiere constituir una comisión formada por 2 miembros del departamento, elegidos al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean profesoras?
b) Calcule la probabilidad de que la comisión esté constituida por un profesor y una profesora.
c) Halle la probabilidad de que en la comisión no haya ninguna profesora.

Hacemos un diagrama de árbol:



a) $p(2\ profesoras) = \frac{14}{22}\cdot\frac{13}{21} = \frac{13}{33} = 0'3939$

b) $p(profesor\ y\ profesora) = \frac{8}{22}\cdot\frac{14}{21} + \frac{14}{22}\cdot\frac{8}{21} = \frac{224}{462} = \frac{16}{33} = 0'4848$

c) $p(No\ profesora) = \frac{8}{22}\cdot\frac{7}{21} = \frac{56}{462} = \frac{4}{33} = 0'1212$

57.- De los sucesos A y B se sabe que:

$$P(A) = 0{,}6 \qquad P\left(\frac{B}{A}\right) = 0{,}8 \qquad P\left(\frac{B}{\overline{A}}\right) = 0{,}1$$

a) Calcule las probabilidades. $P(B)$ $P(A\cap B)$ $P(A\cup B)$
a) ¿Son los sucesos A y B independientes?
b) ¿Son compatibles?

a)

$$p(B/A^c) = \frac{p(B\cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{p(B)-p(B\cap A)}{p(A^c)} \Rightarrow 0'1 = \frac{p(B)-0'48}{1-0'6} \Rightarrow p(B) = 0'52$$

$$p(B/A) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} \Rightarrow 0'8 = \frac{p(A\cap B)}{0'6} \Rightarrow p(A\cap B) = 0'48$$

$$p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B) = 0'6+0'52-0'48 = 0'64$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} p(A\cap B) = 0'48 \\ p(A)\cdot p(B) = 0'6\cdot 0'52 = 0'312 \end{array}\right\} p(A\cap B) \neq p(A)\cdot p(B) \Rightarrow \text{Dependientes}$$

c) Como la intersección no es nula son sucesos compatibles.

59.– El tiempo en horas dedicado cada día al uso del teléfono móvil por los estudiantes de bachillerato de una ciudad, es una variable aleatoria continua. Se toma una muestra aleatoria de 40 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos de uso en horas:

2,5	4,2	2,2	3,3	1,2	2,4	4,7	2,1	3,0	0,0	2,2	2,1	2,7	3,2	2,8	6,0	2,5	3,5	2,2	2,4
3,3	2,2	3,4	3,5	4,0	3,7	3,0	3,5	4,7	5,2	2,8	3,1	2,1	1,4	2,3	3,9	2,1	2,0	3,3	1,8

a) Construye una tabla de datos agrupados en 6 intervalos.
b) Calcula la media, la moda y la mediana.
c) Calcula la desviación típica.

a) Como $r=6$, tomamos 6 intervalos de radio 1, empezando en 0.

x_i		f_i	F_i	h_i	H_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert \cdot f_i$
Intervalos	x_i							
[0,1)	0,5	1	1	0,025	0,025	0,5	0,25	2,55
[1,2)	1,5	3	4	0,075	0,1	4,5	6,75	4,65
[2,3)	2,5	17	21	0,425	0,525	42,5	106,25	9,35
[3,4)	3,5	13	34	0,325	0,85	45,5	159,25	5,85
[4,5)	4,5	4	38	0,1	0,95	18	81	5,8
[5,6]	5,5	2	40	0,05	1	11	60,5	4,9
Totales:			N=40	$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = 3,05$		$\sum x_i \cdot f_i = 122$	$\sum x_i^2 \cdot f_i = 414$	$\sum \lvert x_i - \bar{x}\rvert \cdot f = 33,1$

b)

La ***media aritmética*** viene dada por: $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = 3,05$

La ***moda***, que es el valor que más se repite, el 2,5 se encuentra en el intervalo [2,3), así que:

$$Mo = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i = 2 + \frac{(17-3)}{(17-3)+(17-13)} \cdot 1 = 2,78$$

La ***mediana***, que es la medida central, N/2=20, se encuentra en el intervalo [2,3) por tanto:

$$Me = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i = 2 + \frac{20-4}{17} \cdot 1 = 2,94$$

c) Para la desviación típica calculamos primero la varianza:

La ***Varianza*** la calculamos mediante la expresión $Var = \dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \dfrac{414}{40} - 3,05^2 = 1,0475$

La ***Desviación típica*** es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{Var} = \sqrt{\dfrac{\sum f_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{1,0475} = 1,0235$