1ª EVALUACIÓN

4º ESO

MATEMÁTICAS

EJERCICIOS DE EXÁMENES

1.- Calcula paso a paso las siguientes operaciones combinadas: (1 punto)

$$a)\ \left[\sqrt{64}-(-2)\right]^2-2\cdot\left[5\cdot\sqrt{49}-\left(3^2-\sqrt{16}\right)^2\right]=\left[8+2\right]^2-2\cdot\left[5\cdot7-(9-4)^2\right]=10^2-2\cdot\left[35-5^2\right]=$$

$$\rightarrow\quad =100-2\cdot\left[35-25\right]=100-2\cdot\left[10\right]=100-20=80$$

$$b)\ \left(\frac{5}{6}-\frac{1}{4}\right):\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)\right]-\frac{6}{5}=\frac{7}{12}:\left[\frac{3}{4}-\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{8}\right]-\frac{6}{5}=\frac{7}{12}:\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right]-\frac{6}{5}=\frac{7}{12}:\frac{5}{12}-\frac{6}{5}=$$

$$\rightarrow\quad =\frac{7}{5}-\frac{6}{5}=\frac{1}{5}$$

2.- Durante los años de crisis financiera, una vivienda, que costaba 250.000 € en 2008, se fue devaluando un 4 % anual durante 5 años. A partir de 2013 subió un 3,5 % de media hasta que se vendió 2 años después. (1,5 puntos)

a) ¿Cuál fue el precio de venta?

b) ¿Qué porcentaje subió o bajó dicha vivienda después de esos 7 años?

El precio de la vivienda ha sufrido 2 variaciones, así que calculamos el índice de variación de cada uno:

Baja un 4 %: $\rightarrow\quad Iv_1=1-\frac{\%}{100}=1-\frac{4}{100}=1-0{,}04=0{,}96$

Sube un 3,5%: $\rightarrow\quad Iv_2=1+\frac{\%}{100}=1+\frac{3{,}5}{100}=1+0{,}035=1{,}035$

El precio final viene dado por:

$$Cantidad_{final}=Cantidad_{inicial}\cdot Iv_{Total}\quad\rightarrow\quad C_f=250.000\cdot(0{,}96)^5\cdot(1{,}035)^2=218.361{,}90\ €$$

Para calcular el porcentaje, nos ayudamos de índice de variación:

$$Iv_{Total}=(Iv_1)^5\cdot(Iv_2)^2=(0{,}96)^5\cdot(1{,}035)^2=0{,}873$$

Por tanto, el porcentaje ha bajado (puesto que es menor que 1) aproximadamente un 12,7 %

El precio de venta fue de 218.361,90 porque bajó casi un 13%

3.- Si x es un número del intervalo [-1,3) e y es otro número del intervalo (0,4], explica en qué intervalo puede estar x + y. (1 punto)

- El número x es como mínimo -1 cerrado e y es como mínimo 0 abierto, por tanto x+y=-1 abierto.
- El número x es como máximo 3 abierto e y es como máximo 4 cerrado, por tanto x+y=7 abierto.

Por tanto x+y pertenece al intervalo (-1,7)

4.- Al medir la distancia de frenado del nuevo Volkswagen Golf GTI, circulando a 90 km/h, se obtienen los siguientes resultados: 37,5 m, 37,8 m y 37,4 m. Calcula la distancia de frenado así como el error absoluto y relativo cometido. De las tres medidas, ¿cuál es la más fiable?. (2 puntos)

La distancia de frenado viene determinada por la media de las 3 medidas:

$$\bar{x}=\frac{\sum_i x_i}{n}=\frac{37,5+37,8+37,4}{3}=37,6\ m$$

Cuando existe un conjunto de datos, como ocurre en este caso, el error absoluto viene dado por la semidiferencia entre los valores máximo y mínimo.

$$E_{Abs}=\frac{V_{max}-V_{min}}{2}=\frac{37,8-37,4}{2}=0,2$$

Y el error relativo:

$$E_R=\frac{E_{Abs}}{V_R}\cdot 100=\frac{0,2}{37,6}\cdot 100=0,53\ \%$$

Por tanto, la distancia de frenado del nuevo Golf GTI es de 37,6 metros, el error absoluto es de 0,2 mientras que el relativo es de 0,53%.

De las tres medidas, la medida más fiable es la de 37,5 metros, puesto que es la más próxima a la media, y por ello, su error absoluto será el menor y por tanto, también lo será su error relativo.

5.– Luis XIV decidió en el año 1682 trasladarse a Versalles, para ello necesitó 4 carruajes. En el primero llevó un quinto de su equipaje, en el segundo un cuarto del resto, en el tercero, dos tercios del nuevo resto, y en el cuarto concluyó con 750 Kg. ¿Cuál era el peso total de su equipaje? (1,5 puntos)

Si en el primer carruaje llevó 1/5 de su equipaje, le quedaban aún 4/5, si en el segundo llevó ¼ de 4/5, entonces llevó otro quinto, por lo que le quedaban 3/5, si en el tercero llevó 2/3 de 3/5, llevó dos quintos, así que entre los tres primeros carruajes ya llevaba 4/5 de su equipaje, quedándole aún 1/5.

Si en el cuarto llevaba 750 kg, esos 750 kg se correspondían con 1/5 del equipaje, por lo que el peso total de su equipaje era de 5·750=3.750 kg.

6.– Dado un intervalo de números reales y su complemento, ¿Quién es su unión? ¿Y su intersección? Justifica la respuesta y pon un ejemplo. (0,75 puntos)

Si tenemos un intervalo A=(a,b), el complemento de A, son todos los números x, que no pertenecen a A y se representa por A', A^C o por $\bar{A}$. Es decir el complemento de A es el intervalo (–∞,a]U[b,+∞).

Queda claro que la unión de un intervalo con su complemento es el todo el conjunto de los números reales $A\cup A'=\mathbb{R}$ y su intersección es vacía puesto que no tienen nada en común: $A\cap A'=\phi$

$$Si\ A=[-3,9) \quad\rightarrow\quad \bar{A}=(-\infty,-3)\cup[9,+\infty) \quad y \quad A\cup B=(-\infty,-3)\cup[-3,9)\cup[9,+\infty)=\mathbb{R}$$

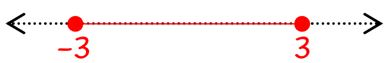
y su intersección es vacía al no tener ningún elemento en común.

$$A\cup\bar{A}=(-\infty,+\infty) \qquad\qquad A\cap\bar{A}=\phi$$

7.– Responde a cada uno de los apartados: (2,25 puntos)

a) Escribe en forma de intervalo y gráficamente el intervalo dado por la desigualdad $\{x\in\mathbb{R}/|x|\le 3\}$

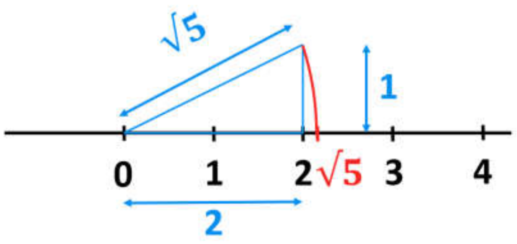
$$\{x\in\mathbb{R}/|x|\le 3\} \quad\rightarrow\quad [-3,3]$$



b) ¿Qué se puede decir de los números racionales y de los números irracionales en cuanto a su expresión decimal?

Pues que aunque ambos pueden tener infinitas cifras en su parte decimal, los racionales tienen siempre algo que se repite (periodo) mientras que los irracionales no. Además podemos encontrar números racionales sin parte decimal o con parte decimal finita.

c) Representa de manera exacta en la recta real el número $\sqrt{5}$.

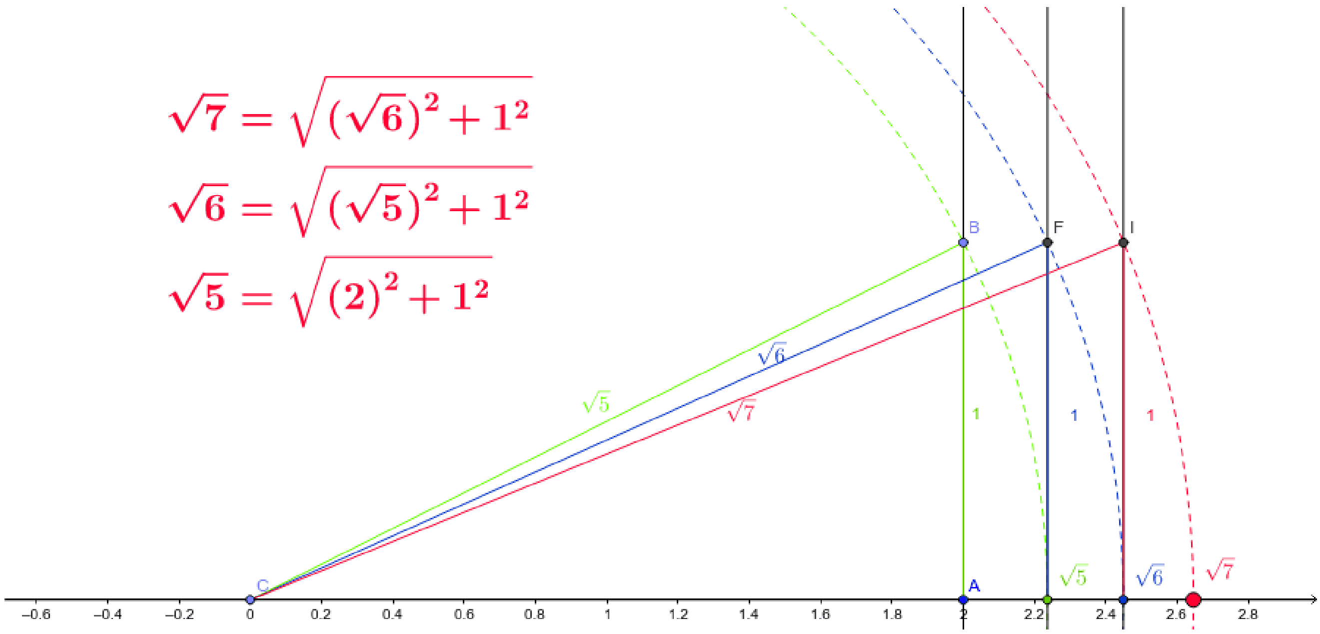


Si dibujamos sobre la recta real un triángulo rectángulo de base 2 y altura 1, y aplicamos el teorema de Pitágoras, obtendremos el valor de su hipotenusa:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

Y si con un compás pinchamos en el 0 y trazamos un arco desde la diagonal hasta la recta real, obtendremos sobre ella la medida $\sqrt{5}$ de forma exacta.

