4º ESO B

2ª EVALUACIÓN

MATEMÁTICAS

EJERCICIOS DE EXÁMENES

1.– Resuelve paso a paso cada una de las siguientes ecuaciones y completa la tabla con sus soluciones.

1) $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{x-1}{6}-\dfrac{x}{4} \xrightarrow{\text{Quitamos ()}} \dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{x-1}{6}-\dfrac{x}{4} \xrightarrow{\text{Reducimos a común denominador}} \dfrac{4\cdot(2x+1)}{12}-\dfrac{6x}{12}+\dfrac{3}{12}=\dfrac{2\cdot(x-1)}{12}-\dfrac{3x}{12}$

$\rightarrow \dfrac{4\cdot(2x+1)}{\cancel{12}}-\dfrac{6x}{\cancel{12}}+\dfrac{3}{\cancel{12}}=\dfrac{2\cdot(x-1)}{\cancel{12}}-\dfrac{3x}{\cancel{12}} \xrightarrow{\text{Quitamos denominadores}} 4(2x+1)-6x+3=2(x-1)-3x$

$\xrightarrow{\text{Quitamos ()}} 8x+4-6x+3=2x-2-3x \xrightarrow{\text{Agrupamos}} 2x+7=-x-2 \xrightarrow{\text{Transponemos términos}} 2x+x=-2-7$

$\xrightarrow{\text{Agrupamos}} 3x=-9 \xrightarrow{\text{Despejamos x}} x=\dfrac{-9}{3} \rightarrow x=-3$

2) $\dfrac{(2x-1)\cdot(2x+1)}{3}+\dfrac{(x-2)^2}{4}=\dfrac{3x+4}{6}+\dfrac{x^2}{3} \xrightarrow{\text{Quitamos () desarrollando id. notables}} \dfrac{4x^2-1}{3}+\dfrac{x^2-4x+4}{4}=\dfrac{3x+4}{6}+\dfrac{x^2}{3} \xrightarrow{\text{Reducimos a común denominador}}$

$\rightarrow \dfrac{4\cdot(4x^2-1)}{12}+\dfrac{3\cdot(x^2-4x+4)}{12}=\dfrac{2\cdot(3x+4)}{12}+\dfrac{4\cdot x^2}{12} \xrightarrow{\text{Quitamos denominadores}} 4\cdot(4x^2-1)+3\cdot(x^2-4x+4)=2\cdot(3x+4)+4x^2$

$\xrightarrow{\text{Quitamos ()}} 16x^2-4+3x^2-12x+12=6x+8+4x^2 \xrightarrow{\text{Pasamos todo al primer miembro}} 16x^2-4+3x^2-12x+12-6x-8-4x^2=0$

$\xrightarrow{\text{Agrupamos}} 15x^2-18x=0 \xrightarrow{\text{Sacamos factor común y transformamos en ecuación factorizada}} 3x\cdot(5x-6)=0 \xrightarrow{\text{Igualamos los factores a Cero}} \begin{cases} 3x=0 \rightarrow x_1=0 \\ 5x-6=0 \rightarrow x_2=\dfrac{6}{5} \end{cases}$

3) $36x^4-13x^2+1=0 \xrightarrow{\text{Hacemos cambio de variable } z=x^2} 36z^2-13z+1=0 \xrightarrow{\text{Resolvemos ec. de segundo grado}} z=\dfrac{13\pm\sqrt{169-4\cdot 36\cdot 1}}{2\cdot 36}=\dfrac{13\pm\sqrt{169-144}}{72}=$

$=\dfrac{13\pm\sqrt{25}}{72}=\dfrac{13\pm 5}{72} \rightarrow \begin{cases} z_1=\dfrac{18}{72}=\dfrac{1}{4} \\ z_1=\dfrac{8}{72}=\dfrac{1}{9} \end{cases} \xrightarrow{\text{Desacemos el cambio: } x=\pm\sqrt{z}} \begin{cases} z_1=\dfrac{18}{72}=\dfrac{1}{4} \rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\pm\dfrac{1}{2} \\ z_1=\dfrac{8}{72}=\dfrac{1}{9} \rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\pm\dfrac{1}{3} \end{cases}$

4) $4x^4-x^3-28x^2+31x-6=0 \xrightarrow{\text{La transformamos en una ecuación factorizada mediante Ruffini}}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -1 & -28 & 31 & -6 \\ 1 & & 4 & 3 & -25 & 6 \\ \hline & 4 & 3 & -25 & 6 & \boxed{0} \\ 2 & & 8 & 22 & -6 & \\ \hline & 4 & 11 & -3 & \boxed{0} & \\ -3 & & -12 & 3 & & \\ \hline & 4 & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$4x^4-x^3-28x^2+31x-6=0 \rightarrow (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(4x-1)=0$

$\downarrow$

$Si\ x-1=0 \rightarrow x=1$

$Si\ x-2=0 \rightarrow x=2$

$Si\ x+3=0 \rightarrow x=-3$

$Si\ 4x-1=0 \rightarrow x=-\dfrac{1}{4}$

5) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-2} \xrightarrow{\text{Factorizamos los denominadores}} \begin{cases} x^2-3x+2=(x-1)\cdot(x-2) \\ x-1=(x-1) \\ x-2=(x-2) \end{cases} \xrightarrow{\text{Calculamos el m.c.m. de todos}} m.c.m.=(x-1)\cdot(x-2) \rightarrow$

$\xrightarrow{\text{Reducimos a común denominador}} \dfrac{1}{(x-1)\cdot(x-2)}+\dfrac{x-2}{(x-1)\cdot(x-2)}=\dfrac{x-1}{(x-1)\cdot(x-2)} \xrightarrow{\text{Quitamos denominadores}} 1+x-2=x-1 \xrightarrow{\text{Agrupamos}} 0x=0$

$\rightarrow$ Identidad

6) $\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=1 \xrightarrow{\text{Aislamos un Radical}} \sqrt{4x+5}=1+\sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado ambos miembros}} \left(\sqrt{4x+5}\right)^2=\left(1+\sqrt{3x+1}\right)^2 \xrightarrow{\text{Operamos}}$

$\rightarrow 4x+5=1+3x+1+2\sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{Aislamos otra vez el Radical}} 4x-3x-2+5=2\sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{Agrupamos}} x+3=2\sqrt{3x+1} \rightarrow$

$\xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado otra vez}} (x+3)^2=\left(2\sqrt{3x+1}\right)^2 \xrightarrow{\text{Operamos}} x^2+6x+9=4(3x+1) \xrightarrow{\text{Agrupamos}} x^2+6x+9-12x-4=0$

$\rightarrow x^2-6x+5=0 \xrightarrow{\text{Factorizamos}} (x-5)\cdot(x+1)=0 \xrightarrow{\text{Resolvemos}} \begin{cases} Si\ x-5=0 \rightarrow x=5 \\ Si\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$

7) $3^x-3^{x-1}+3^{x-2}=21 \xrightarrow{\text{Descomponemos las potencias}} 3^x-\dfrac{3^x}{3}+\dfrac{3^x}{9}=21 \xrightarrow{\text{Sacamos factor común } 3^x} 3^x\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}\right)=21 \xrightarrow{\text{Operamos}}$

$\rightarrow 3^x\left(\dfrac{9}{9}-\dfrac{3}{9}+\dfrac{1}{9}\right)=21 \xrightarrow{\text{Operamos}} 3^x\left(\dfrac{7}{9}\right)=21 \xrightarrow{\text{Despejamos}} 3^x=\dfrac{21\cdot 9}{7}=27 \rightarrow 3^x=3^3 \rightarrow$

$\rightarrow x=3$

8) $9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0 \xrightarrow{\text{Descomponemos las potencias}} \left(3^2\right)^x-2\cdot 3^x\cdot 9+81=0 \xrightarrow{\text{Operamos}} \left(3^x\right)^2-18\cdot 3^x+81=0$

$\xrightarrow{\text{Hacemos un cambio de variable } z=3^x} z^2-18z+81=0 \rightarrow (z-9)^2=0 \rightarrow z=9 \xrightarrow{\text{Deshacemos el cambio}} 3^x=9=3^2 \rightarrow$

$\rightarrow 3^x=3^2 \xrightarrow{\text{Si las bases son iguales, los exponentes también lo son.}} x=2$

9) $\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{x+1}}=1 \xrightarrow{\text{Pasamos el 2 al segundo miembro}} \sqrt{1+\sqrt{x+1}}=2 \xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado ambos miembros}} \left(\sqrt{1+\sqrt{x+1}}\right)^2=2^2 \rightarrow$

$\xrightarrow{\text{Operamos}} 1+\sqrt{x+1}=4 \xrightarrow{\text{Pasamos el 1 al segundo miembro}} \sqrt{x+1}=3 \xrightarrow{\text{Elevamos otra vez al cuadrado}} x+1=9 \xrightarrow{\text{Despejamos}} x=8$

10) $\dfrac{\ln\left(16-x^2\right)}{\ln(3x-4)}=2 \xrightarrow{\text{Pasamos el denominador al segundo miembro}} \ln\left(16-x^2\right)=2\cdot\ln(3x-4) \xrightarrow{\text{Por las propiedades de los logaritmos el 2 sube arriba}} \ln\left(16-x^2\right)=\ln(3x-4)^2$

$\xrightarrow{\text{Si los logaritmos son iguales los argumentos también}} 16-x^2=(3x-4)^2 \xrightarrow{\text{Operamos}} 16-x^2=9x^2-24x+16 \xrightarrow{\text{Agrupamos}} 10x^2-24x=0$

$\xrightarrow{\text{Factorizamos sacando factor común}} 2x(5x-12)=0 \rightarrow \begin{cases} Si\ 2x=0 \rightarrow x=0 \\ Si\ 5x-12=0 \rightarrow x=\dfrac{12}{5} \end{cases}$

Desechamos la solución x=0 porque hace que el argumento del logaritmo sea negativo.

B) $\begin{cases} x-y=9 \\ \log x+\log y=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Aplicamos Propiedades de los logaritmos}} \begin{cases} x-y=9 \\ \log(x\cdot y)=\log 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{Quitamos Logaritmos}} \begin{cases} x-y=9 \\ x\cdot y=10 \end{cases} \xrightarrow{\text{Despejamos y de la segunda ec.}} y=\frac{10}{x}$

$\xrightarrow{\text{Por el método de SUSTITUCIÓN sustituimos en la primera ec.}} x-\frac{10}{x}=9 \xrightarrow{\text{Operamos}} x^2-9x-10=0 \xrightarrow{\text{Factorizamos}} (x-10)\cdot(x+1)=0$

$\xrightarrow{\text{Resolvemos}} \begin{cases} Si\ x-10=0 \to x=10 \xrightarrow{\text{y Sustituyendo}} y=\frac{10}{x}=\frac{10}{10}=1 \\ Si\ x+1=0 \to x=-1 \xrightarrow{\text{y Sustituyendo}} y=\frac{10}{x}==\frac{10}{-1}=-10 \end{cases}$

$S.C.D.\{x=10; y=1\}$ Desechamos las otras por hacer negativos los argumentos de los logaritmos.

2.- Un cajero hace dos pagos. En el primero da los 2/5 de lo que hay más 500 dh. En el segundo da la mitad de lo que queda más 250 dhs. Al final queda en el cajero la quinta parte de lo que tenía al principio. Calcula lo que tenía el cajero al principio y los pagos que ha efectuado.

Se trata de un problema de ecuaciones, así que si llamamos x al dinero que tenía el cajero al principio:

Primer pago: $\frac{2}{5}x+500$

Quedan: $x-\left(\frac{2}{5}x+500\right)=\frac{3}{5}x-500$

Segundo pago: $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}x-500\right)+250=\frac{3}{10}x-250+250=\frac{3}{10}x$

Entre los dos pagos, ha el cajero ha dado: $\frac{2}{5}x+500+\frac{3}{10}x=\frac{7}{10}x+500$

Por lo que quedan: $x-\left(\frac{7}{10}x+500\right)=\frac{3}{10}x-500$

Y esta cantidad se corresponde con la quinta parte de lo que había al principio, es decir, con $\frac{x}{5}$.

Así que, la ecuación será: $\frac{3}{10}x-500=\frac{x}{5}$, cuya solución es:

$$\frac{3x}{10}-500=\frac{x}{5} \to \frac{3x}{10}-\frac{5000}{10}=\frac{2x}{10} \to 3x-5000=2x \to x=5000$$

Por tanto, en el cajero habían 5.000 dh

En el primer pago ha dado $\frac{2}{5}\cdot 5000+500=2.500$ y en el segundo $\frac{3}{10}\cdot 5000=1.500$

Así que el primer pago da 2.500 dh y en el segundo 1.500 dh.

De esta forma quedan 1.000 dh que se corresponde con la quinta parte de lo que había al principio.

3.- Debido al excesivo precio del aceite de oliva, la cooperativa de supermercados Coviran, junto con algunos productores olivareros de la provincia de Granada, deciden lanzar 2.000 litros de un aceite de oliva mezcla de dos de los mejores aceites de la región al precio de 7,20 € el litro. ¿Qué cantidades cada uno de los aceites han utilizado para conseguir dicha mezcla, si uno cuesta 9 € el litro y el otro 6 €?

Al tratarse de un problema de mezclas nos ayudamos de una tabla:

	Cantidad (litros)	Precio (€/litro)	Total
Aceite 1	x	9	9x
Aceite 2	2000−x	6	6·(2000−x) = 12.000 − 6x
Mezcla de aceites	2000	7,20	2000·7,20 = 14.400

Una vez completada la tabla, escribimos la ecuación sabiendo que la suma de los totales de los ingredientes es igual al total de la mezcla.

$$Total_{Aceite(1)} + Total_{Aceite(2)} = Total_{Mezcla} \quad \rightarrow \quad 9x + 12.000 - 6x = 14.400$$

Que resolviendo nos da:

$$9x + 12.000 - 6x = 14.400 \quad \rightarrow \quad 9x - 6x = 14.400 - 12.000 \quad \rightarrow \quad 3x = 2.400 \quad \rightarrow \quad x = 800$$

La mezcla contiene 800 litros de aceite de 9 € y 1.200 litros de aceite de 6 €.

4.- Cuando dos bombas de agua actúan a la vez, tardan en vaciar un pozo 15 horas. Si actuara solo una, tardaría en vaciarlo 16 horas más que si actuara la otra. ¿Cuánto tardarían en vaciarlo cada una por separado?

Se trata de un problema de ecuaciones, pero particularmente uno de grifos, así que si llamamos x al tiempo (en horas) que tardaría una de las bombas, entonces la otra tardaría 16+x horas.