8.– ¿Serías capaz de explicarme cómo representarías de forma exacta el número $\sqrt{6}$?



De forma similar al ejercicio anterior y ayudándonos de la representación de $\sqrt{5}$,trazaremos otro triángulo rectángulo de base $\sqrt{5}$ y de altura 1, y procediendo de igual manera conseguiremos $\sqrt{6}$ en la recta real. Repitiendo el proceso podemos conseguir $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ ....

9.– Calcula paso a paso las siguientes operaciones combinadas:

a) $\left(4^3-4\cdot2^3\right):\sqrt[4]{3(-10)^2-2^2\cdot11}-(3+5):2^3=(64-4\cdot8):\sqrt[4]{3\cdot100-4\cdot11}-8:8=(64-32):\sqrt[4]{300-44}-1=$

$=32:\sqrt[4]{256}-1=32:4-1=8-1=7$

b) $\sqrt{-\frac{5}{9}+1\cdot\left(-2+\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}}=\sqrt{-\frac{5}{9}+\frac{9}{9}\cdot\left(-\frac{8}{4}+\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{4}{4}\right)\cdot(-2)^{2}}=\sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 4=$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)+3=-\frac{1}{2}+3=-\frac{1}{2}+\frac{6}{2}=\frac{5}{2}$$

10.– Un futbolista ha metido los 2/5 del número total de goles marcados por su equipo y otro la cuarta parte del resto. Si los demás jugadores han marcado 54 goles, ¿cuántos goles metió el equipo en toda la temporada? ¿Qué fracción del total de goles metió el segundo? ¿Y el resto de jugadores?

Si el primero mete 2/5 de los goles totales del equipo y el segundo ¼ del resto, el segundo ha metido ¼ de 3/5 que son 3/20 de los goles. Así que, entre los dos han metido 2/5+3/20=11/20 del total de goles. Por lo tanto, los otros jugadores habrán metido 9/20 del total de goles que se corresponden con 54 goles. Si llamamos x al total de goles metidos por el equipo, podemos escribir:

$$\frac{9}{20}\,de\ x=54 \quad\rightarrow\quad x=\frac{20\cdot 54}{9}=20\cdot 6=120\ goles$$

Así que el equipo metió 120 goles en toda la temporada y de ellos 3/20 los hizo el segundo y 9/20 el resto de los jugadores.

11.– ¿A qué redito se impuso un capital de 5.000 € que se transformó en 6.700 € en 6 años?

Se trata de un problema de interés compuesto cuyo capital final viene dado por la expresión: $C_f=C_o\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

Como nos piden el rendimiento o la tasa de interés nominal, tenemos que despejar **r** de la expresión anterior; como C_o está multiplicando pasa dividiendo:

$$C_f=C_o\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \quad\rightarrow\quad \frac{C_f}{C_o}=\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \quad\underset{(1)}{\rightarrow}\quad \sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}}=\sqrt[t]{\left(1+\frac{r}{100}\right)^t} \quad\rightarrow\quad \sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}}=1+\frac{r}{100}$$

Donde en (1) hemos aplicado la raíz de índice t a ambos lados de la igualdad para poder quitar la potencia t.

Hecho esto, ya es muy fácil despejar r:

$$\sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}}=1+\frac{r}{100} \quad\rightarrow\quad \sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}}-1=\frac{r}{100} \quad\rightarrow\quad \left(\sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}}-1\right)\cdot 100=r$$

Sustituyendo los datos del problema:

$$r=100\cdot\left(\sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}}-1\right) \quad\rightarrow\quad r=100\left(\sqrt[6]{\frac{6700}{5000}}-1\right)=100\left(\sqrt[6]{\frac{67}{50}}-1\right)=4,99875$$

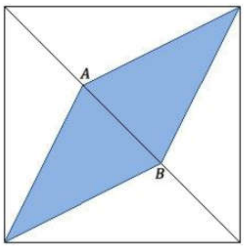
Por lo que el rédito fue del 5 %.

12.– Calcula aplicando las propiedades de las potencias: $\left[\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-3)^2\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2}{2\cdot 3^6-\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}}\right]^{-3}$

Para calcularlo voy a expresarlo todo en potencias de base 3 y utilizar las propiedades de las potencias para operar:

$$\left[\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-3)^2\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2}{2\cdot3^6-\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}}\right]^{-3} = \left[\frac{3^{-2}\cdot3^2\cdot\left[(3)^3\right]^2}{2\cdot3^6-3^6}\right]^{-3} = \left[\frac{3^{-2}\cdot3^2\cdot3^6}{3^6(2-1)}\right]^{-3} = \left[\frac{3^{-2+2+6}}{3^6\cdot1}\right]^{-3} = \left[\frac{3^6}{3^6}\right]^{-3} = 1^{-3} = 1$$

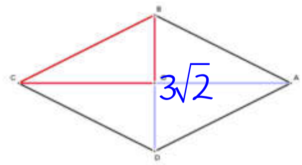
13.– Los puntos A y B dividen la diagonal del cuadrado en tres partes iguales. Si el área del cuadrado es 81 cm², ¿cuánto medirá el lado del rombo? Da el valor exacto. (1,5 puntos)



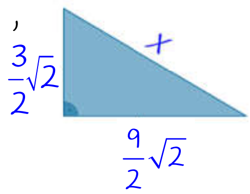
Si el área del cuadrado es de 81 cm², su lado será: $l=\sqrt{81}=9\ cm$, y aplicando el Teorema de Pitágoras calculamos la longitud de la diagonal:

$$a^2=b^2+c^2 \quad\rightarrow\quad d^2=2l^2 \quad\rightarrow\quad d=\sqrt{2\cdot l^2}=\sqrt{2\cdot9^2}=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$$

Como dice que los puntos A y B dividen a la diagonal en tres partes iguales, cada una de esas partes medirá $\frac{1}{3}\cdot9\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ cm, por tanto, ya tenemos la medida de la diagonal menor del rombo.



Si nos fijamos solo en uno de los 4 triángulos rectángulos que forman el rombo podemos observar que un cateto mide la mitad de lo que mide cada parte, $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ y el otro la mitad de lo que mide la diagonal, $\frac{9}{2}\sqrt{2}$, así que, con estos datos y aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras llegamos a:



$$x^2=b^2+c^2 \quad\rightarrow\quad x=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{81}{2}}=\sqrt{\frac{90}{2}}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}\ cm$$

Por tanto, el lado del rombo mide $3\sqrt{5}$ cm

14.– Calcula el valor de la siguiente expresión: $\dfrac{\left[\left(4\sqrt{50}-3\sqrt{72}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}}=$

Antes de operar, vamos a extraer de los radicales todos los factores que se pueda:

$$\frac{\left[\left(4\sqrt{50}-3\sqrt{72}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}}=\frac{\left[\left(4\cdot5\sqrt{2}-3\cdot2\cdot3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$$

Hecho esto, agrupamos y multiplicamos:

$$\frac{\left[\left(4\cdot5\sqrt{2}-3\cdot2\cdot3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\frac{\left[\left(20\sqrt{2}-18\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\frac{\left[\left(2\sqrt{2}\right)\cdot\left(5\sqrt{2}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=$$

Simplificando llegamos a:

$$\frac{\cancel{2}\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{5\sqrt{2\cdot2\cdot2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{5\cdot2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

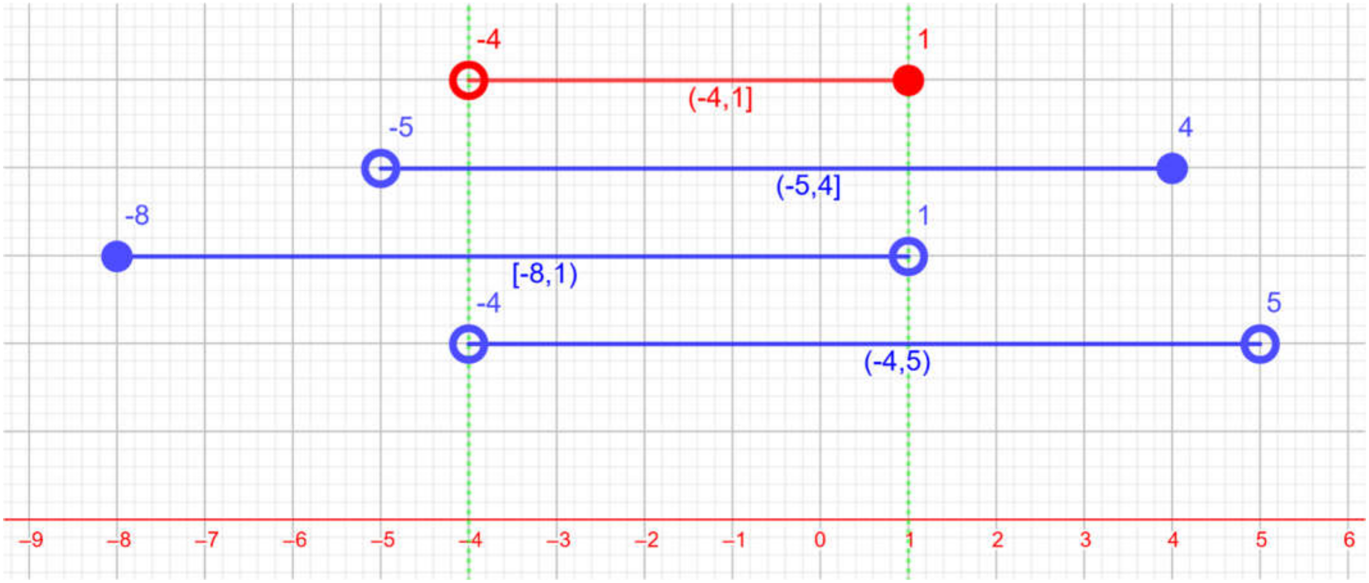
Como en el denominador hay una suma de raíces, tenemos que racionalizar multiplicando arriba y abajo por el conjugado del denominador:

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{10\sqrt{6}-10\sqrt{4}}{3-2}=\frac{10\sqrt{6}-10\cdot2}{1}=10\left(\sqrt{6}-2\right)$$

Así que el resultado es: $10\left(\sqrt{6}-2\right)$

15.- Escribe tres intervalos A, B y C cuya intersección sea el intervalo $D:\{x\in\mathbb{R}\,/\,-4<x\leq 1\}$

La respuesta es abierta y tiene muchísimas soluciones, voy a dibujar una de ellas:



He dibujado los intervalos A=(−5,4]; B=[−8,1) y C=(−4,5) y vemos gráficamente que la intersección de todos ellos da como resultado el intervalo D=(−4,1]

$$A\cap B\cap C=D$$

16.- Calcula el valor de los números **a**, **b**, **c** y **d** en la siguiente igualdad, utilizando todas las propiedades que conozcas:

$$9^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{6^3}}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{c}{d}}$$

Escribimos todo en forma de potencia:

$$9^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{6^3}}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}}=\left(3^2\right)^{\frac{3}{4}}\cdot 6^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{-\frac{3}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}\cdot 3^{\frac{6}{4}-\frac{3}{4}-\frac{2}{4}}=$$

$$=2^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}=\frac{3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\quad\rightarrow\quad\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{c}{d}}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}a=3\\ b=2\\ c=1\\ d=4\end{cases}$$

Así que, a=3, b=2, c=1 y d=4

17.- Calcula paso a paso las siguientes operaciones utilizando las propiedades que sean necesarias: (3 puntos)

$$a)\ \left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{9}{8}-\frac{5}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{6}{4}-\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{9}{8}-\frac{10}{8}\right)^{-2}=\left(-\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}=-2^{-6}\cdot 2^{6}=-2^{0}=-1$$

$$b)\ 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2-\frac{3}{4}}}=1+\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{8}{4}-\frac{3}{4}}}=1+\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{5}{4}}}=1+\frac{1}{1-\frac{4}{5}}=1+\frac{1}{\frac{5}{5}-\frac{4}{5}}=1+\frac{1}{\frac{1}{5}}=1+5=6$$

c) $\dfrac{\left[\left(2^2\right)^3\cdot 4^6\right]:8^3}{16^2}-\dfrac{3\cdot 3^2}{3^{-4}}=\dfrac{\left[\left(2^2\right)^3\cdot\left(2^2\right)^6\right]:\left(2^3\right)^3}{\left(2^4\right)^2}-\dfrac{3^3}{3^{-4}}=\dfrac{\left[2^6\cdot 2^{12}\right]:2^9}{2^8}-3^7=2-3^7=2-2187=-2185$

d) $\sqrt{48}-2\sqrt{12}+4\sqrt{27}-3\sqrt{75}=4\sqrt{3}-2\cdot 2\sqrt{3}+4\cdot 3\sqrt{3}-3\cdot 5\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}-4\sqrt{3}+12\sqrt{3}-15\sqrt{3}=-3\sqrt{3}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{81x^3\cdot y^5}\cdot\sqrt{3x^3\cdot y^5}}{\sqrt{27x^5\cdot y^7}}=\dfrac{\sqrt[3]{3^4\cdot x^3\cdot y^5}\cdot\sqrt{3x^3\cdot y^5}}{\sqrt{3^3\cdot x^5\cdot y^7}}=\dfrac{3\cdot x\cdot y\cdot\sqrt[3]{3\cdot y^2}\cdot x\cdot y^2\cdot\cancel{\sqrt{3\cdot x\cdot y}}}{3\cdot x^2\cdot y^3\cdot\cancel{\sqrt{3\cdot x\cdot y}}}=\dfrac{3\cdot\cancel{x^2}\cdot\cancel{y^3}\cdot\sqrt[3]{3\cdot y^2}}{3\cdot\cancel{x^2}\cdot\cancel{y^3}}=\sqrt[3]{3y^2}$

f) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4-3}=2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}$

18.- Una entrada al cine Kinépolis de Granada cuesta normalmente 8,50 €, pero por ser estudiante me aplican un descuento del 20 %. Como además el miércoles es el día del espectador, me aplican un descuento adicional del 30 %. ¿Cuánto me costarán las entradas mía y de mi madre si este miércoles quiero invitarla a ver la película *Los Constructores de la Alhambra*? (1,5 puntos)

Si me descuentan el 20% y después el 30%, en total me descuentan 0,8·0,7=0,56 el 44%, así que por mi entrada pagaré:

$$Yo:\ C_f=C_o\cdot I_v=8{,}50\cdot 0{,}56=4{,}76\ €$$

Por la de mi madre, como no es estudiante solo me descuentan el 30% por ser el día del espectador, así que me costará:

$$Mom:\ C_f=C_o\cdot I_v=8{,}50\cdot 0{,}7=5{,}95\ €$$

Por tanto, las dos entradas me costarán: 5,95 + 4,76 = 10,71 €

19.- Resuelve paso a paso: (1 punto)

a) $\log\left(x^2+15\right)=\log(x+3)+\log x \rightarrow \log\left(x^2+15\right)=\log\left[x\cdot(x+3)\right] \rightarrow x^2+15=x^2+3x \rightarrow$

$\rightarrow 3x=15 \rightarrow x=\dfrac{15}{3} \rightarrow x=5$ Que si comprobamos, vemos que no da problemas

b) $10^{3-x}=0{,}1 \rightarrow 10^{3-x}=10^{-1} \rightarrow 3-x=-1 \rightarrow x=4$

20.- Sea Considera los siguientes polinomios: (1,5 puntos)

$P(x)=3x^4-6x^3+4x-2 \qquad Q(x)=x^3-2x^2-3x+1 \qquad R(x)=2x^2+4x-5 \qquad S(x)=x^2+1$

Calcula:

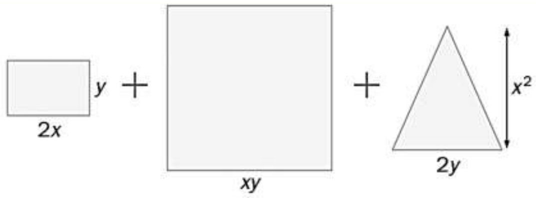
a) $3\cdot P(x)-2\cdot Q(x)+R(x)=3\cdot\left(3x^4-6x^3+4x-2\right)-2\cdot\left(x^3-2x^2-3x+1\right)+2x^2+4x-5=9x^4-18x^3+12x-6-$
$-2x^3+4x^2+6x-2+2x^2+4x-5=9x^4-20x^3+6x^2+22x-13$

b) $P(x)\cdot Q(x)-3\cdot S(X)=\left(3x^4-6x^3+4x-2\right)\cdot\left(x^3-2x^2-3x+1\right)-3\left(x^2+1\right)=3x^7-6x^6-9x^5+3x^4-6x^6+12x^5+$
$+18x^4-6x^3+4x^4-8x^3-12x^2+4x-2x^3+4x^2+6x-2-3x^2-3=3x^7-12x^6+3x^5+25x^4-16x^3-11x^2+10x-5$

c) $P(x):S(x)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -6x^3 & +0x^2 & +4x & -2 & x^2+1 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2-6x-3 \\ \cline{1-5}
0 & -6x^3 & -3x^2 & +4x & & \\
 & +6x^3 & & +6x & & \\ \cline{1-5}
 & 0 & -3x^2 & +10x & -2 & \\
 & & & +6x & & \\ \cline{1-5}
 & & -3x^2 & +10x & -2 & \\
 & & +3x^2 & & +3 & \\ \cline{1-5}
 & & 0 & +10x & +1 &
\end{array}
\rightarrow \begin{cases} C(x)=3x^2-6x-3 \\ R(x)=10x+1 \end{cases}
$$

21.– Expresa en forma de producto la suma de las áreas de estas 3 figuras: (1 punto)



Calculamos el área de cada una de las figuras:

Rectángulo: $A=2x\cdot y=2xy$ Cuadrado: $A=(xy)^2=x^2\cdot y^2$ Triángulo: $A=\dfrac{2y\cdot x^2}{2}=y\cdot x^2$

El área total, será la suma de todas ellas y para expresarlo en forma de producto simplemente sacamos factor común lo que se repita en cada una de ellas:

$$A_{Total}=2\cdot x\cdot y+x^2\cdot y^2+y\cdot x^2=x\cdot y\cdot(2+xy+x)$$

22.– Mi abuela María coloca 7.500 € al 4,75% anual y los mantiene en el banco durante diez años, retirando anualmente los beneficios obtenidos. Mi abuela Elvira coloca la misma cantidad, al mismo interés y durante el mismo tiempo, pero da orden de que los beneficios se sumen cada año al capital. ¿Cuál es la diferencia entre los beneficios de cada una de mis abuelas? (1,5 puntos)

Si mi abuela María saca anualmente los intereses, se trata de un interés bancario simple, por tanto:

$$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}=\frac{7500\cdot 4{,}75\cdot 10}{100}=3.562{,}50\ €$$

Por el contrario, mi Abuela Elvira como no saca los beneficios se trataría de un interés compuesto:

$$C_f=C_o\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t=7500\cdot\left(1+\frac{4{,}75}{100}\right)^{10}=11.928{,}93\ €$$

Así que los intereses serían:

$$I=C_f-C_o=11.928{,}93-7500=4.428{,}93\ €$$

La diferencia de los beneficios entre mis dos abuelas es:

$$\Delta_{Beneficios}=4.428{,}93-3.562{,}50=866{,}43\ €$$

Así que mi abuela Elvira ha obtenido casi 867 € más que mi abuela María.