Para plantear la ecuación, nos fijamos en cuanto depósito se vacía en una hora con cada una de las bombas o con las dos:

$$\left.\begin{matrix} Bomba\ 1: x \\ Bomba\ 2: x+16 \\ Las\ dos: 15 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{En 1 hora vaciaran:}} \left.\begin{matrix} Bomba\ 1: \frac{1}{x} \\ Bomba\ 2: \frac{1}{x+16} \\ Las\ dos: \frac{1}{15} \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{Será igual a la suma de lo que haga cada una pors eparado también en 1 hora}]{\text{Lo que hagan las dos bombas a la vez en 1 hora}} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+16} = \frac{1}{15} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{15(x+16)}{\cancel{x\cdot(x+16)\cdot 15}} + \frac{15x}{\cancel{x\cdot(x+16)\cdot 15}} = \frac{x(x+16)}{\cancel{x\cdot(x+16)\cdot 15}} \rightarrow 15x + 240 + 15x = x^2 + 16x \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + 16x - 30x - 240 = 0 \rightarrow x^2 - 14x - 240 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -14 \\ c = -240 \end{cases} \leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\rightarrow x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4\cdot 1\cdot(-240)}}{2\cdot 1} = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 960}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{1156}}{2} = \frac{14 \pm 34}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{14+34}{2} = \frac{48}{2} = 24 \\ x_2 = \frac{14-34}{2} = \frac{-20}{2} = -10 \end{cases}$$

Desechamos la segunda por ser negativa (los tiempos no pueden ser negativos) y nos quedamos con la primera.

Por tanto, una bomba es capaz de vaciar el depósito en 24 horas y la otra en 24 + 16 = 40 horas.

5.- La edad de mi hermana es hoy el cuadrado de la de su hija, pero dentro de nueve años solamente será el triple. ¿Qué edad tienen mi hermana y mi sobrina?

Se trata de un problema de ecuaciones, pero particularmente uno de edades, así que nos ayudaremos de una tabla en la que llamaremos x a la edad actual de la hija.

Edades	Hoy	Dentro de 9 años
Hija	x	$x + 9$
Madre	x^2	$x^2 + 9$

Con ello, ya podemos plantear la ecuación en la línea temporal: *dentro de 9 años:*

En 9 años, la edad de la madre (x^2+9) será (=) el triple de la de la hija 3·(x+9)

$$x^2 + 9 = 3(x+9) \rightarrow x^2 + 9 = 3x + 27 \rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -18 \end{cases}$$

Y cuya solución es:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad\rightarrow\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot(-18)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{3\pm 9}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{3+9}{2}=\frac{12}{2}=6 \\ x_2=\frac{3-9}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \end{cases}$$

Desechamos la segunda por ser negativa (ya que las edades no pueden ser negativas) y nos quedamos con la primera.

Por tanto, la hija tiene 6 años y la madre 6^2= 36 años.

Si calculamos las edades de cada una dentro de 9 años, vemos que 6+9=15 y 36+9=45 que es el triple.

6.- En un garaje hay 110 vehículos entre coches y motos, si todas sus ruedas suman 360. ¿Cuántas motos y coches hay en el garaje?

Se trata de un problema de ecuaciones, así que, si llamamos **x** al número de coches, entonces el número de motos será: **110-x**, y con esto ya podemos plantear la ecuación ayudándonos del número de ruedas en el garaje y de que un coche tiene 4 ruedas y una moto dos:

$$\left.\begin{matrix} Coches: x \\ Motos: 110-x \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Por el número de Ruedas}} \quad 4x+2(110-x)=360 \quad\rightarrow\quad 4x+220-2x=360 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad 4x-2x=360-220 \quad\rightarrow\quad\rightarrow\quad 2x=140 \quad\rightarrow\quad x=\frac{140}{2} \quad\rightarrow\quad x=70$$

Por tanto, en el garaje hay 70 coches y 110-70 = 40 motos.

Si calculamos el total de ruedas, vemos que 70·4+2·40=280+80=360, coincide con el número dado en el enunciado.

7.- El número de visitantes a cierta exposición durante el mes de febrero se incrementó en un 12% respecto al mes de enero. Sin embargo, en marzo sufrió un descenso del 12 % respecto a febrero. Si el número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo, ¿Cuántos vieron la exposición en enero?

Llamaremos x al número de visitantes en el mes de enero. Como el porcentaje de visitas sube y luego baja, calcularemos los índices de variación de cada uno de los meses:

$$Iv_{febrero}=1+\frac{12}{100}=1+0.12=1{,}12 \qquad\qquad Iv_{marzo}=1-\frac{12}{100}=1-0.12=0{,}88$$

Recuerda que el índice de variación total, se calculaba multiplicando todos los índices de variación parciales:

$$Iv_{Total}=Iv_{febrero}\cdot Iv_{marzo}=1{,}12\cdot 0{,}88=0{,}9856$$

Sabemos que el número de visitantes en marzo fue de:

$$C_{fin}=C_{ini}\cdot Iv_{Total} \quad\rightarrow\quad Asistentes_{marzo}=Asistentes_{enero}\cdot Iv_{total} \quad\rightarrow\quad Asistentes_{marzo}=X\cdot 0{,}9856$$

Pues, con esto, y sabiendo que en enero asistieron 36 personas más a la exposición, podemos escribir la ecuación:

$$Asistentes_{enero}=Asistentes_{marzo}+36 \quad\rightarrow\quad x=0{,}98567\cdot x+36$$

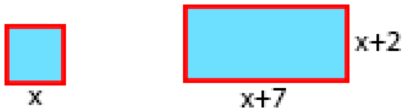
Cuya solución es:

$$x=0{,}98567\cdot x+36 \quad\rightarrow\quad x-0{,}98567\cdot x=36 \quad\rightarrow\quad 0{,}0144x=36 \quad\rightarrow\quad x=\frac{36}{0.0144} \quad\rightarrow\quad x=2.500$$

Por tanto, a la exposición asistieron 2.500 personas en enero.

8.- Si al lado de un cuadrado se le alargan 2 metros y al lado contiguo se le alargan 7 metros, obtenemos un rectángulo cuya área es 22 m^2 más que el doble de la del cuadrado inicial. Calcula las dimensiones del cuadrado. (1,5 puntos)

Lo primero que haremos será ayudarnos de un pequeño croquis del problema:



Si llamamos **x** al lado del cuadrado, su área será: $A_c = x^2$. Y si alargamos uno de sus lados en 7 metros y el otro en 2, obtenemos un rectángulo cuya área será:

$$A_{Cuadrado} = x^2 \qquad A_{Rectángulo} = (x+2)\cdot(x+7)$$

Y, si, además, nos dicen que el área del rectángulo es el doble de la del cuadrado + 22 m^2, ya podemos plantear la ecuación:

$$A_{Rectángulo} = 2\cdot A_{Cuadrado} + 22 \quad \rightarrow \quad (x+7)\cdot(x+2) = 2x^2 + 22$$

Cuya solución es:

$$(x+7)\cdot(x+2) = 2x^2 + 22 \quad \rightarrow \quad x^2 + 9x + 14 = 2x^2 + 22 \quad \rightarrow \quad x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Factorizando}} \quad (x-8)\cdot(x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

Si comprobamos las soluciones, vemos que ambas verifican la ecuación.

Por tanto, existen dos cuadrados que verifican el enunciado, uno 1 metro de lado y otro de 8 metros.

9.- La edad de una madre es 21 años mayor que la de su hijo. Al cabo de 6 años la edad de la madre será cinco veces la que tenga el hijo. ¿Qué está haciendo el padre?

Se trata de un problema de edades, en el que llamaremos **x** a la edad actual del hijo, y con la ayuda de una tabla:

Edades	Hoy	Al cabo de 6 años
Hijo	x	$x+6$
Madre	$x+21$	$x+27$

Con todos estos datos, podemos plantear la ecuación en la línea temporal al cabo de 6 años:

En 6 años, la edad de la madre (x+27) será (=) cinco veces la del hijo 5·(x+6) $\quad \rightarrow \quad x + 27 = 5(x+6)$

Cuya solución es:

$$x + 27 = 5(x+6) \quad \rightarrow \quad x + 27 = 5x + 30 \quad \rightarrow \quad 4x = -3 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{3}{4} \text{ años}$$

Por tanto, la edad del niño es de −3/4 años, que en meses es de:

$$x = -\frac{3}{4} \text{ años} \cdot \frac{12 \text{ meses}}{1 \text{ año}} = -\frac{3}{4} \cancel{\text{años}} \cdot \frac{12 \text{ meses}}{1 \cancel{\text{año}}} = -\frac{3\cdot 12}{4} = -9 \text{ meses}$$

Si la edad del hijo es de **−9 meses**, y sabiendo que la gestación de un bebé humano es de 9 meses, a la pregunta de qué está haciendo el padre, la respuesta es:

El padre está fecundando a la madre.

10.- Calcula un número entero, sabiendo que si al cuadrado del siguiente número le restamos ocho veces su inverso obtenemos 23.

Si llamamos x al número, su siguiente será: x + 1, el cuadrado de su siguiente será (x + 1)², y su inverso será: $\frac{1}{x}$ así que con esto ya podemos plantear la ecuación:

$$\underbrace{(x+1)^2}_{\text{El cuadrado del siguiente}} - \underbrace{8\cdot\frac{1}{x}}_{\text{8 veces su inverso}} = 23 \quad\rightarrow\quad (x+1)^2 - \frac{8}{x} = 23 \quad\xrightarrow{\text{Operando}}\quad x^2+2x+1-23-\frac{8}{x}=0 \quad\xrightarrow{\text{Reduciendo a común denominador}}$$

$$\rightarrow \quad x^3+2x^2-22x-8=0$$

Que por Ruffini podemos factorizar en:

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -22 & -8 \\ 4 & & 4 & 24 & 8 \\ \hline & 1 & 6 & 2 & \boxed{0} \end{array}\right\} \quad\rightarrow\quad x^3+2x^2-22x-8=(x-4)\cdot(x^2+6x+2)=0 \quad\rightarrow\quad x=4$$

Así que el número es el 4.

11.– Un grupo de abejas exploradoras, cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre, se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a 8/9 del enjambre. Mientras tanto otra abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a una flor de loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de la florecilla de dulce fragancia. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?"

Si llamamos x al número de abejas del enjambre, podemos plantear una ecuación sumando todo e igualando al número total de ellas:

$$x=\sqrt{\frac{x}{2}}+2+\frac{8x}{9}$$

Ecuación, cuya solución es:

$$x-2-\frac{8x}{9}=\sqrt{\frac{x}{2}} \quad\rightarrow\quad \frac{x}{9}-2=\sqrt{\frac{x}{2}} \quad\xrightarrow{\text{Si elevamos al cuadrado ambos miembros}}\quad \left(\frac{x}{9}-2\right)^2=\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 \quad\xrightarrow{\text{de donde}}\quad \frac{x}{2}=\frac{x^2}{81}-\frac{4x}{9}+4$$

$$\xrightarrow{\text{operando}}\quad \frac{x^2}{81}-\frac{4x}{9}+4-\frac{x}{2}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2}{81}-\frac{17x}{18}+4=0 \quad\xrightarrow{\text{Reducimos a común denominador}}\quad \frac{2x^2}{162}-\frac{153x}{162}+\frac{648}{162}=0 \quad\rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{eliminamos denominadores}}\quad 2x^2-153x+648=0 \quad\rightarrow\quad \text{cuyas soluciones son:}\ \begin{cases} x_1=72 \\ x_2=\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Por tanto, el número de abejas es de 72.

12.– En unos laboratorios se ha comprobado que el número de células de una muestra se quintuplica cada minuto transcurrido. Si inicialmente había dos células, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que el número de células sea de 19.531.250?

Si llamamos x al tiempo en minutos que hade transcurrir, podemos plantear una ecuación sabiendo que 2 por 5 x veces ha de ser igual a 19.531.250:

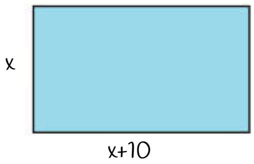
$$2\cdot5^x=19531250$$

Cuya solución viene dada por:

$$2\cdot5^x=19531250 \quad\rightarrow\quad 5^x=\frac{19531250}{2}=9765625=5^{10} \quad\rightarrow\quad 5^x=5^{10} \quad\rightarrow\quad x=10$$

Así que han de pasar 10 minutos.

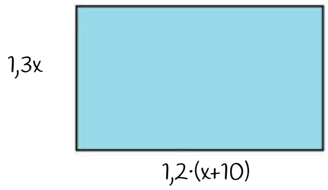
13.– La base de un rectángulo mide 10 cm más que su altura. Si la base aumenta un 20 % y la altura un 30 %, el perímetro aumenta un 24 %. Halla las dimensiones del rectángulo.



Si llamamos x a la altura, su base será x+10.

Si la base aumenta un 20 % ahora será 1,2·(x+10)

Y si la altura aumenta un 30% ahora será 1,3x



Si dice que el perímetro aumenta un 24%, con esto plantearemos la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} P_{Antes}=2(x+x+10)=4x+20 \\ P_{Después}=2\cdot(1,3x)+2\left[1,2(x+10)\right]=2,6x+2,4x+24=5x+24 \end{array}\right\} \rightarrow \quad 1,24\cdot P_{Antes}=P_{Después}$$

Por tanto, la ecuación a resolver es:

$$1,24(4x+20)=5x+24$$

Y cuya solución es:

$$1,24(4x+20)=5x+24 \quad\rightarrow\quad 4,96x+24,8=5x+24 \quad\rightarrow\quad 24,8-24=5x-4,96x$$
$$\rightarrow\quad 0,8=0,04x \quad\rightarrow\quad x=\frac{0,8}{0,04} \quad\rightarrow\quad x=20$$

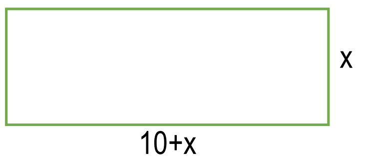
Por tanto, las dimensiones del rectángulo son 20 x 30 cm

14.– La impresora ha soltado una mancha de tinta en una ecuación. Si la solución es x = 12, ¿cuál es el número oculto?

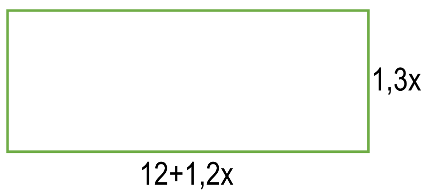
$$\frac{x}{2}-\frac{x+\therefore}{4}=x-10$$

15.– La base de un rectángulo mide 10 cm más que su altura. Si la base aumenta un 20 % y la altura un 30 %, el perímetro aumenta un 24 %. Halla las dimensiones del rectángulo.

Si llamamos x a la altura del rectángulo, su base será 10 + x, y su perímetro será: $P_1(x) = 4x + 20$



Si su base aumenta un 20 %, ahora medirá 1,2·(10+x) y si su altura aumenta un 30 %, Medirá 1,3x. El nuevo perímetro será: $P_2(x) = 24 + 2,5x + 2,6x = 24 + 5x$



Una vez conocidos ambos perímetros, plantearemos la ecuación haciendo que el perímetro del pequeño aumentado en un 24 % será igual que el del grande:

$$1,24\cdot P_1(x)=P_2(x) \quad\rightarrow\quad 1,24(4x+20)=24+5x$$

Cuya solución, viene dada por:

$$1,24(4x+20)=24+5x \quad\rightarrow\quad 4,96x+24,8=24+5x \quad\rightarrow\quad 5x-4,96x=24,8-24 \quad\rightarrow$$
$$\rightarrow\quad 0,04x=0,8 \quad\rightarrow\quad x=\frac{0,8}{0,04} \quad\rightarrow\quad x=20$$

Por ello, la altura del rectángulo es de 20 cm y la base de 10 + 20 = 30 cm.