23.- Simplifica la siguiente fracción algebraica: (1 punto) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+x}$

Para simplificar fracciones utilizaremos las identidades notables, sacaremos factor común o haremos Ruffini cuando sea necesario, aunque en este caso no es necesario porque el numerador es una de las nuevas identidades notables (a+b)³:

$$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{(x+1)^3}{x\left(x^2+2x+1\right)}=\frac{(x+1)^3}{x(x+1)^2}=\frac{x+1}{x}$$

24.- Una aproximación del número irracional $\sqrt{2}$ es la fracción $17/12$. ¿Podemos afirmar que es una buena aproximación? Para responder, ayúdate con el error relativo cometido en dicha aproximación.

Para saber si es una buena aproximación hemos de calcular el error relativo cometido, para ello antes hemos de calcular el error absoluto:

$$E_A=\left|V_R-V_{ap}\right|=\left|\sqrt{2}-\frac{17}{12}\right|=2{,}453\cdot 10^{-3}$$

El error absoluto en porcentaje viene dado por:

$$E_r=\frac{E_A}{V_R}\cdot 100=\frac{2{,}453\cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}}\cdot 100=0{,}17\ \%$$

Por tanto, podemos afirmar que la aproximación $\frac{17}{12}$ es una buena aproximación de $\sqrt{2}$

25.- Paloma ha hecho una inversión al 9,8% simple anual por la que espera conseguir en 3 años unos intereses de 676,20 €

a) ¿Cuánto dinero ha invertido Paloma?

Según los datos del problema se trata de un ejercicio de interés simple en el que: $\begin{cases} I=676{,}20€ \\ r=9{,}8\% \\ t=3\ \text{años} \end{cases}$

Sabemos que el interés simple viene dado por: $I=\dfrac{C\cdot r\cdot t}{100}$, como nos piden el Capital inicial, basta con despejarlo de la ecuación:

$$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\quad\rightarrow\quad C=\frac{100\cdot I}{r\cdot t}=\frac{100\cdot 676{,}20}{9{,}8\cdot 3}=\frac{67.620}{29{,}4}=2.300\ €$$

Por tanto, Paloma invirtió 2.300 €.

b) ¿Cuánto hubiera obtenido si la inversión hubiera sido al mismo interés pero compuesto?

Si la inversión hubiera sido a interés compuesto, el capital vendría dado por la expresión: $C_f=C_o\cdot\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^t$

Si sustituimos por los datos del problema: $\begin{cases} C_o=2.300€ \\ r=9{,}8\% \\ t=3\ \text{años} \end{cases}$ llegamos a:

$$C_f = C_o \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 2.300 \cdot \left(1+\frac{9,8}{100}\right)^3 = 3044,63\ €$$

Si la inversión hubiera sido a interés compuesto, los intereses serian de: 3.044-2.300=744,63 €.
Lo que implica que hubiera ganado 68,43 € más.

26.- Se depositan 15.000 € en un banco al 2,5% anual. Al acabar el año se saca todo el dinero, se añaden 10.000 € y se deposita todo en otro banco al 4% durante dos años más. ¿Cuánto dinero habrá al final?

En el primer banco, el capital final lo podemos calcular utilizando cualquiera de los dos métodos; por interés simple, como por interés compuesto:

- Por interés simple:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{15.000 \cdot 2,5 \cdot 1}{100} = 375\ € \quad \text{Y el capital final } C_f = C_o + I = 15.000 + 375 = 15.375\ €$$

- Por interés compuesto:

$$C_f = C_o \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 15.000 \cdot \left(1+\frac{2,5}{100}\right)^1 = 15.000 \cdot 1,025 = 15.375\ €$$

Para calcular el capital final obtenido en el segundo banco lo haremos aplicando interés compuesto al resultado obtenido de la primera parte más 10.000 €:

$$C_f = C_o \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 25.375 \cdot \left(1+\frac{4}{100}\right)^2 = 27.445,60\ € \quad \text{en la que hemos utilizado } \begin{cases} C_o = 25.375\ € \\ r = 4\ \% \\ t = 2\ años \end{cases}$$

Por tanto, al final obtendrá un capital de 27.445,60 €

27.- Ernesto abrió un depósito al 8,4 % anual con el dinero de un premio de lotería con el que no contaba. Después de 5 años, para pagar la entrada de un coche nuevo, cancela el depósito y retira la cantidad de 5.281,35 €.

a) ¿De cuánto dinero fue el premio si los intereses se pagaron semestralmente?

Estamos de nuevo ante un ejercicio de interés compuesto porque dice que lo retira a los 5 años, pero como los intereses se pagan semestralmente hemos de tener en cuenta que:

$$\begin{cases} C_f = 5.281,35\ € \\ r = 8,4\ \%\ anual \quad \rightarrow \quad r = 4,2\%\ semestral \\ t = 5\ años \quad \rightarrow \quad t = 5 \cdot 2 = 10\ semestres \end{cases}$$

Como lo que nos piden es el capital inicial, primero lo despejamos y luego lo calculamos:

$$C_f = C_o \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \quad \rightarrow \quad C_o = \frac{C_f}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^t} = \frac{5.281,35}{\left(1+\frac{4,2}{100}\right)^{10}} = \frac{5.281,35}{(1,042)^{10}} = 3.500\ €$$

Por tanto, el premio de la lotería fue de 3.500 €.

b) ¿Qué intereses ha obtenido con la inversión?

Los intereses vienen dados por la diferencia entre el capital final y el inicial:

$$C_f = C_o + I \quad \rightarrow \quad I = C_f - C_o = 5.281,35 - 3.500 = 1.781,35\ €$$

Los intereses fueron de 1.781,35 €

28.- ¿A qué redito se impuso un capital de 5.000 € que se transformó en 5.858,30 € en 8 años?

Volvemos a afrontar un ejercicio de **interés compuesto**, puesto que los intereses se recuperan al final.

Así que tenemos que despejar el rendimiento de la expresión $C_f = C_o \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t$

$$C_f = C_o \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow \frac{C_f}{C_o} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow \sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}} = \sqrt[t]{\left(1+\frac{r}{100}\right)^t} \rightarrow$$

$$\sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}} = \left(1+\frac{r}{100}\right) \rightarrow \sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}} - 1 = \frac{r}{100} \rightarrow r = 100\left(\sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}} - 1\right)$$

Y sustituyendo:

$$r = 100\left(\sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}} - 1\right) = 100\left(\sqrt[8]{\frac{5.858,30}{5.000}} - 1\right) = 2\ \%$$

Así que, el rédito o la tasa de interés fue del 2%.

29.- Simplificad este radical sacando todos los factores que podáis: (1,5 puntos) $\sqrt[6]{\left(\frac{\left(10x^{-3}yz\right)^{-4}}{\left(5xy^{-2}z\right)^{-2}}\right)^{-2}} =$

$$\sqrt[6]{\left(\frac{\left(10x^{-3}yz\right)^{-4}}{\left(5xy^{-2}z\right)^{-2}}\right)^{-2}} = \sqrt[6]{\frac{\left(10x^{-3}yz\right)^{8}}{\left(5xy^{-2}z\right)^{4}}} = \sqrt[6]{\frac{2^8 \cdot 5^8 \cdot x^{-24} \cdot y^8 \cdot z^8}{5^4 \cdot x^4 \cdot y^{-8} \cdot z^4}} \underset{\text{Movemos arriba o abajo los factores con exponente negativo y agrupamos los que se repiten}}{=} \sqrt[6]{\frac{2^8 \cdot 5^{8-4} \cdot y^{8+8} \cdot z^{8-4}}{x^{24+4}}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{2^8 \cdot 5^4 \cdot y^{16} \cdot z^4}{x^{28}}} \underset{\text{Sacamos los factores que se puedan}}{=} \frac{2 \cdot y^2}{x^4}\sqrt[6]{\frac{2^2 \cdot 5^4 \cdot y^4 \cdot z^4}{x^4}} \underset{\text{Simplificamos los exponentes y el índice}}{=} \frac{2 \cdot y^2}{x^4}\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 5^2 \cdot y^2 \cdot z^2}{x^2}} = \frac{2 \cdot y^2}{x^4}\sqrt[3]{\frac{50 \cdot y^2 \cdot z^2}{x^2}}$$

30.- Racionalizad: (1,5 puntos)

a) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2 \cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{64}} = \dfrac{4}{\sqrt[5]{2^6}} = \dfrac{4}{2\sqrt[5]{2}} = \dfrac{2}{\sqrt[5]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^5}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{2} = \sqrt[5]{2^4}$

c) $\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}+3\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \dfrac{10\sqrt{6}-30\sqrt{4}}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{10\sqrt{6}-30\sqrt{4}}{3-18} = \dfrac{10\sqrt{6}-60}{-15} = 4 - \dfrac{2}{3}\sqrt{6}$