16.- Resuelve paso a paso la siguiente ecuación:

$$\sqrt{9x+54}-\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+6}+\sqrt{4x-8} \rightarrow \sqrt{9(x+6)}-\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+6}+\sqrt{4(x-2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+6}+2\sqrt{x-2} \rightarrow 3\sqrt{x+6}-2\sqrt{x+6}=+2\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{x+6}=3\sqrt{x-2} \rightarrow \left(\sqrt{x+6}\right)^2=\left(3\sqrt{x-2}\right)^2 \rightarrow x+6=9(x-2) \rightarrow$$

$$\rightarrow x+6=9x-18 \rightarrow x-9x=-18-6 \rightarrow -8x=-24 \rightarrow x=\frac{-24}{-8} \rightarrow x=3$$

17.- Un hortelano coge una cesta de manzanas, con tan mala suerte que 2/5 de las manzanas están podridas. Entonces vuelve al manzano y recoge 21 más, con lo que ahora tiene 1/8 más de la cantidad inicial. ¿Cuántas manzanas tenía al principio?

Si llamamos x al número de manzanas que había al principio, al desechar 2/5 de x por estar podridas, le quedan 3/5 x, y si después recoge 21 manzanas más, entonces tendrá:

$$\frac{3}{5}x+21$$

Lo que supone 1/8 más de lo que tenía que era x, es decir: $\frac{9}{8}x$

Así que, podemos plantear una ecuación igualando ambas cantidades:

$$\frac{3}{5}x+21=\frac{9}{8}x$$

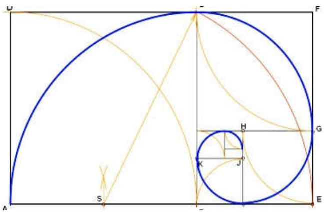
Ecuación, cuya solución viene dada por:

$$\frac{3}{5}x+21=\frac{9}{8}x \rightarrow \frac{24x}{40}+\frac{840}{40}=\frac{45x}{40} \rightarrow \frac{24x}{\cancel{40}}+\frac{840}{\cancel{40}}=\frac{45x}{\cancel{40}} \rightarrow 24x+840=45x \rightarrow$$

$$\rightarrow 840=45x-24x \rightarrow 840=21x \rightarrow x=\frac{840}{21} \rightarrow x=40$$

Por tanto, el hortelano recolectó de primeras 40 manzanas.

18.- El número áureo, representado por la letra griega ϕ (fi), es el único número irracional y positivo que verifica la siguiente propiedad: "La diferencia del número áureo con su inverso es 1". Calcula el valor de ϕ.



Pues si la diferencia del número áureo con su inverso es 1, ya podemos plantear la ecuación llamando ϕ a dicho número.

$$\phi-\frac{1}{\phi}=1$$

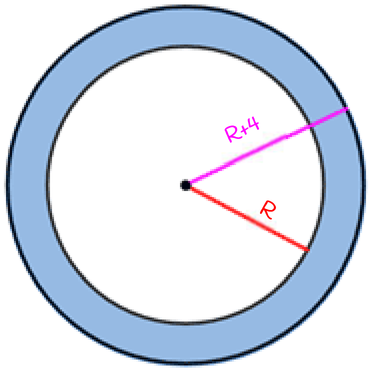
Y cuya solución viene dada por:

$$\phi-\frac{1}{\phi}=1 \rightarrow \phi^2-1=\phi \rightarrow \phi^2-\phi-1=0 \rightarrow \phi=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \rightarrow \phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Desechamos la solución negativa $\phi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ porque el enunciado dice que ϕ es irracional y positivo.

Por tanto, el número áureo es: $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

19.– Calcula el radio de un círculo sabiendo que si aumentamos su radio en 4 cm se cuadruplica su área.



Si llamamos R al radio del círculo original, entonces el radio del segundo será R+4, y como dice que su área se cuadriplica, ya podemos plantear la ecuación sabiendo que el área del círculo viene dada por el producto de π por el radio al cuadrado: $A_o = \pi \cdot R^2$

$$A_{Después} = 4A_{Antes} \quad \rightarrow \quad \pi(R+4)^2 = 4\pi R^2 \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \cancel{\pi}(R+4)^2 = 4\cancel{\pi}R^2 \quad \rightarrow \quad (R+4)^2 = 4R^2$$

Cuya solución es:

$$(R+4)^2 = 4R^2 \quad \rightarrow \quad R^2 + 8R + 16 = 4R^2 \quad \rightarrow \quad 3R^2 - 8R - 16 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

Así que, el radio del círculo es de 4 cm.

20.– En una cartulina rectangular de 0,1 m² de superficie, recortamos dos cuadrados, de forma que uno tiene 2 cm de lado más que el otro. Si sobran 116 cm² de cartulina, ¿cuánto miden los lados de los cuadrados recortados? (2 puntos)

Si el área de la cartulina es de 0,1 m², en centímetros cuadrados será 1000 cm².

Si llamamos x al lado de un cuadrado, el lado del otro será x+2 y con sus áreas ya podemos plantear la ecuación, sabiendo que la suma de sus áreas + 116 cm² es igual al área total de la cartulina 1000 cm²:

$$x^2 + (x+2)^2 + 116 = 1000$$

Cuya solución viene dada por:

$$x^2 + (x+2)^2 + 116 = 1000 \quad \rightarrow \quad x^2 + x^2 + 4x + 4 + 116 - 1000 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + 4x - 880 = 0$$

Ecuación que es equivalente a esta otra:

$$x^2 + 2x - 440 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-20)\cdot(x+22) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = -22 \end{cases}$$

Desechamos la solución negativa y entonces los lados de los cuadrados recortamos miden 20 y 22 cm.

21.– Halla un número de dos cifras sabiendo que es igual al triple menos 2 del número que resulta al invertir sus cifras, y que la cifra de las decenas es el triple que la de las unidades más 2.

Si llamamos x a las unidades, las decenas serán 3x+2, por tanto, el número y el invertido serán:

Decenas	Unidades
3x+2	x

Al invertir sus cifras obtenemos →

Decenas	Unidades
x	3x+2

Expresados ambos en unidades, serán: $\begin{cases} n^{\circ}\ original: 10(3x+2) + x = 31x + 20 \\ n^{\circ}\ invertido: 10x + 3x + 2 = 13x + 2 \end{cases}$

Y como dice que uno es el triple menos dos del otro, ya podemos plantear la ecuación:

$$31x+20=3(13x+2)-2$$

Cuya solución es:

$$31x+20=3(13x+2)-2 \quad \rightarrow \quad 31x+20=39x+6-2 \quad \rightarrow \quad 31x-39x=39x+6-2-20 \quad \rightarrow$$

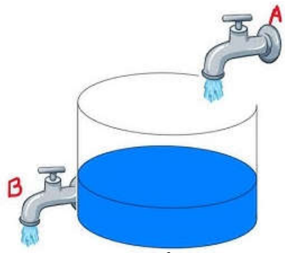
$$\rightarrow \quad -8x=-16 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-16}{-8} \quad \rightarrow \quad x=2$$

Por tanto, las unidades son 2 y las decenas 3·2+2 = 8

Así que, el número pedido es el 82

22.- Un caño A llena un estanque en 6 horas y un desagüe B lo vacía en 10 horas. En cuánto tiempo llenará el estanque si B se abre 2 horas después de que estuviera abierto A.

Si llamamos x al tiempo en horas que tarda en llenarse, como el caño A lo llena en 6 horas, a las dos horas lo habrá llenado $\frac{1}{3}$ del total, por tanto, quedarán por llenarse $\frac{2}{3}$ del estanque.



Si el caño lo llena en 6 horas, en 1 hora llenará la sexta parte: $\frac{1}{6}$

Por el contrario, si el desagüe lo vacía en 10 horas, entonces en una hora vaciará una décima parte: $\frac{1}{10}$

Quiere esto decir que en una hora se llenará $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ del estanque, como quedan por llenarse $\frac{2}{3}$, con esto podemos plantear una ecuación multiplicando lo que se llena en una hora por el número de horas e igualarlo a los $\frac{2}{3}$ que aún quedan por llenarse:

$$\frac{1}{15}\cdot x=\frac{2}{3}$$

Cuya solución es:

$$\frac{1}{15}\cdot x=\frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad 3x=30 \quad \rightarrow \quad x=\frac{30}{3} \quad \rightarrow \quad x=10$$

Por tanto, el estanque se llenará en 10 horas.

23.- El jeque Omar tiene dispuesto en su testamento que la tercera parte de sus camellos se entregue a su primogénito, Alí; la tercera parte del rebaño sea para su segundo hijo, Casim, y el resto vaya a parar a su esposa Fátima. A la muerte de Omar y, una vez hecho el reparto, a Fátima le corresponden 140 camellos. ¿Cuántos componían el rebaño del jeque?

Si llamamos x al número de camellos que tiene el jeque Omar, como a cada uno de sus hijos les ha dado la tercera parte, para su esposa Fátima queda otra tercera parte, y como a ella le da 140 camellos, quiere esto decir que la tercera parte de los camellos son 140.

Con esto, podemos plantear la ecuación:

$$\frac{x}{3}=140$$

Cuya solución es:

$$\frac{x}{3}=140 \quad \rightarrow \quad x=3\cdot 140=420$$

Por tanto, el rebaño del jeque estaba compuesto por 420 camellos.

24.- Calcula un número de dos cifras, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, y que si se invierte el orden en que están colocadas, el número disminuye en 18 unidades.

Si llamamos x a la cifra de las decenas, la cifra de las unidades será 14–x, por tanto, el número será de la forma:

$$\underbrace{x}_{\text{Decenas}}\quad\underbrace{14-x}_{\text{Unidades}}\qquad \text{y si se invierte su orden}\qquad \underbrace{14-x}_{\text{Decenas}}\quad\underbrace{x}_{\text{Unidades}}$$

Si expresamos ambos números en unidades, recordando aquello de que una decena son 10 unidades, llegamos a:

$$\begin{cases} \underbrace{x}_{\text{Decenas}}\ \underbrace{14-x}_{\text{Unidades}} \rightarrow 10\cdot x+14-x= \xrightarrow{\text{El número original se expresaría como:}} =9x+14 \\ \underbrace{14-x}_{\text{Decenas}}\ \underbrace{x}_{\text{Unidades}} \rightarrow 10(14-x)+x=140-10x+x= \xrightarrow{\text{El número invertido se expresaría como:}} =140-9x \end{cases}$$

Como nos dicen que al invertir el número disminuye en 18 unidades, podemos plantear la siguiente ecuación haciendo:

$$\underbrace{9x+14}_{\text{Mayor}}=\underbrace{140-9x+18}_{\text{Menor }+18}$$

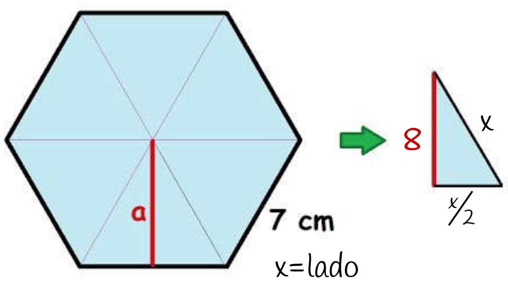
Cuya solución es:

$$9x+14=140-9x+18 \rightarrow 9x+9x=140+18-14 \rightarrow 18x=144 \rightarrow x=\frac{144}{18} \rightarrow x=8$$

Por tanto, las decenas son 8 y las unidades 14 – 8 = 6

Así que, el número pedido es el 86.

25.- La apotema de un hexágono regular mide 8 cm. Determina la medida de su lado y de su área.



Un hexágono regular está formado por 6 triángulos equiláteros.

Si llamamos x al lado del hexágono, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras en uno de los triángulos equiláteros y llegamos a la ecuación:

$$x^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+8^2$$

Cuya solución viene dada por:

$$x^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+8^2 \rightarrow x^2=\frac{x^2}{4}+64 \rightarrow \frac{4x^2}{4}=\frac{x^2}{4}+\frac{256}{4} \rightarrow \frac{4x^2}{\cancel{4}}=\frac{x^2}{\cancel{4}}+\frac{256}{\cancel{4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x^2=256 \rightarrow x=\sqrt{\frac{256}{3}} \rightarrow x=\frac{16}{\sqrt{3}} \rightarrow x=\frac{16\sqrt{3}}{3}cm$$

Así que, el lado del hexágono mide $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm.

Y para el área, sabemos que el área de un hexágono viene dada por el semiproducto de su perímetro por su apotema:

$$A=\frac{Perímetro\cdot Apotema}{2}=\frac{6\cdot\frac{16\sqrt{3}}{3}\cdot 8}{2}=128\sqrt{3}\ cm^2$$

Así que, el área del hexágono es de $128\sqrt{3}$ cm^2.

26.- Resuelve: (4 puntos)

- La primera ecuación es una ecuación radical, que resolveremos aislando el radical y elevando al cuadrado:

$$a)\ x^2-4x=3\sqrt{x^2-4x+20}-10 \xrightarrow{\text{Transponemos el -10 al primer miembro de la ecuación}} x^2-4x+10=3\sqrt{x^2-4x+20} \xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación}}$$

$$\rightarrow \left(x^2-4x+10\right)^2=\left(3\sqrt{x^2-4x+20}\right)^2 \xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado un polinomio es multiplicarlo por sí mismo}} x^4-8x^3+20x^2-80x+100=9\left(x^2-4x+20\right)$$

$$\left[\left(x^2-4x+10\right)^2=\left(x^2-4x+10\right)\cdot\left(x^2-4x+10\right)=x^4-4x^3+10x^2-4x^3+16x^2-40x+10x^2-40x+100=x^4-8x^3+20x^2-80x+100\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Operando}} x^4-8x^3+36x^2-80x+100=9x^2-36x+180 \xrightarrow{\text{Agrupando}} x^4-8x^3+27x^2-44x-80=0$$

Que es una ecuación de cuarto grado que tenemos que factorizar mediante la regla de Ruffini:

$$\left.\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -8 & 27 & -44 & -80 \\
-1 & & -1 & 9 & -36 & +80 \\
\hline
 & 1 & -9 & 36 & -80 & \underline{|0} \\
5 & & 5 & -20 & 80 & \\
\hline
 & 1 & -4 & 16 & \underline{|0} &
\end{array}\right\} \rightarrow x^4-8x^3+27x^2-44x-80=(x+1)\cdot(x-5)\cdot\left(x^2-4x+16\right)$$

Por tanto, la ecuación quedaría, en forma factorizada, de la siguiente manera:

$$(x+1)\cdot(x-5)\cdot\left(x^2-4x+16\right)=0 \xrightarrow{\text{Cuya solución viene dada por:}} \begin{cases}\text{Si } x+1=0 \rightarrow x=-1\\ \text{Si } x-5=0 \rightarrow x=5\\ \text{Si } x^2-4x+16=0 \rightarrow \Delta<0 \rightarrow \text{No Sol.}\end{cases}$$

Y sus soluciones serían: $x_1=-1$ y $x_2=5$.

- La segunda operación es una inecuación racional en la que para que el cociente de dos "cosas" sea positivo ha de ocurrir que ambas tengan el mismo signo, o positivo o negativo.

$$b)\ \frac{x(x+2)}{x-2}>0 \rightarrow \begin{cases}\text{Si ambos son } + \left\{\begin{array}{l} x^2+2x>0 \rightarrow x<-2\ y\ x>0\\ x-2>0 \rightarrow x>2\end{array}\right\} \rightarrow x>2\\ \\ \text{Si ambos son } - \left\{\begin{array}{l} x^2+2x<0 \rightarrow -2<x<0\\ x-2<0 \rightarrow x<2\end{array}\right\} \rightarrow -2<x<0\end{cases}$$

Cuya solución es la unión de ambas soluciones: $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

La tercera operación se trata de un sistema de ecuaciones lineales sin pena ni gloria, en el que no perderemos tiempo en resolver, pero del cual si os daré su solución.

$$c)\begin{cases}\dfrac{4x-4}{3}-\dfrac{2y+1}{2}=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2x}{5}-\dfrac{2y-2}{3}=\dfrac{12}{5}\end{cases} \rightarrow \quad S.C.D.\left\{x=1 \quad y=-2\right\}$$

El cuarto ejercicio se trata de un sistema de ecuaciones no lineales con radicales

$$d)\begin{cases}x^3-\sqrt{y}=1\\ 5x^6+2y-8x^3\sqrt{y}=2\end{cases} \xrightarrow{\text{De la primera ecuación despejamos } x^3} x^3=1+\sqrt{y} \xrightarrow{\text{Y la sustituimos en la segunda ecuación}} 5\left(1+\sqrt{y}\right)^2+2y-8\left(1+\sqrt{y}\right)\cdot\sqrt{y}=2$$

Llegamos a una ecuación en y, en la que operando:

$$\rightarrow \quad 5\left(1+y+2\sqrt{y}\right)+2y-8\sqrt{y}-8y=2 \xrightarrow{\text{Si queitamos () y agrupamos}} 5+5y+10\sqrt{y}+2y-8\sqrt{y}-8y-2=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -y-2\sqrt{y}+3=0 \xrightarrow{\text{Aislamos la Raíz}} 3-y=2\sqrt{y} \xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado}} (3-y)^2=\left(2\sqrt{y}\right)^2 \rightarrow y^2-6y+9=4y$$

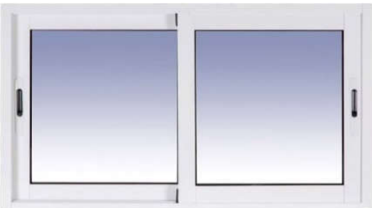
$$\rightarrow \quad y^2-10y+9=0 \xrightarrow{\text{Factorizando}} (y-9)\cdot(y-1)=0 \rightarrow \begin{cases}\text{Si } y-9=0 \rightarrow y_1=9\\ \text{Si } y-1=0 \rightarrow y_2=1\end{cases}$$

Conocidos los valores de y, podemos calcular los de x:

$$\text{Si } x^3=1+\sqrt{y} \rightarrow x=\sqrt[3]{1+\sqrt{y}} \rightarrow \begin{cases}\text{Si } y_1=9 \rightarrow x_1=\sqrt[3]{1+\sqrt{9}}=\sqrt[3]{1+3}=\sqrt[3]{4}\\ \text{Si } y_2=1 \rightarrow x_2=\sqrt[3]{1+\sqrt{1}}=\sqrt[3]{1+1}=\sqrt[3]{2}\end{cases}$$

Por tanto, se trata de un sistema compatible determinado de soluciones: $S.C.D.\begin{Bmatrix}y_1=9 & , & x_1=\sqrt[3]{4}\\ y_2=1 & , & x_2=\sqrt[3]{2}\end{Bmatrix}$

27.– Imane está haciendo reformas en casa. Ha agrandado la ventana del salón: ahora es 20 cm más alta y 30 cm más ancha. Con eso ha conseguido tener una ventana que es 0,99 m² más grande que la vieja. Además, ahora podrá poner una ventana de dos hojas cuadradas. ¿Cuáles eran las dimensiones de la ventana antes de la reforma? (1,5 puntos)



Se trata de un problema que se puede resolver por sistemas de ecuaciones no lineales y por ecuaciones. Lo vamos a resolver por ecuaciones.

Si llamamos x a la altura de la ventana nueva, la anchura será 2x, puesto que se podrán poner dos hojas cuadradas, así que, con esto, podemos plantear una ecuación con el área:

Si x es la altura de la ventana nueva, la vieja tendía una altura de x–20, y si el ancho de la ventana nueva es 2x, el de la vieja era de 2x–30. Como las distancias están en cm, el área también lo tiene que estar, por tanto, hacemos un cambio de unidades:

$$0{,}99m^2=0{,}99\ m^2\cdot\frac{10^4\ cm^2}{1\ m^2}=0{,}99\ \cancel{m^2}\cdot\frac{10^4\ cm^2}{1\ \cancel{m^2}}=0{,}99\cdot10^4\ cm^2=9900\ cm^2$$

Y, ahora sí, ya podemos plantear la ecuación:

$$\underbrace{(x-20)\cdot(2x-30)}_{\text{Área de la ventana vieja}}+9900=\underbrace{2x\cdot x}_{\text{Área de la nueva}}$$

Cuya solución es:

$$(x-20)\cdot(2x-30)+9900=2x\cdot x \quad \rightarrow \quad \cancel{2x^2}-30x-40x+600+9900=\cancel{2x^2} \quad \rightarrow \quad -70x=-10.500$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{-10.500}{-70} \quad \rightarrow \quad x=150$$

Así que la altura de la ventana nueva es de 150 cm y la anchura es de 300 cm, como nos piden las dimensiones antes bastaría con restarle 20 a la altura y 30 a la anchura.

Por tanto, la ventana antes de la reforma medía 130 cm de alto y 270 cm de ancho.

Si lo resolviéramos mediante un sistema de ecuaciones sería así:

Si llamamos x a la anchura inicial de la ventana e y a su altura, podemos plantear el sistema, en el que una ecuación será con el área y la otra con las dimensiones de la nueva ventana:

$$\begin{array}{r} \text{Ecuación con el área} \\ \text{Ecuación con dimensiones} \end{array}\begin{cases} x\cdot y+9900=(y+20)\cdot(x+30) \\ 2(y+20)=x+30 \end{cases}$$

Que operando quedaría como un sistema lineal:

$$\begin{cases} x\cdot y+9900=(y+20)\cdot(x+30) \\ 2(y+20)=x+30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy+9900=xy+20x+30y+600 \\ 2y+40=x+30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20x+30y=9300 \\ x-2y=10 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x+3y=930 \\ x-2y=10 \end{cases} \xrightarrow[\text{la ec 2) por }(-2)]{\text{Por reducción, multiplicando}} \begin{cases} 2x+3y=930 \\ -2x+4y=-20 \end{cases} \xrightarrow[\text{Sumando}]{} 7y=910 \rightarrow y=130 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x=2y+10 \quad \rightarrow \quad x=160+10=270$$

$$S.C.D.\left\{x=270 \quad y=130\right\}$$

28.- Por un chándal y unas zapatillas de deporte que costaban 135 € he pagado 88,50 € en rebajas, ya que en la sección de textil tienen el 40% de descuento y en la de calzado el 30%. ¿Qué precio tenía cada artículo y cuanto me ha costado? (1,5 puntos)

Si llamamos x al precio original del chándal, e y al de las zapatillas ya podemos plantear un sistema de ecuaciones lineales, en el que la primera ecuación la escribiremos con los precios antes de las rebajas:

$$1) \quad x+y=135$$

Y la segunda con los precios ya rebajados. Si nos descuentan un 40%, pagamos un 60% y si el descuento es del 30% pagaremos un 70%

$$2) \quad 0,6x+0,7y=88,50$$

Con esto:

$$\begin{array}{l} 1) \\ 2) \end{array}\begin{cases} x+y=135 \\ 0,6x+0,7y=88,50 \end{cases} \xrightarrow{\text{Por reducción}} \begin{cases} -0,6x-0,6y=-81 \\ 0,6x+0,7y=88,50 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando ambas Ecuaciones}} 0,1y=7,5 \rightarrow y=75\ €$$

Y de la ecuación 1):

$$x+y=135 \quad \rightarrow \quad x=135-y=135-75=60\ €$$

Por tanto, el chándal costaba 60 € y las zapatillas 75 €; y me han costado 36 € y 52,50 € respectivamente.

29.– ¿Cuáles son los números cuyo triple excede a su cuadrado en 10 o más unidades? (1,5 puntos)

Si llamamos x al número más pequeño de ellos, ya podemos plantear una inecuación: $3x+10\geq x^2$, en la que, para resolverla, primero resolvemos la ecuación:

$$3x+10=x^2 \quad\rightarrow\quad x^2-3x-10=0 \quad\xrightarrow[\text{Factorizando}]{}\quad (x-5)\cdot(x+2)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\text{Si } x-5=0 & \rightarrow \quad x=5\\ \text{Si } x+2=0 & \rightarrow \quad x=-2\end{cases}$$

Si representamos ambas soluciones en la recta real y probamos con un número cualquiera que no sea ninguna de ellas, podremos verificar en qué intervalo se verifica la desigualdad. Probaremos por ejemplo con el cero:

$$3x+10\geq x^2 \quad\rightarrow\quad \text{Si } x=0 \quad\rightarrow\quad 0+10\geq 0 \quad\rightarrow\quad 10\geq 0 \quad\rightarrow\quad \text{Verdadero}$$

Así que, si el 0 verifica la desigualdad, todos los números de ese intervalo también.

Por tanto, los números cuyo triple excede a su cuadrado en 10 o más son todos los que pertenecen a: $[-2,5]$

30.– Hallar una fracción cuyo valor no cambia añadiendo 15 al numerador y 18 al denominador y que se triplica cuando se añade 55 al numerador y 6 al denominador. (1,5 puntos)

Si llamamos x al numerador e y al denominador, ya podemos plantear un sistema de ecuaciones en el que la primera ecuación sería:

$$\frac{x}{y}=\frac{x+15}{y+18} \quad\rightarrow\quad x\cdot(y+18)=y(x+15) \quad\rightarrow\quad xy+18x=xy+15y \quad\rightarrow\quad 18x-15y=0 \quad\rightarrow\quad 6x-5y=0$$

Y la segunda:

$$3\cdot\frac{x}{y}=\frac{x+55}{y+6} \quad\rightarrow\quad 3x(y+6)=y(x+55) \quad\rightarrow\quad 3xy+18x=xy+55y \quad\rightarrow\quad 2xy+18x-55y=0$$

$$\begin{matrix}1)\\2)\end{matrix}\begin{cases}6x-5y=0\\ 2xy+18x-55y=0\end{cases}$$

Lo resolveremos por el método de sustitución: Si despejamos x de la primera ecuación: $6x-5y=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{5y}{6}$

Y la sustituimos en la segunda, llegamos a:

$$2xy+18x-55y=0 \quad\rightarrow\quad 2\frac{5y}{6}y+18\frac{5y}{6}-55y=0 \quad\rightarrow\quad \frac{5}{3}y^2+15y-55y=0 \quad\rightarrow\quad \frac{5}{3}y^2-40y=0$$

Una ecuación de segundo grado incompleta que resolveremos sacando factor común:

$$\frac{5}{3}y^2-40y=0 \quad\rightarrow\quad 5y\left(\frac{y}{3}-8\right)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\text{Si } 5y=0 & \rightarrow \quad y=0\\ \text{Si } \frac{y}{3}-8=0 & \rightarrow \quad y=24\end{cases}$$

De las dos soluciones desechamos la trivial y calculamos x sustituyendo en: $x=\frac{5y}{6}=\frac{5\cdot 24}{6}=5\cdot 4=20$

Por tanto, la fracción pedida es $\frac{20}{24}$

31.- Resuelve dos de las tres ecuaciones siguientes:

a) $$\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}=-\frac{5}{6}\xrightarrow{\text{Reducción a común Denominador}}\frac{6\cdot\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{x-4}}{6\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-4}}-\frac{6\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1}}{6\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-4}}=-\frac{5\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-4}}{6\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-4}}\xrightarrow{\text{Quitamos denominadores}}$$

$$\rightarrow\frac{6\cdot\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{x-4}}{\cancel{6\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-4}}}-\frac{6\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+1}}{\cancel{6\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-4}}}=-\frac{5\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-4}}{\cancel{6\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-4}}}\rightarrow 6\left(\sqrt{x-4}\right)^2-6\left(\sqrt{x+1}\right)^2=-5\sqrt{(x-4)\cdot(x+1)}$$

$$\xrightarrow{\text{Operamos}}6(x-4)-6(x+1)=-5\sqrt{x^2-3x-4}\rightarrow 6x-24-6x-6=-5\sqrt{x^2-3x-4}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{Agrupamos}}-30=-5\sqrt{x^2-3x-4}\xrightarrow{\text{Aislamos el radical}}\frac{-30}{-5}=\sqrt{x^2-3x-4}\xrightarrow{\text{Operamos}}6=\sqrt{x^2-3x-4}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado}}36=x^2-3x-4\xrightarrow{\text{Agrupamos}}x^2-3x-40=0\xrightarrow{\text{Resolvemos}}(x+5)(x-8)=0\rightarrow\begin{cases}x=-5\\x=8\end{cases}$$

Desechamos la solución x=−5 porque hace negativo uno de los radicales y, por tanto, **la solución es x=8**

b) $$\log(x+1)^5+\log(3x+2)^5=5\xrightarrow{\text{Mediante las propiedades de los logaritmos}}\log\left[(x+1)\cdot(3x+1)\right]^5=5\xrightarrow{\text{Por la definición de logaritmo}}\left[(x+1)\cdot(3x+1)\right]^5=10^5$$

$$\xrightarrow{\text{Simplificamos}}\left[(x+1)\cdot(3x+1)\right]^{\cancel{5}}=10^{\cancel{5}}\xrightarrow{\text{Operamos}}3x^2+4x+1=10\xrightarrow{\text{Agrupamos y Resolvemos}}3x^2+4x-9=0\rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-\dfrac{8}{3}\end{cases}$$

Desechamos la solución x=−8/3 porque hace negativo uno de los argumentos y, por tanto, **la solución es x=1**

c) $$\left(\frac{1}{4}\right)^x\cdot16^{x+1}\cdot2^{1-x}=0{,}25\xrightarrow{\text{Escribimos todo en potencia de base 2}}2^{-2x}\cdot\left(2^4\right)^{x+1}\cdot2^{1-x}=2^{-2}\xrightarrow{\text{Operamos}}2^{-2x}\cdot2^{4x+4}\cdot2^{1-x}=2^{-2}\rightarrow$$

$$\rightarrow 2^{-2x+4x+4+1-x}=2^{-2}\xrightarrow{\text{Agrupamos}}2^{x+5}=2^{-2}\rightarrow x+5=-2\rightarrow x=-7$$

Aquí, **la solución es x=−7**

32.- Un granjero espera obtener 36 € por la venta de unas docenas de huevos que acaba de recolectar de entre sus gallinas. Si en el camino al mercado se le rompen cuatro docenas y para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,45 € el precio de cada una de las docenas restantes, ¿Cuántas docenas de huevos recolectó?

Si llamamos **x** al número de docenas de huevos que recogió, venderá cada docena al precio de $\frac{36}{x}$ euros.