31.– Operad utilizando las propiedades de los radicales y simplificad el resultado. (1,5 puntos)

a) $\dfrac{\left(\sqrt{27}\right)^3\cdot\sqrt{\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{81}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3}=\dfrac{\left(\sqrt{3^3}\right)^3\cdot\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[3]{3^4}\cdot\sqrt{3^3}}\underset{\substack{\text{Operamos y sacamos}\\ \text{de las raíces todo lo}\\ \text{que se pueda}}}{=}\dfrac{\sqrt{3^9}\cdot\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}\cdot3\sqrt{3}}=\dfrac{3^4\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot\cancel{\sqrt[3]{3}}}{3^2\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot\cancel{\sqrt[3]{3}}}=3^2=9$

b) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{8x^2y}{z}}:\sqrt[3]{\dfrac{16xy^2}{z}}}{\sqrt{\dfrac{16xy^2}{z}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{8x^2y}{z}}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{2y}{x}}\underset{\substack{\text{Operamos y juntamos}\\ \text{los radicales}}}{=}\dfrac{\sqrt[6]{\left(\dfrac{8x^2y}{z}\right)^3:\left(\dfrac{16xy^2}{z}\right)^2}}{\sqrt[6]{\left(\dfrac{16xy^2}{z}\right)^3\cdot\left(\dfrac{8x^2y}{z}\right)^2}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{2y}{x}}\underset{\substack{\text{Operamos}\\ \text{y juntamos}\\ \text{en un solo radical}}}{=}\sqrt[6]{\dfrac{\dfrac{8x^2y}{z}}{\left(\dfrac{16xy^2}{z}\right)^5}\cdot\dfrac{2y}{x}}=$

$\underset{\text{Simplificamos}}{=}\sqrt[6]{\dfrac{\dfrac{16xy^2}{z}}{\left(\dfrac{16xy^2}{z}\right)^5}}=\sqrt[6]{\dfrac{1}{\left(\dfrac{16xy^2}{z}\right)^4}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\left(\dfrac{16xy^2}{z}\right)^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{z^2}{16^2\cdot x^2\cdot y^4}}=\sqrt[3]{\dfrac{z^2}{\left(2^4\right)^2\cdot x^2\cdot y^4}}=\sqrt[3]{\dfrac{z^2}{2^8\cdot x^2\cdot y^4}}=$

$=\dfrac{1}{4y}\sqrt[3]{\dfrac{z^2}{2^2\cdot x^2\cdot y}}=\dfrac{1}{4y}\sqrt[3]{\dfrac{z^2}{4\cdot x^2\cdot y}}$

32.– Calculad: (1,5 puntos)

a) $5\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{128}+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{54}-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{250}\underset{\substack{\text{Descomponemos}\\ \text{en factores}\\ \text{primos}}}{=}5\sqrt[3]{2^4}-3\sqrt[3]{2^7}+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{2\cdot3^3}-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{2\cdot5^3}=\underset{\substack{\text{Sacamos lo}\\ \text{que se pueda}}}{=}$

$=5\cdot2\sqrt[3]{2}-3\cdot2^2\sqrt[3]{2}+\dfrac{4}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}\sqrt[3]{2}-\dfrac{3}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5}\sqrt[3]{2}=\underset{\text{Operamos}}{=}10\sqrt[3]{2}-12\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}\underset{\text{y agrupamos}}{=}=-\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{75}-\dfrac{\sqrt{18}}{3}+\dfrac{3\sqrt{12}}{4}-\sqrt{8,\overline{3}}=\underset{\substack{\text{Descomponemos}\\ \text{en factores}\\ \text{primos}}}{=}\sqrt{3\cdot5^2}-\dfrac{\sqrt{2\cdot3^2}}{3}+\dfrac{3\sqrt{2^2\cdot3}}{4}-\sqrt{\dfrac{5^2}{3}}=\underset{\substack{\text{Sacamos lo}\\ \text{que se pueda}}}{=}$

$=5\sqrt{3}-\dfrac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{3}}+\dfrac{3\cdot\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{4}\cdot2}-5\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\underset{\substack{\text{Operamos y}\\ \text{racionalizamos}\\ \text{el último}}}{=}5\sqrt{3}-\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}-\dfrac{5}{3}\sqrt{3}=\underset{\text{y agrupamos}}{=}=\dfrac{29}{6}\sqrt{3}-\sqrt{2}$

33.– Sabiendo que $\log a=\dfrac{3}{5}$ y que $\log b=-\dfrac{3}{2}$, calculad el valor de estos logaritmos: (2 puntos)

a) $\log\left[\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt{10\cdot a^5}\right]\underset{\substack{\text{El logaritmo del}\\ \text{producto es la}\\ \text{suma de logarimos}}}{=}\log\left[\sqrt[3]{b}\right]+\log\left[\sqrt{10}\right]+\log\left[\sqrt{a^5}\right]\underset{\substack{\text{Escribimos}\\ \text{en forma de}\\ \text{potencia}}}{=}\log\left[b^{\frac{1}{3}}\right]+\log\left[10^{\frac{1}{2}}\right]+\log\left[a^{\frac{5}{2}}\right]$

$\underset{\substack{\text{En el logaritmo de una}\\ \text{potencia, el exponente}\\ \text{pasa delante}}}{=}\dfrac{1}{3}\log[b]+\dfrac{1}{2}\log[10]+\dfrac{5}{2}\log[a]\underset{\substack{\text{Sustituimos}\\ \text{cada uno}\\ \text{por su valor}}}{=}\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{2}1+\dfrac{5}{2}\dfrac{3}{5}\underset{\text{Operamos}}{=}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

$b)\ \log_b \dfrac{10^3}{a^5\cdot b^3} \underset{\text{El logaritmo del cociente es la resta de logarimos}}{=} \log_b\left[10^3\right]-\log_b\left[a^5\right]-\log_b\left[b^3\right] \underset{\text{En el logaritmo de una potencia, el exponente pasa delante}}{=} 3\log_b[10]-5\log_b[a]-3\cancel{\log_b[b]}$

$=3\log_b[10]-5\log_b[a]-3 \underset{\text{Cambiamos a base decimal}}{=} 3\cdot\dfrac{\log[10]}{\log[b]}-5\cdot\dfrac{\log[a]}{\log[b]}-3= \underset{\text{Sustituimos cada uno por su valor}}{=} 3\cdot\dfrac{1}{-\frac{3}{2}}-5\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{3}{2}}-3=-3$

34.- Calculad el valor de x en las siguientes expresiones exponenciales y/o logarítmicas: (2 puntos)

$a)\ 2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}=960 \xrightarrow[\text{Aplicamos propiedades de potencias}]{} \dfrac{2^x}{2}+\dfrac{2^x}{2^2}+\dfrac{2^x}{2^3}+\dfrac{2^x}{2^4}=960 \xrightarrow[\text{Sacamos factor común}]{} 2^x\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}\right)=960$

$\xrightarrow[\text{Operamos}]{} 2^x\left(\dfrac{15}{16}\right)=960 \xrightarrow[\text{Despejamos}]{} 2^x=960\left(\dfrac{16}{15}\right)=1024 \xrightarrow[\text{Factorizamos}]{} 2^x=2^{10} \xrightarrow[\text{Resolvemos}]{} x=10$

$b)\ \log(3x-1)-\log(2x+3)=1-\log(25) \rightarrow \log(3x-1)-\log(2x+3)=\underbrace{\log(10)}_{\text{Escribimos como logaritmo}}-\log(25)$

$\xrightarrow[\text{La diferencia de logaritmos es el logaritmo del cociente}]{} \log\left(\dfrac{3x-1}{2x+3}\right)=\log\left(\dfrac{10}{25}\right) \xrightarrow[\text{Dos logaritmos son iguales si sus argumentos también lo son sus argumentos}]{} \dfrac{3x-1}{2x+3}=\dfrac{10}{25} \rightarrow \dfrac{3x-1}{2x+3}=\dfrac{2}{5} \xrightarrow[\text{Multiplicamos en cruz}]{}$

$5(3x-1)=2(2x+3) \rightarrow 15x-5=4x+6 \xrightarrow[\text{Agrupamos}]{} 15x-4x=6+5 \rightarrow 11x=11 \xrightarrow[\text{Despejamos}]{}$

$x=1$ Que verificamos viendo que los logaritmos son todos positivos y mayores que 0.

35.- Resolved la siguiente ecuación logarítmica: (Bonus) $\log_3\sqrt{x}-3\cdot\log_3 x+4\cdot\log_3 x^2=2$

$\log_3\sqrt{x}-3\cdot\log_3 x+4\cdot\log_3 x^2=2 \xrightarrow[\text{El n° que multiplica entra como potencia del argumento}]{} \log_3\sqrt{x}-\log_3 x^3+\log_3\left(x^2\right)^4=2 \xrightarrow[\text{La suma y resta de logaritmos son productos y cocientes}]{}$

$\log_3\left(\dfrac{x^8\cdot\sqrt{x}}{x^3}\right)=\log_3\left(3^2\right) \xrightarrow[\text{Dos logaritmos son iguales si sus argumentos también lo son sus argumentos}]{} \dfrac{x^8\cdot\sqrt{x}}{x^3}=3^2 \xrightarrow[\text{Operamos}]{} x^{\frac{11}{2}}=3^2 \xrightarrow[\text{Elevamos a 2/11}]{} \left(x^{\frac{11}{2}}\right)^{\frac{2}{11}}=\left(3^2\right)^{\frac{2}{11}} \rightarrow$

$x^{\frac{22}{22}}=3^{\frac{4}{11}} \rightarrow x=\sqrt[11]{3^4} \rightarrow x=\sqrt[11]{81}$

36.- Calcula paso a paso las siguientes operaciones utilizando las propiedades que sean necesarias:

$a)\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{1}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2$