Si por el camino se le rompen 4 docenas, le quedan x−4, y si tiene que aumentar el precio en 0,45 euros, tendrá que venderlas a: $\frac{36}{x}+0{,}45$, por lo que escribimos la ecuación multiplicando las docenas por su precio y lo igualamos a 36:

$$\left(\frac{36}{x}+0{,}45\right)\cdot(x-4)=36$$

Cuya solución es:

$$\left(\frac{36}{x}+0{,}45\right)\cdot(x-4)=36 \;\rightarrow\; 36-\frac{144}{x}+0{,}45x-1{,}80=36 \;\xrightarrow{\text{Agrupando}}\; 0{,}45x-\frac{144}{x}-1{,}80=0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{9x}{20}-\frac{144}{x}-\frac{9}{5}=0 \;\xrightarrow{\text{Reducimos a común denominador}}\; \frac{9x^2}{20x}-\frac{2880}{20x}-\frac{36x}{20x}=0 \;\rightarrow\; \frac{9x^2}{\cancel{20x}}-\frac{2880}{\cancel{20x}}-\frac{36x}{\cancel{20x}}=0$$

$$\rightarrow\; 9x^2-36x-2880=0 \;\xrightarrow{\text{Cuyas soluciones son:}}\; \begin{cases} x=20 \\ x=-16 \end{cases}$$

Desechamos la solución negativa y, por tanto, **al principio tenía 20 docenas de huevos.**

33.– Una compraventa de motocicletas vende dos motocicletas por 3.330 €. Calcula cuanto pagó por cada una de ellas, si en la venta de la primera ganó un 25% , en la venta de la segunda perdió un 10%, pero en total ganó un 11 %. (1,5 puntos)

Si las vendió por 3.330 € y en total ganó un 11%, vamos, primero, a calcular por cuánto dinero las compró:

Sabemos que, en un ejercicio de porcentajes, la cantidad final se calcula multiplicando la cantidad inicial por el índice de variación porcentual (Iv) total, es decir:

$$C_f=C_o\cdot I_v \;\xrightarrow{\text{Por tanto, despejando } C_o}\; C_o=\frac{C_f}{I_v}=\frac{3.330}{1{,}11}=3.000\text{ €}$$

Así que, el **precio de compra fue de 3.000 euros.**

Si llamamos **x** al precio de compra de la primera moto, por la segunda pagó: **3000–x**, y con esto ya podemos plantear una ecuación con los precios de venta:

$$1{,}25x+0{,}90(3000-x)=3330$$

Cuya solución, viene dada por:

$$1{,}25x+0{,}90(3000-x)=3330 \;\rightarrow\; 1{,}25x+2700-0{,}9x=3330 \;\xrightarrow{\text{Agrupamos}}\; 0{,}35x=630$$

$$\xrightarrow{\text{Despejamos}}\; x=\frac{630}{0{,}35} \;\rightarrow\; x=1800$$

Por tanto, el precio de compra de **una moto** fue de **1.800 € y** el de **la otra** 3000 – 1800 = **1.200 €**

34.– Los alumnos de 4° de ESO queremos ir de viaje al parque de las ciencias de la ciudad de Granada y nos cuesta 800 € en total. Si fuésemos 10 alumnos más, el precio se reduciría en 4 € por persona. ¿Cuánto nos cuesta a cada uno la excursión? ¿Cuántas personas vamos? (1,5 puntos)

Si llamamos **x** al número de alumnos de 4° de ESO que van de viaje e **y** al dinero que paga cada uno por el viaje, podemos escribir la primera ecuación de un sistema no lineal:

$$1)\;\; x\cdot y=800$$

Si se apuntan 10 alumnos más, ahora el numero de alumnos será: x+10, y si el precio del viaje se reduce en 4 €, ahora, cada uno de ellos pagarán y–4 €, y con esto podemos escribir la segunda ecuación del sistema:

$$2)\;\; (x+10)\cdot(y-4)=800$$

Por tanto, llegamos a:

PARQUE de las CIENCIAS
ANDALUCÍA - GRANADA

$$1)\begin{cases} x\cdot y=800 \\ (x+10)\cdot(y-4)=800 \end{cases} \xrightarrow{\text{Operando}} 1)\begin{cases} x\cdot y=800 \\ x\cdot y-4x+10y-40=800 \end{cases} \rightarrow 1)\begin{cases} x\cdot y=800 \\ 800-4x+10y-40=800 \end{cases}$$

$$\rightarrow 1)\begin{cases} x\cdot y=800 \\ -4x+10y-40=0 \end{cases} \rightarrow 1)\begin{cases} x\cdot y=800 \\ -2x+5y=20 \end{cases}$$

Si de la primera ecuación despejamos x:

$$\text{de 1)}\quad x\cdot y=800 \quad\rightarrow\quad x=\frac{800}{y}$$

Y la sustituimos (método de sustitución) en la segunda ecuación:

$$\text{En 2)}\quad -2x+5y=20 \quad\rightarrow\quad -2\frac{800}{y}+5y=20$$

Llegamos a:

$$\frac{-1600}{y}+5y=20 \quad\rightarrow\quad 5y^2-20y-1600=0 \quad\rightarrow\quad y^2-4y-320=0$$

Cuya solución es:

$$y^2-4y-320=0 \quad\rightarrow\quad (x-20)\cdot(x+16)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=20 \\ x=-16 \end{cases}$$

Desechamos la solución negativa por ser imposible y por tanto **cada alumno pagará 20 €.**

Y el número de alumnos que irá a Granada será de: $x=\frac{800}{y}=\frac{800}{20}=40$ alumnos

Por tanto, el viaje cuesta 20 € y van 40 alumnos.

35.- Para comprar un regalo a su hermano pequeño, Fátima ha estado más de 3 meses reuniendo monedas de 50 céntimos y de 1 euro. Si en total ha reunido 20 monedas y el precio del regalo está comprendido entre 16 euros y 18 euros, ¿Cuántas monedas de 1 € podría haber conseguido? (1,5 puntos)

Si llamamos **x** al número de monedas de 1 euro y **20–x** al número de monedas de 50 céntimos, podemos escribir una expresión algebraica para el dinero que Fátima ha conseguido reunir:

$$1\cdot x+0,5\cdot(20-x)$$

Operando, llegamos a:

$$1\cdot x+0,5\cdot(20-x) \quad\rightarrow\quad x+10-0,5x=0,5x+10 \quad\rightarrow\quad 0,5x+10$$

Así que, 0,5 x + 10 es el dinero que ha conseguido reunir Fátima, y que el enunciado dice que está entre 16 y 18 euros, así que podemos escribir la siguiente inecuación:

$$16<0,5x+10<18$$

Si multiplicamos por 2 toda la inecuación:

$$32<x+20<36$$

Si restamos 20 a todos los miembros:

$$12<x<16$$

Así que, queda claro que, el número de monedas de 1 € es mayor que 12 y menor que 16.

36.– Resuelve UNO de los siguientes sistemas:

$$a)\begin{cases} y^3-\sqrt{x}=1 \\ 5y^6+2x=2+8y^3\sqrt{x}\end{cases} \qquad b)\begin{cases} (x+1)^2-(x-2)\cdot(x+1)>0 \\ \dfrac{x}{x-2}>0\end{cases}$$

$$a)\begin{cases} y^3-\sqrt{x}=1 \\ 5y^6+2x-8y^3\sqrt{x}=2\end{cases} \xrightarrow{\text{De la primera ecuación despejamos } y^3} y^3=1+\sqrt{x} \xrightarrow{\text{Y la sustituimos en la segunda ecuación}} 5\left(1+\sqrt{x}\right)^2+2x-8\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}=2$$

$$\to 5\left(1+\sqrt{x}\right)^2+2x-8\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}=2 \xrightarrow{\text{Si quitamos () y agrupamos}} 5+5x+10\sqrt{x}+2x-8\sqrt{x}-8x-2=0 \to$$

$$\to -x-2\sqrt{x}+3=0 \xrightarrow{\text{Aislamos la Raíz}} 3-x=2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{Elevamos al cuadrado}} (3-x)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2 \to x^2-6x+9=4x$$

$$\to x^2-10x+9=0 \xrightarrow{\text{Factorizando}} (x-9)\cdot(x-1)=0 \to \begin{cases} \text{Si } x-9=0 \to x_1=9 \\ \text{Si } x-1=0 \to x_2=1\end{cases}$$

Conocidos los valores de x, podemos calcular los de y:

$$\text{Si } y^3=1+\sqrt{x} \to y=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} \to \begin{cases} \text{Si } x_1=9 \to y_1=\sqrt[3]{1+\sqrt{9}}=\sqrt[3]{1+3}=\sqrt[3]{4} \\ \text{Si } x_2=1 \to y_2=\sqrt[3]{1+\sqrt{1}}=\sqrt[3]{1+1}=\sqrt[3]{2}\end{cases}$$

Por tanto, se trata de un sistema compatible determinado de soluciones: $S.C.D.\begin{cases} x_1=9 \quad , \quad y_1=\sqrt[3]{4} \\ x_2=1 \quad , \quad y_2=\sqrt[3]{2}\end{cases}$

$$b)\begin{cases} (x+1)^2-(x-2)\cdot(x+1)>0 \\ \dfrac{x}{x-2}>0\end{cases} \to \begin{cases} x^2+2x+1-x^2+x+2>0 \\ \dfrac{x}{x-2}>0\end{cases} \to \begin{cases} 3x+3>0 \\ \dfrac{x}{x-2}>0\end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x+1>0 \\ \dfrac{x}{x-2}>0\end{cases} \to \begin{cases} x>-1 \\ \dfrac{x}{x-2}>0\end{cases} \to \begin{cases} x>-1 \\ \dfrac{x}{x-2}>0\end{cases}$$

Nos fijamos en $\dfrac{x}{x-2}>0 \to \begin{cases} >0 \to \begin{cases} x>0 \\ x-2>0\end{cases} \to \begin{cases} x>0 \\ x>2\end{cases} \to x>2 \\ <0 \to \begin{cases} x<0 \\ x-2<0\end{cases} \to \begin{cases} x<0 \\ x<2\end{cases} \to x<0\end{cases}$

Por tanto, la solución es la intersección de las dos soluciones:

$$\begin{cases} x>-1 \\ x<0 \quad y \quad x>2\end{cases} \to \begin{cases} x\in(-1,+\infty) \\ x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)\end{cases} \to \{x\in\mathbb{R}\,/\,(-1,0)\cup(2,+\infty)\}$$

37.– Hicham sale de excursión el fin de semana con una cierta cantidad de dinero. El viernes gasta la tercera parte de lo que tiene menos 100 dh, el sábado gasta la mitad de lo que tiene al empezar el día más 50 dh y el domingo gasta 4/5 de lo que le quedaba. Si regresa a casa el domingo por la tarde con 80 dh. ¿Con cuánto dinero empezó Hicham la excursión? (1,5 puntos)

Se trata de un problema de ecuaciones, así que si llamamos x al dinero que tenía Hicham:

El viernes gasta: $\frac{1}{3}x-100$

Le quedan: $x-\left(\frac{1}{3}x-100\right)=\frac{2}{3}x+100$

El sábado gasta: $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x+100\right)+50=\frac{1}{3}x+100$

Entre los dos días, Hicham ha gastado: $\frac{1}{3}x-100+\frac{1}{3}x+100=\frac{2}{3}x$

Por lo que queda: $\frac{x}{3}$ del dinero

El domingo gasta: $\frac{4}{5}$ de lo que le quedaba, es decir $\frac{4}{5}$ de $\frac{x}{3}=\frac{4}{5}\cdot\frac{x}{3}=\frac{4}{15}x$

Luego todavía le queda $\frac{1}{5}$ de $\frac{x}{3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{3}=\frac{x}{15}$

Y esta cantidad se corresponde con los 80 dh. con los que vuelve a casa.

Así que, la ecuación a resolver será:

$$\frac{x}{15}=80$$

Cuya solución es:

$$\frac{x}{15}=80 \quad \rightarrow \quad x=15\cdot 80=1.200 \text{ dh}$$

Por tanto, Hicham empezó la excursión con 1.200 dh.

38.- ¿Cuántos hermanos hay en una familia si por Navidad cada uno hace un regalo a cada hermano y entre todos reúnen 30 regalos? (1,5 puntos)

Si llamamos x al número de hermanos, el número de regalos será x–1, por tanto, planteamos la ecuación multiplicando el número de hermanos por el número de regalos que hace cada uno e igualando a 30:

$$x(x-1)=30$$

Se trata de una ecuación de segundo grado cuya solución es:

$$x(x-1)=30 \quad \rightarrow \quad x^2-x-30=0 \quad \rightarrow \quad (x-6)\cdot(x+5)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si } x-6=0 & \rightarrow \quad x=6 \\ \text{Si } x+5=0 & \rightarrow \quad x=-5 \end{cases}$$

Desechamos la solución negativa por ser imposible.

De esta forma, el número de hermanos es 6.

39.- María y Bianca forman pareja para realizar el trabajo en grupo que ha encargado la profesora de Biología sobre los efectos de las drogas en el organismo de los adolescentes. Si hicieran el trabajo conjuntamente, tardarían 2 horas. María, ella sola, emplearía 3 horas más que Bianca, también en solitario. ¿Cuántas horas tardaría cada una de ellas por separado en hacer el trabajo? (1,5 puntos)

Se trata de un problema "tipo grifos", así que si llamamos x al tiempo (en horas) que tardaría en realizar el trabajo Bianca, entonces María, que tarda 3 horas más que Bianca, tardaría x+3 horas.

Para plantear la ecuación, nos fijamos en la proporción del trabajo realizado en una hora por cada una de las alumnas o por los dos:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Bianca: x horas}\\[1em] \text{María: x+3 horas}\\[1em] \text{Las dos: 2 horas}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{En 1 hora harán:}} \left.\begin{array}{l}\text{Bianca: } \dfrac{1}{x}\\[1em] \text{María: } \dfrac{1}{x+3}\\[1em] \text{Los dos: } \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Será igual a la suma de lo que haga cada una por separado también en 1 hora}]{\text{Lo que hagan las dos alumnas a la vez en 1 hora}} \frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2(x+3)}{\cancel{x\cdot(x+3)\cdot 2}}+\frac{2x}{\cancel{x\cdot(x+3)\cdot 2}}=\frac{x(x+3)}{\cancel{x\cdot(x+3)\cdot 2}} \rightarrow 2x+6+2x=x^2+3x \rightarrow$$

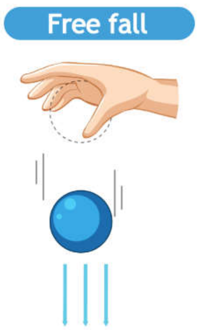
$$\rightarrow x^2+3x-4x-6=0 \rightarrow x^2-x-6=0 \rightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-1\\ c=-6\end{cases} \leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\rightarrow x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{1+5}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\[1em] x_2=\dfrac{1-5}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2\end{cases}$$

Desechamos la segunda por ser negativa (los tiempos no pueden ser negativos) y nos quedamos con la primera.

Por tanto, Bianca tarda 3 horas en hacer el trabajo sola y María 6 horas.

40.- Si dejamos caer una piedra desde una altura de 80 metros. ¿Qué tiempo tardaría en llegar al suelo?, ¿y con qué velocidad impactaría con él? (Dato: $|g| = 10\ m\cdot s^{-2}$)



Se trata de un problema de caída libre que se rige por la expresión del MRUA en la que la aceleración es la de la gravedad g, a=g, y donde el espacio recorrido se corresponde con la altura H.

$$H=v_o t+\frac{1}{2}gt^2$$

Como partimos del reposo, $v_o=0$ y de esta forma la ecuación quedaría:

$$H=v_o t+\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow H=0\cdot t+\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow H=\frac{1}{2}gt^2$$

Si sustituimos H por 80 m y g por el valor de 10 ms^{-2}, llegamos a una simple ecuación de3 segundo grado incompleta:

$$H=\frac{1}{2}gt^2 \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Si } H = 80\ m\\ g= 10\ \dfrac{m}{s^2}\end{array}\right\} \rightarrow 80=\frac{1}{2}10t^2 \rightarrow 80=5t^2$$

Cuya solución viene dada por:

$$5t^2=80 \rightarrow t^2=\frac{80}{5} \rightarrow t^2=16 \rightarrow t=\pm\sqrt{16} \rightarrow t=\pm 4 \rightarrow t=4\ \text{seg}$$

Como el tiempo no puede ser negativo, desechamos la solución negativa.

Así que la piedra tardaría 4 segundos en caer al suelo.

La velocidad con la que impactaría en el suelo viene dada por:

$$V = v_o + gt$$

Donde v_o es la velocidad inicial (v_o=0 porque parte del reposo), t el tiempo empleado (calculado en el apartado anterior) y g el valor de la aceleración de la gravedad $\approx 10\ ms^{-2}$

Por tanto:

$$V = v_o + gt \quad \rightarrow \quad V = 0 + gt \quad \rightarrow \quad V = gt \quad \rightarrow \quad V = 10\ ms^{-2} \cdot 4s \quad \rightarrow \quad V = 40\ ms^{-1}$$

Así que la piedra impactaría con el suelo con una velocidad de 40 m/s

41.– He repartido mi colección de poliedros entre mis amigos matemáticos. A Tales le he dado 1/5 del total, a Hipatia 1/3 del resto, a Arquímedes la mitad de lo que quedaba, y, por último, a Pitágoras le he regalado los 16 poliedros que me quedaban. ¿Cuántos poliedros tenía? ¿Cuántos poliedros he dado a cada uno?

Vamos a ir viendo qué damos a cada uno:

A Tales: $\frac{1}{5}$ de los poliedros, por lo que me quedan $\frac{4}{5}$ de los poliedros

A Hipatia: $\frac{1}{3}$ del resto, $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$ de los poliedros

Por lo que hasta ahora he regalado: $\frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{3+4}{15} = \frac{7}{15}$

Así que aún me quedan $\frac{8}{15}$ de los poliedros.

Arquímedes: $\frac{1}{2}$ de lo que quedaba, $\frac{1}{2}$ de $\frac{8}{15} = \frac{1}{2}$ de $\frac{8}{15} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ de los poliedros

Así que ya he dado: $\frac{1}{5} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{3+4+4}{15} = \frac{11}{15}$

Por lo que quedan $1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$ de los poliedros.

Si dice que a Pitágoras le regalo los 16 poliedros que quedaban, entonces:

$\frac{4}{15}$ son 16 poliedros $\rightarrow$ $\frac{1}{15}$ son 4 poliedros y $\frac{15}{15}$ son $4 \cdot 15 = 60$ poliedros

Por tanto, tenía 60 poliedros y he dado 12 a Tales y 16 a Hipatia, Arquímedes y Pitágoras.

42.– Una tienda de artículos para el hogar pone a la venta 100 juegos de cama a 70 € el juego. Cuando lleva vendida una buena parte, los rebaja a 50 €, continuando la venta hasta que se agotan. Si la recaudación total ha sido de 6.600 €. ¿Cuántos juegos ha vendido sin rebajar y cuántos rebajados?

Si llamamos x al número de juegos de cama vendidos a 70 €, entonces 100–x serán los juegos vendidos a 50€.

Con esto ya podemos plantear la ecuación con el dinero recaudado:

$$70x + 50(100 - x) = 6.600$$

Cuya solución es:

$$70x+50(100-x)=6.600 \rightarrow 70x+5000-50x=6600 \rightarrow 70x-50x=6600-5000$$

$$\rightarrow 20x=1600 \rightarrow x=\frac{1600}{20} \rightarrow x=80$$

Por tanto, vendió 80 juegos de cama a 80 € y 20 a 50 €.

43.- Cierto aceite contiene un 70% de aceite de oliva virgen extra y el resto de aceite de oliva virgen; otro aceite del mismo tipo contiene solo un 10% de aceite de oliva virgen extra. ¿Qué cantidad de aceite de oliva virgen extra se debe agregar al segundo aceite para obtener 90 litros del primer aceite?

Se trata de un problema de ecuaciones, en particular de mezclas, así que nos ayudaremos de una tabla en la que x será el volumen del aceite que contiene un 10% de aceite virgen extra.

	Volumen (l)	% de aceite de oliva virgen extra	Total
Aceite del 10%	x	10 %	10x
Aceite Virgen Extra	90 - x	100 %	100·(90-x)
Mezcla de Aceite al 70%	90	70 %	6.300

Una vez completa la tabla, planteamos la ecuación recordando que el total de la mezcla era igual a la suma de los totales de cada una de las partes por separado:

$$10x+100\cdot(90-x)=6.300 \rightarrow 10x+9000-100x=6.300 \rightarrow 10x-100x=6300-9000 \rightarrow$$

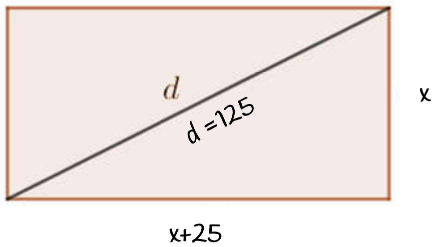
$$\rightarrow -90x=-2700 \rightarrow x=\frac{-2700}{-90} \rightarrow x=30 \text{ litros}$$

Si usamos 30 litros del 10%, entonces usamos 90 – 30 = 60 litros de aceite virgen extra.

Para preparar el aceite al 70 % necesitamos 60 litros de aceite (puro) virgen extra.

44.- Se quiere vallar una finca rectangular que tiene de largo 25 m más que de ancho y cuya diagonal mide 125 m. ¿Cuántos metros de valla se necesitan?

Si llamamos **x** a lo que mide de ancho, **x+2** será el largo, y si su diagonal mide 125, podemos dibujarlo para tenerlo todo más claro.



Si aplicamos el Teorema de Pitágoras, llegamos a una ecuación de segundo grado:

$$a^2=b^2+c^2 \rightarrow x^2+(x+25)^2=125^2$$

Cuya solución viene dada por:

$$x^2+(x+25)^2=125^2 \rightarrow x^2+x^2+50x+625=15625 \rightarrow 2x^2+50x-15000=0$$

$$\rightarrow x^2+25x-7500=0 \rightarrow (x+100)\cdot(x-75)=0 \rightarrow \begin{cases} x=-100 \\ x=75 \end{cases}$$

Desechamos la solución negativa puesto que **x** es una distancia.

Conocido que el ancho es de 75m, el largo será 75 + 25 = 100 metros.

Así que sus lados miden 75 y 100 metros y su perímetro 2·(75+100)= 350 metros

Se necesitan 350 metros de valla.

45.- En una clase hay en total 40 alumnos. En un examen de Matemáticas resulta que el triple de aprobados es mayor que el doble de suspensos. ¿Cuál es el menor número de aprobados posible?

Si llamamos **x** al número de aprobados, **40 – x** serán los alumnos suspensos, así que con esto ya podemos planear la inecuación:

$$3x > 2(40 - x)$$

Cuya solución es:

$$3x > 2(40-x) \quad \rightarrow \quad 3x > 80 - 2x \quad \rightarrow \quad 3x + 2x > 80 \quad \rightarrow \quad x > \frac{80}{5} \quad \rightarrow \quad x > 16$$

Pues si el número de aprobados ha de ser mayor que 16, el menor número de aprobados será de 17.

El menor número de aprobados de la clase es de 17 alumnos.

46.- Si al cuadrado de un número le restamos su triple, obtenemos más de 4. ¿Qué podemos decir de ese número?

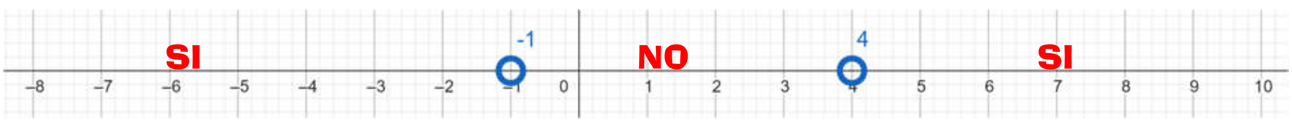
Si llamamos **x** al número, su cuadrado será x^2 y su triple **3x**, así que como dice que si al cuadrado x^2 le restamos el triple, **3x**, obtenemos más que 4, esta diferencia será mayor que 4. Así que, con esto podemos plantear la inecuación:

$$x^2 - 3x > 4$$

Cuya solución la conseguiremos resolviendo primero la ecuación y viendo los intervalos que la verifican:

$$x^2 - 3x = 4 \quad \rightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-4)(x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

Si representamos en la recta real, con la ayuda del 0, podemos verificar las regiones que cumplen la desigualdad:



0>4, no. Por tanto, el intervalo (–1,4) no verifica la desigualdad y los otros dos sí.

Podemos decir que el número es menor que –1 y mayor que 4.

47.- En una tienda se vende té blanco a 18 €/kg y té verde a 14 €/kg. También vende una mezcla de ambos productos a 16,4 €/kg. ¿Cuál es la composición porcentual de la mezcla?

Se trata de un problema de mezclas, así que nos ayudaremos de una tabla en la que x será el % del té blanco e y el % de té verde.

	Precio (€)	Porcentaje (%)	Total
Té Blanco	18	X	18·X
Té Verde	14	Y	14·Y
Mezcla	16,40	100	1.640

Una vez completa la tabla, planteamos las dos ecuaciones del sistema; la primera con los porcentajes y la segunda recordando que el total de la mezcla era igual a la suma de los totales de cada una de las partes por separado:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 18x + 14y = 1640 \end{cases} \xrightarrow{\text{Simplificando}} \begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix} \begin{cases} x + y = 100 \\ 9x + 7y = 820 \end{cases} \quad \rightarrow$$ de la ecuación 1) despejamos x: $x = 100 - y$

y sustituyendo en la ecuación 2): $9(100-y) + 7y = 820 \xrightarrow{\text{Agrupando}} 900 - 9y + 7y = 820 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad -9y + 7y = 820 - 900 \quad \rightarrow \quad -2y = -80 \quad \rightarrow \quad y = 40\%$$

Si de té verde hay un 40% entonces de té blanco habrá un 60%.

La composición porcentual será un 40 % de té verde y un 60 % de té blanco.

48.- Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones: (4 puntos)

a) $\begin{cases} \dfrac{7x+5y}{10}-\dfrac{3(x+y)}{5}=-\dfrac{3}{10} \\ \dfrac{3x+y+2}{4}-\dfrac{y-2x}{6}=\dfrac{y-x}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{7x+5y}{\cancel{10}}-\dfrac{6(x+y)}{\cancel{10}}=-\dfrac{3}{\cancel{10}} \\ \dfrac{9x+3y+6}{\cancel{12}}-\dfrac{2y-4x}{\cancel{12}}=\dfrac{3y-3x}{\cancel{12}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7x+5y-6x-6y=-3 \\ 9x+3y+6-2y+4x=3y-3x \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x-y=-3 \\ 16x-2y=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=-3 \\ 8x-y=-3 \end{cases} \xrightarrow{\text{Por Reducción}} 7x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow 0-y=-3 \rightarrow y=3$

$S.C.D.\{x=0 \quad y=3\}$

b) $\begin{cases} \log(x^2+y)-\log(x-2y)=1 \\ 5^{x+1}=25^{y+1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log\left(\dfrac{x^2+y}{x-2y}\right)=1 \\ 5^{x+1}=(5^2)^{y+1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log\left(\dfrac{x^2+y}{x-2y}\right)=\log(10) \\ 5^{x+1}=5^{2y+2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{x-2y}=10 \\ x+1=2y+2 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x^2+y=10(x-2y) \\ x-2y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y=10x-20y \\ x-2y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2-10x+21y=0 \\ x-2y=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Por Sustitución}}$ de 2),

despejamos y: $y=\dfrac{x-1}{2}$ y sustituyendo en $x^2-10x+21y=0 \rightarrow x^2-10x+21\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=0 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2-20x+21x-21=0 \rightarrow 2x^2+x-21=0 \rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-\dfrac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1=1 \\ y_2=-\dfrac{9}{4} \end{cases}$

$S.C.D.\left\{(3,1) \quad y \quad \left(\dfrac{-7}{2},\dfrac{-9}{4}\right)\right\}$

49.- Calcula las dimensiones de una finca rectangular sabiendo que su área mide 48 hectáreas y su diagonal es de 10 Hectómetros.

Si llamamos **x** a la longitud de la base e **y** a la altura, podremos plantear dos ecuaciones, una con el área y otra con los lados y la diagonal usando el teorema de Pitágoras:

Ecuación área: $x \cdot y=48$

Ecuación lados: $x^2+y^2=10^2$

$\xrightarrow{\text{Por sustitución}} \begin{cases} y=\dfrac{48}{x} \\ x^2+\left(\dfrac{48}{x}\right)^2=100 \end{cases}$

Llegamos a una ecuación bicuadrada:

$$x^2+\left(\frac{48}{x}\right)^2=100 \rightarrow x^2+\frac{2304}{x^2}=100 \rightarrow x^4-100x^2+2304=0$$

Que resolvemos mediante el cambio de variable $z^2=x$

$$z^2-100z+2304=0 \rightarrow z_1=36 \quad y \quad z_2=64$$

Y deshaciendo el cambio llegamos a: $x_1=\sqrt{36}=6 \quad y \quad x_2=\sqrt{64}=8$

Si x= 6, por sustitución $y=\dfrac{48}{x}=\dfrac{48}{6}=8$ y si x=8, $y=\dfrac{48}{x}=\dfrac{48}{8}=6$

Por tanto, las dimensiones de la finca rectangular es de 8 x 6 hectómetros.

50.- La suma de las edades, en el momento actual, de tres hermanos es de 15 años. Dentro de un año, la edad del menor será la mitad que la edad del mediano. Hace 2 años, la edad del mayor era el doble que la del mediano. Plantea un sistema de ecuaciones con el que poder calcular las edades de los tres hermanos.

Si **x** es la edad del menor, **y** la del mediano y **z** la del mayor: $\begin{cases} x+y+z=15 \\ x+1=\dfrac{y+1}{2} \\ z-2=2(y-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=15 \\ 2x-y=-1 \\ 2y-z=-2 \end{cases}$

51.– Varios amigos se van de cena al restaurante **El Peñón de Salobreña** y al finalizar, la cuenta asciende a 600 €. Por problemas de conexión el datáfono no funciona y el camarero les dice que tienen que pagar con dinero. Como dos de los amigos no llevan cash, los demás deciden invitarles debiendo aumentar su aportación en 80 € cada uno. ¿Cuántos amigos son y cuanto debería pagar cada uno?