$b)\ \dfrac{2^5\cdot 27^2\cdot 4^{-1}\cdot 8^{-3}}{2^{-3}\cdot 16\cdot 81}=\dfrac{2^5\cdot 3^6\cdot 2^{-2}\cdot 2^{-9}}{2^{-3}\cdot 2^4\cdot 3^4}=\dfrac{2^{-6}\cdot 3^6}{2\cdot 3^4}=\dfrac{3^2}{2^7}=\dfrac{9}{128}$

c) $\left(\sqrt{200}-\sqrt{75}+2\sqrt{27}+\sqrt{12}\right)^2=\left(10\sqrt{2}-5\sqrt{3}+6\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)^2=\left(10\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)^2=$

$\rightarrow \quad 200+27+60\sqrt{6}=227+60\sqrt{6}$

37.– En una determinada ciudad se reciclaron hace dos años 3.520 toneladas de vidrio. El año pasado, la cantidad reciclada disminuyó en un 7,3 %. Tras una serie de campañas de publicidad, este año se consiguió reciclar un 24,8 % más. ¿Cuánto vidrio se ha reciclado en este último año? ¿Cómo ha variado la cantidad de vidrio reciclado respecto del primer año? (1,5 puntos)

La cantidad de vidrio reciclada ha sufrido 2 variaciones, así que vamos a calcular el índice de variación de cada uno de ellos:

- Baja un 7,3 % $\rightarrow \quad I_v=1-\frac{\%}{100}=1-\frac{7,3}{100}=1-0,073=0,927$
- Sube un 24,8 % $\rightarrow \quad I_v=1+\frac{\%}{100}=1-\frac{24,8}{100}=1+0,248=1,248$

El índice de variación total de todas estas variaciones se calcula multiplicando cada uno de los índices de variación:

$$Iv_{Total}=Iv_1\cdot Iv_2=0,927\cdot 1,248=1,156896$$

Para calcular la cantidad de vidrio reciclado este año, multiplicamos la cantidad inicial por el índice de variación total:

$$C_f=C_o\cdot Iv_{Total}=3.520\cdot 1,156896=4.072,27\ Ton$$

Para calcular el porcentaje total aumentado en estos dos años, nos fijamos en el índice de variación total y como es mayor que 1 lo que se pasa de uno 0,156896 lo multiplicamos por 100 = 15,69 %.

Por tanto, la cantidad de vidrio reciclada este año es de casi 4.100 toneladas lo que supone un aumento con respecto a hace dos años de aproximadamente un 16 %.

38.– Resuelve paso a paso: (1 punto)

a) $\sqrt[3]{9^{3x-4}}=3^{1-x} \rightarrow \left(9^{3x-4}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{1-x} \rightarrow \left(\left(3^2\right)^{3x-4}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{1-x} \rightarrow 3^{\frac{6x-8}{3}}=3^{1-x}$

$\rightarrow \frac{6x-8}{3}=1-x \rightarrow 6x-8=3-3x \rightarrow 9x=11 \rightarrow x=\frac{11}{9}$

b) $\ln x-4\ln\sqrt{x}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)=7 \rightarrow \ln\left(\frac{x}{x^2\cdot x}\right)=7 \rightarrow \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=7 \rightarrow e^7=\frac{1}{x^2}$

$\rightarrow x^2=\frac{1}{e^7} \rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{e^7}}=\frac{1}{\sqrt{e^7}}=\frac{1}{e^3\sqrt{e}}\cdot\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e^3\cdot e} \rightarrow x=\frac{\sqrt{e}}{e^4}$

39.– Dados los siguientes polinomios: (1,5 puntos)

$P(x)=x^4-4x^2+12x-9 \qquad Q(x)=x^3-2x^2-3x+1 \qquad R(x)=2x^2+4x-5 \qquad S(x)=x^2-2x+3$

Calcula: a) $3\cdot P(x)-2\cdot Q(x)+R(x)$ b) $P(x)\cdot Q(x)-3\cdot S(X)$ c) $P(x):S(x)$

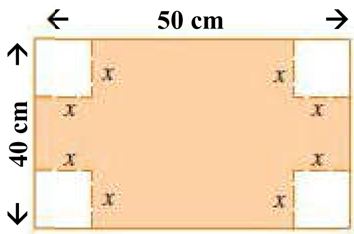
a) $3\cdot P(x)-2\cdot Q(x)+R(x)=3\left(x^4-4x^2+12x-9\right)-2\left(x^3-2x^2-3x+1\right)+2x^2+4x-5=3x^4-12x^2+36x$
$-27-2x^3+4x^2+6x-2+2x^2+4x-5=3x^4-2x^3-6x^2+46x-34$

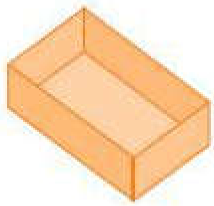
b) $P(x)\cdot Q(x)-3\cdot S(x)=\left(x^4-4x^2+12x-9\right)\cdot\left(x^3-2x^2-3x+1\right)-3\left(x^2-2x+3\right)=x^7-2x^6-3x^5+x^4$
$-4x^5+8x^4+12x^3-4x^2+12x^4-24x^3-36x^2+12x-9x^3+18x^2+27x-9-3x^2+6x-9=$
$=x^7-2x^6-7x^5+21x^4-21x^3-25x^2+45x-18$

c) $P(x):S(x)=\left(x^4-4x^2+12x-9\right):\left(x^2-2x+3\right)=x^2+2x-3$ $\qquad R(x)=0$

40.- Con una cartulina rectangular de 40 cm × 50 cm se quiere construir una caja sin tapa recortando cuatro cuadrados iguales en cada una de las esquinas. Escribe la expresión algebraica de la superficie de la caja en función del lado del cuadrado **x**. (1 punto)

Si llamamos x al lado de cada uno de los cuadrados que recortamos, su área será **A=x²** y como son 4 cuadrados, el área total será el área del rectángulo menos el área de los 4 cuadrados:





$$A=40\cdot 50-4x^2 \quad\rightarrow\quad A(x)=2000-4x^2$$

Así que, la expresión del área en función del lado del cuadrado es: A(x)= 2000−4x²

41.- Depositamos 32.500 € en un banco durante un año y medio y se convierten en 32.720 €. ¿Qué tanto por ciento mensual nos da el banco? (1,5 puntos)

Se trata de un ejercicio de **interés compuesto**, puesto que no se retiran los intereses en ningún momento, a excepción del final. Así que el capital final viene dado por:

$$C_f=C_o\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow \frac{C_f}{C_o}=\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow \sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}}=\sqrt[t]{\left(1+\frac{r}{100}\right)^t}=\left(1+\frac{r}{100}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}}-1=\frac{r}{100} \rightarrow r=100\cdot\left(\sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}}-1\right)$$

Y sustituyendo:

$$r=100\cdot\left(\sqrt[t]{\frac{C_f}{C_o}}-1\right)=100\cdot\left(\sqrt[18]{\frac{32.720}{32.500}}-1\right)=100(1{,}000374871-1)=100\cdot 0{,}000374871=0{,}037\%$$

El banco nos da un 0,037 % mensual, que equivale a un 0,45 % anual.

42.- Simplifica la siguiente fracción algebraica: (1 punto) $\dfrac{2x^3+10x^2+16x+8}{4x^3+8x^2-4x-8}$

Pasa simplificar, sacamos factor común arriba y a bajo lo que se repite y descomponemos en factores tanto numerador como denominador con la ayuda de Ruffini:

$$\frac{2x^3+10x^2+16x+8}{4x^3+8x^2-4x-8}=\frac{2\left(x^3+5x^2+8x+4\right)}{4\left(x^3+2x^2-x-2\right)}=\frac{\cancel{2}\,(x+2)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(x+1)}}{2\cdot\cancel{2}\,\cancel{(x+2)}\cdot\cancel{(x+1)}\cdot(x-1)}=\frac{x+2}{2x-2}$$

43.- Halla el valor de **k** para que el resto de la división $x^4+kx^3-kx+5 \quad \underline{|x-2}$ sea -3: (1 punto)

Como se trata de una división por un binomio de la forma x–a, podemos utilizar la regla de Ruffini:

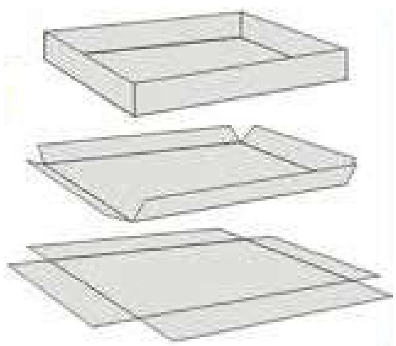
$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & k & 0 & -k & 5 \\ 2 & & 2 & 2k+4 & 4k+8 & 6k+16 \\ \hline & 1 & k+2 & 2k+4 & 3k+8 & \underline{|6k+21} \end{array}$$

Como dicen en el enunciado que el resto es igual a –3, igualaremos nuestro resto a –3 y despejaremos k:

$$6k+21=-3 \quad \rightarrow \quad 6k=-24 \quad \rightarrow \quad k=\frac{-24}{6} \quad \rightarrow \quad k=-4$$

Por tanto, k tiene que valer –4.

44.- Da la expresión algebraica del volumen da la caja del ejercicio 5.