Si llamamos **x** al número de amigos que asisten a la cena e **y** al dinero que paga cada uno, podemos escribir una primera ecuación en la que si multiplicamos el número de amigos por lo que paga cada uno, obtenemos el total de la factura:

$$x\cdot y=600$$

Y la otra ecuación con lo de que si dos no pagan, pagarían **(x–2)**, y si los que pagan, pagan 80 € más cada uno, esos pagarían **(y+80)**, por tanto si multiplicamos otra vez los que pagan por lo que paga cada uno, obtenemos el total de la cena:

$$(x-2)\cdot(y+80)=600$$

Con esto, tenemos el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x\cdot y=600 \\ (x-2)\cdot(y+80)=600 \end{cases} \xrightarrow{\text{Operamos}} \begin{cases} x\cdot y=600 \\ x\cdot y+80x-2y-160=600 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sustituimos } x\cdot y} \begin{cases} x\cdot y=600 \\ \cancel{600}+80x-2y-160=\cancel{600} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Operamos}} \begin{cases} x\cdot y=600 \\ 80x-2y=160 \end{cases} \xrightarrow{\text{Simplificamos}} \begin{cases} x\cdot y=600 \\ 40x-y=80 \end{cases} \xrightarrow{\text{Despejamos y de la 1ª}} \begin{cases} y=\dfrac{600}{x} \\ 40x-y=80 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sustituimos en la 2ª}}$$

$$\rightarrow 40x-\frac{600}{x}=80 \rightarrow 40x^2-600-80x=0 \xrightarrow{\text{Simplificamos}} x^2-2x-15=0 \xrightarrow{\text{Factorizamos}}$$

$$\rightarrow (x+3)\cdot(x-5)=0 \rightarrow \begin{cases} \cancel{x_1=-3} \\ x_2=5 \end{cases} \rightarrow x=5 \xrightarrow{\text{de } y=600/x} y=\frac{600}{5} \rightarrow y=120$$

Desechamos la solución x=–3, porque el número de amigos no puede ser negativo y con esto:

A la cena asisten 5 amigos y cada uno paga 120 €

52.– Sea a un número positivo y diferente de la unidad y de cero, demuestra que la suma de **a** con su inverso es mayor que 2.

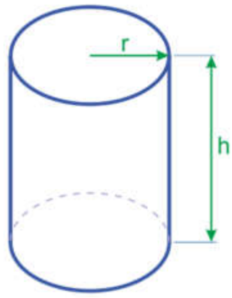
Sea **a** el número, entonces, $\frac{1}{a}$ es su inverso y con esto ya podemos plantear la inecuación:

$$a+\frac{1}{a}>2 \xrightarrow{\text{Operando}} a^2-2a+1>0 \rightarrow (a-1)^2>0$$

Cosa que es verdad siempre, un número cualquiera elevado al cuadrado es siempre positivo.

Por tanto, queda demostrado que la suma de un número con su inverso es mayor que 2

53.- Una empresa fabrica dos tipos de latas de refrescos, ambas cilíndricas y del mismo volumen:33 cl. Si la de primer tipo tiene una altura de 12 cm, y la del segundo, de 15 cm. ¿Cuál tiene mayor coste de producción?



Con la ayuda de la fórmula del volumen, podemos calcular el radio de cada una de las latas:

Lata 1	**Lata 2**
	
$V=\pi r^2 h \quad \rightarrow \quad r_1=\sqrt{\frac{V}{\pi\cdot h}}=\sqrt{\frac{33}{\pi\cdot 12}}=0{,}936\ cm$	$V=\pi r^2 h \quad \rightarrow \quad r_2=\sqrt{\frac{V}{\pi\cdot h}}=\sqrt{\frac{33}{\pi\cdot 15}}=0{,}837\ cm$

Y ahora, con la fórmula del área, podemos calcular el área de cada lata, y aquella que tenga más área, será más costosa de fabricar:

Lata 1	**Lata 2**
$A_1=2\pi r\cdot(r+h)=2\cdot\pi\cdot 0{,}936(0{,}936+12)=76{,}077\ cm^2$ $A_1 = 76\ cm^2$	$A_2=2\pi r\cdot(r+h)=2\cdot\pi\cdot 0{,}837(0{,}837+15)=83{,}287\ cm^2$ $A_2 = 83\ cm^2$

Queda claro que es más barato producir latas de altura 12 que de altura 15 cm.

Por tanto, es más caro producir las latas de 15 cm de altura.

54.- Calcular tres números naturales consecutivos tales que su producto sea igual a cinco veces su suma.

Sea **x** el primer número, **x+1** será el segundo y **x+2** el tercero.

Como dice que el producto de los 3 números es lo mismo que 5 veces su suma, vamos a calcular el producto y la suma de los números:

- Producto: $x\cdot(x+1)\cdot(x+2)=(x^2+x)\cdot(x+2)=x^3+2x^2+x^2+2x=x^3+3x^2+2x$
- Suma: $x+(x+1)+(x+2)=3x+3$

Con todo esto, ya podemos plantear la ecuación: $x^3+3x^2+2x=5\cdot(3x+3) \quad \rightarrow \quad x^3+3x^2-13x-15=0$, cuyas soluciones vamos a calcular descomponiéndola en el producto de binomios mediante la regla de Ruffini.

$$\left.\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & -13 & -15 \\
3 & & 3 & 18 & 15 \\
\hline
 & 1 & 6 & 5 & \lfloor 0 \\
-1 & & -1 & -5 & \\
\hline
 & 1 & 5 & \lfloor 0 & \\
-5 & & -5 & & \\
\hline
 & 1 & \lfloor 0 & &
\end{array}\right\} \rightarrow \quad x^3+3x^2-13-15=0 \quad \leftrightarrow \quad (x-3)\cdot(x+1)\cdot(x+5)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \\ x_3=-5 \end{cases}$$

Como nos dicen que los números son naturales, desechamos las soluciones negativas y nos quedamos con x=3, por tanto, **los números naturales consecutivos son: 3, 4 y 5.**

55.– Deben repartirse 400 € en partes iguales, entre varias personas. En el momento del reparto se retiran cuatro, lo que aumenta en 5 € la parte de los otros. ¿Cuántas personas había al principio?

Si llamamos **x** al número de personas entre las que vamos a repartir los 400 € e **y** al dinero que recibe cada uno, el producto de ambos será el dinero a repartir, y esa será la ecuación 1) del sistema:

$$1)\ x\cdot y=400$$

Si en el momento del reparto se retiran 4, el número de personas será (x–4), y si cada uno recibe 5 euros más, recibe (y+5), y si multiplicamos ambos resultados obtenemos otra vez la cantidad a repartir, los 400 €, por tanto, la ecuación 2) del sistema será:

$$2)\ (x-4)\cdot(y+5)=400$$

Juntándolas las dos llegamos al sistema no lineal siguiente: $\begin{cases} x\cdot y=400 \\ (x-4)\cdot(y+5)=400 \end{cases}$

el cual, si operamos un poquito, se transforma en otro equivalente: $\begin{cases} x\cdot y=400 \\ 5x-4y=20 \end{cases}$ mucho más fácil de resolver.

$$\begin{cases} x\cdot y=400 \\ 5x-4y=20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{400}{y} \\ 5x-4y=20 \end{cases} \xrightarrow{\text{Por sustitución}} 5\left(\frac{400}{y}\right)-4y=20 \xrightarrow{\text{Operando}} 2000-4y^2=20y \rightarrow$$

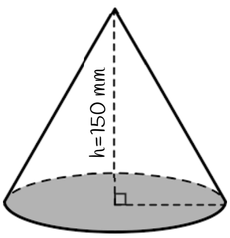
$$\rightarrow \quad 4y^2+20y-2000=0 \quad \rightarrow \quad y^2+5y-500=0 \quad \rightarrow \quad (y-20)\cdot(y+25)=0 \quad \rightarrow \quad y=20$$

Desechamos la solución negativa puesto que el dinero a repartir tiene que ser positivo. Y con y ya podemos calcular x:

$$x=\frac{400}{y}=\frac{400}{20} \quad \rightarrow \quad x=20$$

Así que los 400 € se reparten entre 20 personas y a cada uno corresponde 20 €.

56.– Calcula, de manera exacta, el diámetro de un cono de 25π cm³ de volumen sabiendo que su altura mide 150 milímetros. (1 punto)



Sabemos del tema de geometría que estamos viendo que el volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro, por tanto:

$$V_{cono}=\frac{1}{3}V_{cilindro} \quad \rightarrow \quad V_{cono}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$$

Como nos piden el diámetro, y sabemos que el diámetro es el doble del radio, vamos a despejar el radio de la expresión del volumen y con él, calcularemos el diámetro.

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h \quad\rightarrow\quad r^2=\frac{3\cdot V}{\pi\cdot h} \quad\rightarrow\quad r=\sqrt{\frac{3\cdot V}{\pi\cdot h}}$$

Sustituyendo los valores del volumen y de la altura, llegamos a:

$$r=\sqrt{\frac{3\cdot V}{\pi\cdot h}}=\sqrt{\frac{3\cdot 25\pi}{\pi\cdot 15}}=\sqrt{\frac{75\pi}{15\pi}}=\sqrt{5}\ cm$$

Por tanto, el diámetro es: $d=2\sqrt{5}\ cm$

57.- La resolución de una ecuación de segundo grado se ha emborronado y hay partes que no se aprecian.

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{\ldots\ldots}}{4} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x_1=\ldots\ldots \\ x_2=-5 \end{cases}$$

¿puedes averiguar de que ecuación se trata?

Comparando lo que no se ha borrado con la solución general de una ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{-9\pm\sqrt{\ldots\ldots}}{4} \quad\leftrightarrow\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

Obtenemos los valores de los coeficientes **b** y **a** de la ecuación: $\begin{cases} b=9 \\ a=2 \end{cases}$

Además, como sabemos que una de las soluciones es x=−5, con ella podemos calcular el discriminante:

$$\text{Si } x=\frac{-9\pm\sqrt{\ldots\ldots}}{4}=-5 \quad\rightarrow\quad \frac{-9\pm\sqrt{\Delta}}{4}=-5 \quad\rightarrow\quad -9\pm\sqrt{\Delta}=-20 \quad\rightarrow\quad \pm\sqrt{\Delta}=-20+9=-11$$

Obtenido éste, podemos obtener el valor del término independiente c.

Si, $\Delta=(-11)^2=121 \quad\rightarrow\quad b^2-4ac=121$ y de aquí, como conocemos a y b, podemos despejar c:

$$b^2-4ac=121 \quad\rightarrow\quad 9^2-4\cdot 2\cdot c=121 \quad\rightarrow\quad 81-8c=121 \quad\rightarrow\quad 81-121=8c \quad\rightarrow\quad c=-\frac{40}{8}$$

Así que c=−5

Por tanto, a=2, b=9 y c=−5, y la ecuación es $2x^2+9x-5=0$ y su soluciones son −5 y ½.

58.- Resuelve dos de las tres ecuaciones siguientes:

a) $$\frac{x-1}{x+1}-\frac{3+x}{x}=2 \quad\rightarrow\quad \frac{x\cdot(x-1)}{x\cdot(x+1)}-\frac{(3+x)\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}=\frac{2\cdot x\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)} \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad \frac{x^2-x}{\cancel{x\cdot(x+1)}}-\frac{x^2+4x+3}{\cancel{x\cdot(x+1)}}=\frac{2x^2+2x}{\cancel{x\cdot(x+1)}} \quad\rightarrow\quad x^2-x-x^2-4x-3=2x^2+2x \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad 2x^2+7x+3=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-7\pm 5}{4} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x_1=-3 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

b) $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{x}=x\sqrt{2} \rightarrow \frac{x\cdot x}{x\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{x\sqrt{2}}=\frac{x\sqrt{2}\cdot x\sqrt{2}}{x\sqrt{2}} \rightarrow \frac{x^2}{\cancel{x\sqrt{2}}}+\frac{2}{\cancel{x\sqrt{2}}}=\frac{2x^2}{\cancel{x\sqrt{2}}} \rightarrow$

$\rightarrow x^2+2=2x^2 \rightarrow x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2} \rightarrow x_1=\sqrt{2} \quad x_2=-\sqrt{2}$

c) $\log_2 8^{2x-3}=5 \xrightarrow{\text{Por la definición de logaritmo}} 2^5=8^{2x-3} \rightarrow 2^5=\left(2^3\right)^{2x-3} \rightarrow 2^5=2^{6x-9} \rightarrow$

$\rightarrow 5=6x-9 \rightarrow 6x=14 \rightarrow x=\frac{14}{6} \rightarrow x=\frac{7}{3}$

59.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales: (2 puntos) $\begin{cases} x^2-y^2=17 \\ x-y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-y^2=17 \\ x-y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=17 \\ x=y+1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sustituimos la x de la 2ª en la primera ecuación}} (y+1)^2-y^2=17 \rightarrow y^2+2y+1-y^2=17$

$\rightarrow 2y+1=17 \rightarrow 2y=16 \rightarrow y=\frac{16}{2} \rightarrow y=8 \rightarrow x=y+1 \rightarrow x=9$

$$S.C.D.\{x=9;\, y=8\}$$

60.- Se poseen dos cirios de igual altura que se encienden simultáneamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo de haberse encendido, la altura del primero será el doble del segundo, sabiendo que el primero se consume en 6 horas mientras que el segundo lo hace en 4 horas?

Si llamamos x al tiempo transcurrido, después de x horas, el primer cirio que se consume en 6 horas, en una hora se habrá consumido $\frac{1}{6}$ y en x horas se habrá consumido $\frac{x}{6}$, de la misma forma, el segundo que tarda 4 horas en consumirse, en una hora se consumirá $\frac{1}{4}$, y en x horas lo hará en $\frac{x}{4}$

		Se consume en	En 1 hora se consume	En x horas	Queda sin consumir	Altura
Primer Cirio		6 horas	$\frac{1}{6}$	$\frac{x}{6}$	$1-\frac{x}{6}$	
Segundo Cirio		4 horas	$\frac{1}{4}$	$\frac{x}{4}$	$1-\frac{x}{4}$	

Como nos piden en qué momento la altura del primero será el doble que la del segundo, con esto planteamos la ecuación:

$1-\frac{x}{6}=2\left(1-\frac{x}{4}\right) \rightarrow 1-\frac{x}{6}=2-\frac{x}{2} \rightarrow 6-x=12-3x \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3$

Por tanto, al cabo de 3 horas, es cuando la altura del primero será el doble de la del segundo.

61.- Queremos mezclar dos líquidos de densidades 0,7 y 1,3 para obtener 30 litros de otro líquido de densidad 0,9 (todas en Kg/m³). Hallar la cantidad de líquido que hay que tomar de cada clase para conseguir dicha mezcla.

Se trata de un problema de mezclas y nos ayudaremos de una tabla para resolverlo:

	Volumen (l)	Densidad (Kg/m³)	Total
Líquido 1	x	0,7	0,7·x
Líquido 2	30−x	1,3	1,3·(30−x)
Mezcla	30	0,9	27

Una vez completada con los datos del problema y con la incógnita, calculábamos la columna del total multiplicando las otras dos.