Sabemos que el volumen se calcula multiplicando la superficie de la base por la altura.

$$V = Area_{Base} \cdot Altura = A \cdot h$$

La base ya no mide 40 x 50 puesto que le hemos restado **x** tanto al ancho como al largo, para poder doblarlo y formar a caja. Ahora medirá 40–2x y 50 –2x, así que:

$$V(x)=(40-2x)\cdot(50-2x)\cdot x = x\left(4x^2-180x+2000\right)=4x^3-180x^2+2000x$$

Por tanto, el volumen de la caja sin tapa es de: $V(x) = 4x^3 - 180x^2 + 2000x$

45.- Calcula paso a paso las siguientes operaciones combinadas: (2 puntos)

a) $\left[\sqrt{36}:3\left(3^2-5\right)+4^2\cdot\left(\sqrt{16}-2\right):2\right]:\left(16^2:\sqrt{16}\cdot 8^3\right)^0=\left[6:3\cdot(9-5)+16\cdot(4-2):2\right]:1=$
$=\left[2\cdot 4+16\cdot 2:2\right]=8+16=24$

b) $0{,}0\overset{\frown}{9}+\dfrac{1}{3+\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{2}}}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{3+\dfrac{2}{\dfrac{7}{2}}}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{3+\dfrac{4}{7}}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{\dfrac{25}{7}}=\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{25}=\dfrac{5}{50}+\dfrac{14}{50}=\dfrac{19}{50}$

46.- Un funcionario del estado ha tenido dos subidas de sueldo este año debido a la inflación, la primera del 2,5 % y la segunda del 0,5 %. Si su sueldo actual es de 1.854,23 €. ¿Cuál era su sueldo a principios de año?, Si el ministro de hacienda prometió un aumento del 3%, justifica razonadamente si les dijo la verdad o les mintió. (1 punto)

El salario del funcionario ha subido 2 veces a lo largo del último año, así que vamos a calcular el índice de variación de cada uno de los aumentos:

- Subida del 2,5% $\rightarrow$ $Iv_1 = 1 + \frac{\%}{100} = 1 + \frac{2,5}{100} = 1 + 0,025 = 1,025$
- Subida del 0,5 % $\rightarrow$ $Iv_2 = 1 + \frac{\%}{100} = 1 + \frac{0,5}{100} = 1 + 0,005 = 1,005$

El índice de variación total de estos dos aumentos se calcula multiplicando los índices de variación de cada uno de ellos:

$$Iv_{Total} = Iv_1 \cdot Iv_2 = 1,025 \cdot 1,005 = 1,030125$$

Para calcular el salario antes de ambas subidas nos ayudaremos de la expresión:

$$Cantidad_{final} = Cantidad_{inicial} \cdot Iv_{Total}$$

De la que despejaremos la cantidad inicial:

$$Cantidad_{inicial} = \frac{Cantidad_{final}}{Iv_{Total}} \quad \rightarrow \quad Cantidad_{inicial} = \frac{1.854,23}{1,030125} = 1.800\ €$$

Por lo que, su sueldo a principios de año era de 1.800 €

Puesto que el Iv_{Total}=1,030125, el aumento total del salario ha sido del 3,0125 %, por tanto, podemos decir que el ministro cumplió con su promesa, es más, les aumentó el precio un poquito más de lo que prometió. Cosa rara en un político.

El ministro cumplió con su palaba puesto que subió un poco más del 3% del salario.

47.– En una muestra de pacientes que están siendo tratados de una enfermedad pulmonar, se observa que los 2/5 son no fumadores. Del resto de pacientes, los 2/9 no tienen colesterol. Si los pacientes que son fumadores y tienen colesterol son 210, ¿cuántos pacientes son fumadores sin colesterol?, ¿cuántos pacientes son fumadores?, ¿de cuántos pacientes consta la muestra? (1,5 puntos)

Si nos ayudamos de unas llaves para representar los datos del problema, llevamos a:

$$\text{Pacientes} \begin{cases} \frac{2}{5}\ \text{No Fumadores} \\ \frac{3}{5}\ \text{Si Fumadores} \begin{cases} \frac{2}{9}\ \text{No Colesterol} \\ \frac{7}{9}\ \text{Si Colesterol} \quad \rightarrow \quad 210\ \text{Pacientes} \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto, como podemos observar en el cuadro anterior, 7/9 de los 3/5 de los pacientes son pacientes fumadores y con colesterol, y como nos dicen que estos son 210, con esto ya podemos calcular todo, empezando por el número de pacientes.

$$\frac{7}{9}\ de\ \frac{3}{5}\ \text{de los pacientes son 210 pacientes} \quad \rightarrow \quad \frac{7}{9}\frac{3}{5} = \frac{7}{15}$$

Si $\frac{7}{15}$ de los pacientes son 210, $\frac{1}{15}$ son 30 pacientes y $\frac{15}{15}$ son 30·15=450 pacientes.

El total de pacientes de la muestra es de 450 pacientes.

- Fumadores sin colesterol son: $\frac{2}{9} de \frac{3}{5}$ de 450 $\rightarrow$ $\frac{2}{9}\frac{3}{5}\cdot 450 = 60$ pacientes

- Fumadores son: $\frac{3}{5}$ de 450 $\rightarrow$ $\frac{3}{5}\cdot 450 = 270$ pacientes

Por tanto, la muestra es de 450 pacientes, de los cuales 270 son fumadores y de ellos 60 no tienen colesterol.

48.- Expresa en forma de intervalo los números que cumplen la expresión: $|x-4| \geq 1$ (1 punto)

Para ver que números cumplen la expresión, vamos a ir probando algunos de ellos:

$$
\begin{array}{llll}
Si\ x=8 & \rightarrow & |8-4|=|4|=4\geq 1 & \rightarrow \text{ funciona} \\
Si\ x=7 & \rightarrow & |7-4|=|3|=3\geq 1 & \rightarrow \text{ funciona} \\
Si\ x=6 & \rightarrow & |6-4|=|2|=2\geq 1 & \rightarrow \text{ funciona} \\
Si\ x=5 & \rightarrow & |5-4|=|1|=1\geq 1 & \rightarrow \text{ funciona} \\
Si\ x=4{,}9 & \rightarrow & |4{,}9-4|=|0{,}9|=0{,}9\geq 1 & \rightarrow \text{ No funciona} \\
Si\ x=4 & \rightarrow & |4-4|=|0|=0\geq 1 & \rightarrow \text{ No funciona} \\
Si\ x=3{,}1 & \rightarrow & |3{,}1-4|=|-0{,}9|=0{,}9\geq 1 & \rightarrow \text{ No funciona} \\
Si\ x=3 & \rightarrow & |3-4|=|-1|=1\geq 1 & \rightarrow \text{ funciona} \\
Si\ x=2 & \rightarrow & |2-4|=|-2|=2\geq 1 & \rightarrow \text{ funciona} \\
Si\ x=1 & \rightarrow & |1-4|=|-3|=3\geq 1 & \rightarrow \text{ funciona}
\end{array}
$$

Luego queda claro que funciona para números menores o iguales que 3 y para números mayores o iguales que 5.

Que se puede expresar de dos formas diferentes: $\mathbb{R}-(3,5)$ ó $(-\infty,3]\cup[5,+\infty)$

49.- Los números 2,5 y 2,6 son dos aproximaciones del valor n=18/7. (2 puntos)

a) Calcula el error absoluto en cada caso.
b) ¿Cuál de las dos aproximaciones está más próxima a n?
c) ¿Cuál de ellas ha sido por redondeo y cual por truncamiento?
d) ¿Qué aproximación es mejor?

a) El error absoluto, E_A, es la diferencia en valor absoluto entre el valor real y el valor aproximado, y viene dado por: $E_A = |V_{Real} - V_{Aprox}|$ $\rightarrow$

$$
\begin{cases}
\text{Para } 2{,}5 & \rightarrow \quad E_A = |V_{Real} - V_{Aprox}| = \left|\frac{18}{7} - \frac{5}{2}\right| = \frac{1}{14} \\
\text{Para } 2{,}6 & \rightarrow \quad E_A = |V_{Real} - V_{Aprox}| = \left|\frac{18}{7} - \frac{13}{5}\right| = \frac{1}{35}
\end{cases}
$$

b) Como sabemos de la teoría, el error absoluto indica cuánto nos alejamos del valor real, y se ve claramente que el error absoluto de 2,6 es menor que el de 2,5.

Aunque también se puede calcular el valor decimal de 18/7; $\frac{18}{7} = 2{,}\widehat{571428}$, y así queda claro que está más cercano de 2,6.

c) Pues esta respuesta es evidente, 2,5 es la aproximación por truncamiento mientras que 2,6 es la aproximación por redondeo.

d) Para saber qué aproximación era de mejor calidad, utilizábamos el error relativo, así que:

$$E_r = \frac{E_A}{V_R}\cdot 100 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Para } 2{,}5 & \rightarrow \quad E_r = \dfrac{E_A}{V_R}\cdot 100 = \dfrac{1/14}{18/7}\cdot 100 = 2.78\% \\ \text{Para } 2{,}6 & \rightarrow \quad E_A = \dfrac{E_A}{V_R}\cdot 100 = \dfrac{1/35}{18/7}\cdot 100 = 1{,}11\% \end{cases}$$

Queda claro que la aproximación de 2,6 es mucho mejor

50.- Se ha pedido un préstamo a devolver durante 6 años a una tasa de interés compuesto trimestral del 3%. Si al final de esos 6 años hemos abonado en total 13.500 euros. ¿De qué capital se pidió el préstamo? (1 punto)

Se trata de un problema de interés compuesto del que conocemos el capital final, el tiempo, el T.I.N. y en el que nos piden el capital inicial. Por tanto, basta con despejar el capital inicial de la fórmula del interés compuesto:

$$C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}}\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \quad \rightarrow \quad C_{\text{Inicial}} = \frac{C_{\text{Final}}}{\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^t}$$

El único problema que se nos presenta es que el TIN es del 3% trimestral y el tiempo es de 6 años, y como ya vimos en clase, ambas tenían que estar en las mismas unidades de tiempo, por tanto, expresaremos el tiempo en trimestres y todo irá bien.

$$6\ \cancel{\text{años}}\cdot\frac{4\ \text{trimestres}}{\cancel{\text{año}}} = 24\ \text{trimestres}$$

Por tanto:

$$C_{\text{Inicial}} = \frac{C_{\text{Final}}}{\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^t} = \frac{13.500}{\left(1+\dfrac{3}{100}\right)^{24}} = 6.641{,}11\ €$$

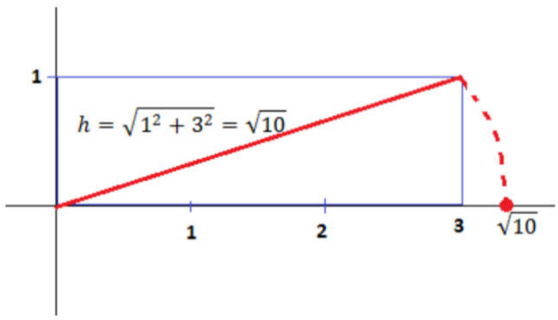
Por lo que el préstamo fue de 6.641,11 €.