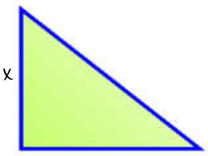
Planteamos la ecuación haciendo que la suma de los totales de los dos líquidos tiene que ser igual al total de la mezcla:

$$0,7x+1,3(30-x)=27 \quad \rightarrow \quad 0,7x+39-1,3x=27 \quad \rightarrow \quad -0,6x=-12 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-12}{-0,6}=20$$

Para conseguir una mezcla de densidad 0,9 Kg/m³ hemos de mezclar 20 l de líquido 1 con 10 l de líquido 2.

62.– Calcula la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo sabiendo que uno de ellos es 7 cm más largo que el otro y que su superficie es de 15 cm² .

Si representamos los datos del problema en un dibujo, tenemos:



Su área que es de 15 cm², vendrá dada por la mitad del producto de su base y su altura, así que con eso planteamos la ecuación:

$$A=\frac{b\cdot h}{2} \quad \rightarrow \quad 15=\frac{x\cdot(x+7)}{2} \quad \rightarrow \quad 30=x^2+7x$$
$$\rightarrow \quad x^2+7x-30=0 \quad \rightarrow \quad (x-3)\cdot(x+10)=0$$

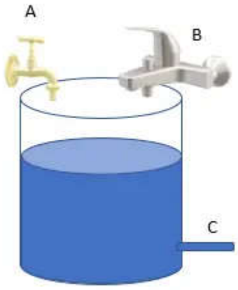
Cuyas soluciones son: $(x-3)\cdot(x+10)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases}(x-3)=0 & \rightarrow \quad x=3\\ (x+10)=0 & \rightarrow \quad x=-10\end{cases}$

Como hemos llamado x a la altura del triángulo y ésta no puede ser negativa, desechamos la solución −10 y nos quedamos con x=3.

Así que, los catetos miden 3 y 10 cm.

63.– Un grifo puede llenar un depósito en 10 horas, otro grifo en 20 h. y un desagüe puede vaciarlo en 15 h. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito si estando vacío y abierto el desagüe se abren los dos grifos?

Se trata de un problema de grifos, así que podemos ayudarnos con un dibujo y con una tabla. Si llamamos x al tiempo que tarda en llenarse el depósito:



Mecanismo	Tiempo (h)	En 1 hora
Grifo A	10	$1/10$
Grifo B	20	$1/20$
Desagüe	15	$1/15$
Todos juntos	x	$1/x$

Con todo esto ya podemos plantear una ecuación fijándonos en lo que cada uno de ellos hace en una hora, la suma de todos por separado, tendrá que ser igual a lo que hacen todos juntos también en una hora:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{20}-\frac{1}{15}=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{6x}{60x}+\frac{3x}{60x}-\frac{4x}{60x}=\frac{60}{60x} \quad \rightarrow \quad 6x+3x-4x=60 \quad \rightarrow \quad 5x=60 \quad \rightarrow \quad x=12$$

Por tanto, el depósito estará lleno al cabo de 12 horas.

64.- Resuelve paso a paso cada una de las siguientes ecuaciones e inecuaciones: (4 puntos)

a) $2^{x+3}+4^{x+1}-320=0 \quad \rightarrow \quad 2^x\cdot 2^3+4^x\cdot 4-320=0 \quad \rightarrow \quad 2^x\cdot 2^3+4^x\cdot 4-320=0 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad 8\cdot 2^x+4\cdot\left(2^x\right)^2-320=0 \quad \xrightarrow{\text{Cambio de Variable: } z=2^x} \quad 8\cdot z+4\cdot(z)^2-320=0 \quad \rightarrow \quad 4z^2+8z-320=0$$

$$\rightarrow \quad z^2+2z-80=0 \quad \rightarrow \quad (x-8)(x+10)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-8=0 & \rightarrow \quad x_1=8 \\ x+10=0 & \rightarrow \quad x_2=8 \end{cases}$$

b) $\dfrac{2x-3}{x+1}>1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{2x-3}{x+1}-1>0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{2x-3}{x+1}-\dfrac{x+1}{x+1}>0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{2x-3-x-1}{x+1}>0 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad \frac{x-4}{x+1}>0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \left.\begin{cases} x-4>0 & \rightarrow \quad x>4 \\ x+1>0 & \rightarrow \quad x>-1 \end{cases}\right\} \rightarrow \quad x>4 \\ \left.\begin{cases} x-4<0 & \rightarrow \quad x<4 \\ x+1<0 & \rightarrow \quad x<-1 \end{cases}\right\} \rightarrow \quad x<-1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad (-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{4}+y-\dfrac{2x-5y}{6}=\dfrac{19}{12} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{3x}{6}-\dfrac{2x-2y}{6}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{12}+\dfrac{12y}{12}-\dfrac{4x-10y}{12}=\dfrac{19}{12} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3x-2x+2y=1 \\ 3+12y-4x+10y=19 \end{cases}$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} x+2y=1 \\ -4x+22y=16 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x+2y=1 \\ -2x+11y=8 \end{cases} \quad \xrightarrow{1^{\text{a}} \text{ por } 2} \quad \begin{cases} 2x+4y=2 \\ -2x+11y=8 \end{cases} \quad \rightarrow$$

Si sumamos ambas ecuaciones, por el método de reducción, obtenemos: $\rightarrow \quad 15y=10$

$$\rightarrow \quad y=\frac{10}{15} \quad \rightarrow \quad y=\frac{2}{3}$$

Sustituyendo en: $x+2y=1 \quad \rightarrow \quad x+2\dfrac{2}{3}=1 \quad \rightarrow \quad x+\dfrac{4}{3}=1 \quad \rightarrow \quad x=1-\dfrac{4}{3} \quad \rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{3}$

$$S.C.D.\left\{x=-\frac{1}{3};\, y=\frac{2}{3}\right\}$$

d) $\begin{cases} \log\left(2x-y^2\right)=\log(2-y)+1 \\ 3^{x-1}=27^{y+3} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \log\left(2x-y^2\right)-\log(2-y)=1 \\ 3^{x-1}=\left(3^3\right)^{y+3} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \log\dfrac{2x-y^2}{2-y}=1 \\ 3^{x-1}=3^{3y+9} \end{cases}$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2x-y^2}{2-y}=10 \\ x-1=3y+9 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2x-y^2=20-10y \\ x-1=3y+9 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2x+10y-y^2=20 \\ x-3y=10 \end{cases}$$

Por el método de sustitución, despejamos x de la segunda ecuación: $x=3y+10$, y lo sustituimos en la primera:

$$2x+10y-y^2=20 \quad \rightarrow \quad 2(3y+10)+10y-y^2=20 \quad \rightarrow \quad 6y+20+10y-y^2=20$$

Ecuación de segundo grado incompleta, cuya solución viene dada por:

$$16y-y^2=0 \quad \rightarrow \quad y(16-y)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y=0 & \rightarrow \quad y_1=0 \\ 16-y=0 & \rightarrow \quad \cancel{y_2=16} \end{cases}$$

Desechamos la y=16 porque no verifica la ecuación logarítmica.

Y conocida la y, podemos calcular la x de $x=3y+10 \quad \rightarrow \quad x=10$

$$S.C.D.\{x=10;\, y=0\}$$

65.- Dos grifos A y B, abiertos los dos, pueden llenar un barril en 2 horas y 24 minutos. Calcula el tiempo que tardaría en llenar el depósito cada uno de ellos en solitario, sabiendo que el segundo grifo es capaz de hacerlo en dos horas menos que el primero. (1,5 puntos)

Se trata de un problema de ecuaciones, pero particularmente uno de grifos, así que si llamamos x al tiempo (en horas) que tardaría en llenar la alberca uno de los grifos, entonces el otro tardaría **x+2** horas.

Para plantear la ecuación, nos fijamos en la proporción de alberca que se llena en una hora con cada uno de los grifos o con los dos, sabiendo que 2 horas y 24 minutos son 2,4 horas:

$$\left.\begin{array}{l} Grifo\ 1: x \\ Grifo\ 2: x+2 \\ Los\ dos: 2{,}4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{En 1 hora llenarán:}} \left.\begin{array}{l} Grifo\ 1: \frac{1}{x} \\ Grifo\ 2: \frac{1}{x+2} \\ Los\ dos: \frac{1}{2{,}4} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Será igual a la suma de lo que haga cada uno por separado también en 1 hora}]{\text{Lo que hagan los dos grifos a la vez en 1 hora}} \frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2{,}4} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{2{,}4(x+2)}{x\cdot\cancel{(x+2)\cdot 2{,}4}}+\frac{2{,}4x}{x\cdot\cancel{(x+2)\cdot 2{,}4}}=\frac{x(x+2)}{x\cdot\cancel{(x+2)\cdot 2{,}4}} \quad \rightarrow \quad 2{,}4x+4{,}8+2{,}4x=x^2+2x \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x^2+2x-4{,}8x-4{,}8=0 \quad \rightarrow \quad x^2-2{,}8x-4{,}8=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-2{,}8 \\ c=-4{,}8 \end{cases} \leftrightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{-(-2{,}8)\pm\sqrt{(-2{,}8)^2-4\cdot 1\cdot(-4{,}8)}}{2\cdot 1}=\frac{2{,}8\pm\sqrt{7{,}84+19{,}2}}{2}=\frac{2{,}8\pm\sqrt{27{,}04}}{2}=\frac{2{,}8\pm 5{,}2}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{2{,}8+5{,}2}{2}=\frac{8}{2}=4 \\ x_2=\frac{2{,}8-5{,}2}{2}=\frac{-2{,}4}{2}=-1{,}2 \end{cases}$$

Desechamos la segunda por ser negativa (los tiempos no pueden ser negativos) y nos quedamos con la primera.

Por tanto, un grifo llena la alberca en 4 horas y el otro en 4+2=6 horas.

66.- ¿Es cierto que la suma de un número y de su cuadrado es siempre positiva? Justifica tu respuesta. (1,5 puntos)

Si llamamos x al número, su cuadrado será x^2 y ya podemos plantear una inecuación con los datos del problema:

$$x^2+x>0$$

Cuya solución encontraremos con la ayuda de la ecuación de segundo:

$$x^2+x=0 \quad \rightarrow \quad x(x+1)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Si\ x=0 & \rightarrow \quad x_1=0 \\ Si\ x+1=0 & \rightarrow \quad x_2=-1 \end{cases}$$

Estas dos soluciones dividen en 3 intervalos la recta real: $(-\infty,-1)$ $(-1,0)$ $(0,+\infty)$

Solo nos queda verificar en cuál de ellos se verifica la desigualdad $x^2+x>0$

- Si cogemos un número del primer intervalo, por ejemplo, el −2, tenemos que:

$$x^2+x>0 \rightarrow 4-2>0 \rightarrow 2>0$$

- Si cogemos un número del segundo intervalo, por ejemplo, el −1/2, tenemos que:

$$x^2+x>0 \rightarrow \frac{1}{4}-\frac{1}{2}>0 \rightarrow -\frac{1}{2}>0 \rightarrow \text{FALSO}$$

Por tanto, a la pregunta del problema hemos de responder NO.

67.– Hace 6 años me gasté 450 € en una PS4 Pro y en el nuevo God of War edición coleccionista. Como quiero comprarme la PS5, los tengo que vender. Si en la venta pierdo el 30% en la consola y el 60% en el juego, y en total voy a perder el 36 % del valor de compra, ¿cuánto me costó cada artículo?

Si en la venta va a perder un 36%, vamos, primero, a calcular por cuánto dinero las venderá:

Sabemos que, en un ejercicio de porcentajes, la cantidad final se calcula multiplicando la cantidad inicial por el índice de variación porcentual (Iv) total, es decir:

$$C_f=C_o\cdot I_v \rightarrow C_f=450\cdot 0{,}64=288\ €$$

Así que, el **precio de venta será de 288 euros.**

Si llamamos **x** al precio de compra de la PS4, e **y** al precio de compra del juego, con esto ya podemos plantear la primera ecuación del sistema:

$$Compra:\ x+y=450$$

Si en la consola pierde un 30%, la venderá por 0,7x, y si en el juego pierde un 60%, lo venderá por 0,4y, así que con esto podemos plantear la segunda ecuación del sistema:

$$Venta:\ 0{,}7x+0{,}4y=288$$

Así que tenemos un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución, viene dada por:

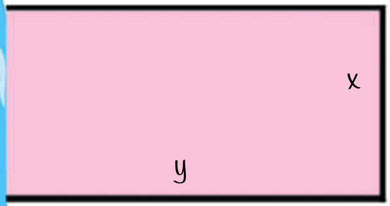
$$\begin{cases} x+y=450 \\ 0{,}7x+0{,}4y=288 \end{cases} \xrightarrow{\text{La 1ª por }(-0{,}7)} \begin{cases} -0{,}7x+-0{,}7y=-315 \\ 0{,}7x+0{,}4y=288 \end{cases}$$

Por el método de reducción y sumando ambas ecuaciones llegamos a:

$$\begin{cases} \cancel{-0{,}7x}-0{,}7y=-315 \\ \cancel{0{,}7x}+0{,}4y=288 \end{cases} \quad -0{,}3y=-27 \rightarrow -0{,}3y=-27 \rightarrow y=\frac{-27}{-0{,}3} \rightarrow y=90\ €$$

Por tanto, el precio de compra del **juego** fue de **90 €** y el de **la PS4** de 450 – 90 = **360 €**

68.– Mi abuelo tiene un olivar rectangular de 1600 metros cuadrados de superficie con más de 300 olivos. Últimamente, está teniendo problemas con gente que le roba la aceituna y quiere poner una cerca de 2 metros y medio de altura. Como el olivar tiene un río colindante en uno de sus lados más cortos, solo es necesario cercar los otros tres lados. Si ha comprado 450 m² de cerca, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?



Como mi abuelo ha comprado 450 m² de cerca y la altura de ésta es de 2,5 metros, tenemos 450 m² : 2,5 m = 180 m lineales de cerca.

Si llamamos **x** a la parte más corta e **y** a la más larga, podemos plantear un sistema de ecuaciones NO lineales con el área y el "perímetro":

Área: $x \cdot y = 1600$ Lados: $x + 2y = 180$

$$\begin{cases} x \cdot y = 1600 \\ x + 2y = 180 \end{cases}$$

Si despejamos x de la segunda ecuación:

$$x + 2y = 180 \quad \rightarrow \quad x = 180 - 2y$$

Y la sustituimos en la primera, llegamos a una ecuación de segundo grado en y:

$$x \cdot y = 1600 \quad \rightarrow \quad (180 - 2y) \cdot y = 1600 \quad \rightarrow \quad 180y - 2y^2 = 1600 \quad \rightarrow \quad y^2 - 90y + 800 = 0$$

Cuya solución es:

$$y^2 - 90y + 800 = 0 \quad \rightarrow \quad (y-10)(y-80) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Si\ y-10=0 & \rightarrow & \cancel{y_1 = 10} \\ Si\ y-80=0 & \rightarrow & y_2 = 80 \end{cases}$$

Desechamos la solución 10, porque hemos llamado y al lado más largo, y con esto:

$$x = 180 - 2y \quad \rightarrow \quad x = 180 - 2 \cdot 80 = 180 - 160 = 20$$

Por tanto, las dimensiones del terrero son 80 metros de lago por 20 m de ancho.

69.– Representa la región del plano dada por las inecuaciones: $\begin{cases} 2x - 3y \leq -3 \\ x + y \leq 11 \\ 2 \leq x \end{cases}$