51.- Representa de manera exacta en la recta real el número $\sqrt{10}$. (0,5 puntos)

Para ello, nos ayudaremos del Teorema de Pitágoras. Sabemos que el número $\sqrt{10}$ es la diagonal de un rectángulo de lados 3 y 1:

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{3^2+1^2}$$

Por tanto, si lo dibujamos tenemos la figura de la derecha y bastaría con ayudarnos de un compás para pinchar en el (0,0) y prolongar la diagonal hasta la recta real. Esto nos daría la medida de $\sqrt{10}$ en dicha recta.



52.- En un remoto poblado de Nueva Guinea hay 1.400 mujeres. El 14 % de ellas lleva un solo pendiente. Del 86% restante, la mitad lleva dos pendientes y la otra mitad no lleva ninguno. Si los hombres del poblado no llevan pendientes, ¿Cuántos pendientes hay en total en dicho poblado? (1 punto)

Si el 14 % de las mujeres lleva un pendiente y del resto, el 86 %, la mitad lleva dos y la otra ninguno, esto es como si el 86 % de las mujeres llevara un pendiente, o lo que es lo mismo que todas llevan 1 pendiente.

Por tanto, en el poblado hay 1.400 pendientes.

Si nos ayudamos de un esquema:

$$1.400 \text{ Mujeres} \begin{cases} 14\% \text{ lleva 1 pendiente} \\ 86\% \begin{cases} 50\% \text{ llevan 2 pendientes} \\ 50\% \text{ llevan 0 pendientes} \end{cases} \text{Es como si el 86 \% llevaran 1 pendiente} \end{cases} \rightarrow \text{Todas llevan 1 pendiente}$$

53.- Para que un interés simple anual proporcione los mismos intereses que un interés compuesto, ambos al mismo T.I.N., ¿durante cuánto tiempo habría que dejar depositado el capital en el banco? **Justifica la respuesta**

El capital final en un interés simple viene dado por: $C_f = C_o + I = C_o + \frac{C_o \cdot r \cdot t}{100} = C_o \cdot \left(1 + \frac{r \cdot t}{100}\right)$, mientras que en un interés compuesto viene dado por: $C_f = C_o \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$, para que sean iguales, basta con igualarlas:

$$C_o \cdot \left(1 + \frac{r \cdot t}{100}\right) = C_o \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \rightarrow \cancel{C_o} \cdot \left(1 + \frac{r \cdot t}{100}\right) = \cancel{C_o} \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \rightarrow 1 + \frac{r \cdot t}{100} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

$$Si\ t = 1 \rightarrow 1 + \frac{r \cdot 1}{100} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^1 \rightarrow 1 + \frac{r}{100} = 1 + \frac{r}{100} \rightarrow 0 = 0 \rightarrow \text{Identidad}$$

Por tanto, el tiempo ha de ser de 1 año para que los intereses sean los mismos.

Compruébalo con un ejemplo y verás.

54.- En una pausa publicitaria vemos que 5/9 son anuncios de coches. Del resto, 2/5 son anuncios de apuestas deportivas. Si los anuncios de apuestas fueron ocho; **a)** ¿cuántos anuncios no fueron ni de apuestas ni de coches?; **b)** ¿cuántos anuncios fueron de coches?, **c)** si cada anuncio dura 15 segundos y nos publicitan que volverán en 7 minutos, ¿nos mintieron? (1,5 puntos)

- Anuncios de Coches: $\frac{5}{9}$
- Quedan $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$
- Anuncios de Apuestas: $\frac{2}{5}\, de\, \frac{4}{9} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$ $\rightarrow$ Coches + Apuestas: $\frac{5}{9} + \frac{8}{45} = \frac{25}{45} + \frac{8}{45} = \frac{33}{45} = \frac{11}{15}$
- Quedan: $1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$

Si de apuestas fueron 8 anuncios, entonces:

$$\frac{8}{45}\ son\ 8 \rightarrow \frac{1}{45}\ son\ 8:8 = 1\ y\ \frac{45}{45}\ son\ 1 \cdot 45 = 45\ anuncios$$

El total de anuncios es de 45 y como $\frac{4}{15}$ no son de coches ni de apuestas deportivas, tenemos que:

$$\frac{4}{15}\ de\ 45 = \frac{4}{15} \cdot 45 = 12$$

Por tanto 12 anuncios no son ni de apuestas ni de coches.

De coches fueron 5/9 de 45, que son 25 anuncios.

25 anuncios son de coches.

Si cada anuncio dura 15 segundos, el total de la pausa es de $45 \cdot 15 = 675$ segundos $= \frac{675}{60} = 11{,}25$ min

Luego queda claro que nos mintieron porque nos publicitaron que volverían en 7 minutos.

55.– Se depositan 15.000 € en un banco al 2,5% anual. Al acabar el año se saca todo el dinero, se añaden 10.000 € y se deposita todo en otro banco al 4% durante dos años más. ¿Cuánto dinero habrá al final?

En el primer banco, el capital final lo podemos calcular utilizando cualquiera de los dos métodos; por interés simple, como por interés compuesto:

- Por interés simple:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{15.000 \cdot 2{,}5 \cdot 1}{100} = 375 \text{ €} \quad \text{Y el capital final } C_f = C_o + I = 15.000 + 375 = 15.375 \text{ €}$$

- Por interés compuesto:

$$C_f = C_o \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 15.000 \cdot \left(1 + \frac{2{,}5}{100}\right)^1 = 15.000 \cdot 1{,}025 = 15.375 \text{ €}$$

Para calcular el capital final obtenido en el segundo banco lo haremos aplicando interés compuesto al resultado obtenido de la primera parte más 10.000 €:

$$C_f = C_o \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 25.375 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 = 27.445{,}60 \text{ € en la que hemos utilizado } \begin{cases} C_o = 25.375 \text{ €} \\ r = 4 \ \% \\ t = 2 \text{ años} \end{cases}$$

Por tanto, al final obtendrá un capital de 27.445,60 €

56.– Calcula aplicando las propiedades de las potencias: $\left[\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-3)^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2}{2 \cdot 3^6 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}}\right]^{-3}$

Para calcularlo voy a expresarlo todo en potencias de base 3 y utilizar las propiedades de las potencias para operar:

$$\left[\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-3)^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2}{2 \cdot 3^6 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}}\right]^{-3} = \left[\frac{3^{-2} \cdot 3^2 \cdot \left[(3)^3\right]^2}{2 \cdot 3^6 - 3^6}\right]^{-3} = \left[\frac{3^{-2} \cdot 3^2 \cdot 3^6}{3^6 (2-1)}\right]^{-3} = \left[\frac{3^{-2+2+6}}{3^6 \cdot 1}\right]^{-3} = \left[\frac{3^6}{3^6}\right]^{-3} = 1^{-3} = 1$$

57.– Calcula el valor de los números **a**, **b**, **c** y **d** en la siguiente igualdad: $9^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{6^3}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{c}{d}}$

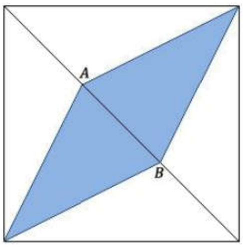
Escribimos todo en forma de potencia:

$$9^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{6^3}}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}}=\left(3^2\right)^{\frac{3}{4}}\cdot 6^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{-\frac{3}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}\cdot 3^{\frac{6}{4}-\frac{3}{4}-\frac{2}{4}}=$$

$$=2^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}=\frac{3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \quad\rightarrow\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{c}{d}} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} a=3\\ b=2\\ c=1\\ d=4\end{cases}$$

Así que, a=3, b=2, c=1 y d=4

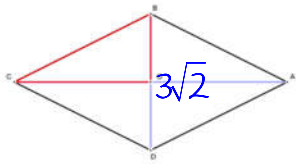
58.- Los puntos A y B dividen la diagonal del cuadrado en tres partes iguales. Si el área del cuadrado es 81 cm^2, ¿cuánto medirá el lado del rombo? Da el valor exacto. (1,5 puntos)



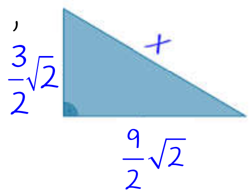
Si el área del cuadrado es de 81 cm^2, su lado será: $l=\sqrt{81}=9\ cm$, y aplicando el Teorema de Pitágoras calculamos la longitud de la diagonal:

$$a^2=b^2+c^2 \quad\rightarrow\quad d^2=2l^2 \quad\rightarrow\quad d=\sqrt{2\cdot l^2}=\sqrt{2\cdot 9^2}=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$$

Como dice que los puntos A y B dividen a la diagonal en tres partes iguales, cada una de esas partes medirá $\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ cm, por tanto, ya tenemos la medida de la diagonal menor del rombo.



Si nos fijamos solo en uno de los 4 triángulos rectángulos que forman el rombo podemos observar que un cateto mide la mitad de lo que mide cada parte, $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ y el otro la mitad de lo que mide la diagonal, $\frac{9}{2}\sqrt{2}$, así que, con estos datos y aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras llegamos a:



$$x^2=b^2+c^2 \quad\rightarrow\quad x=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{81}{2}}=\sqrt{\frac{90}{2}}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}\ cm$$

Por tanto, el lado del rombo mide $3\sqrt{5}$ cm

59.- Calcula el valor de la siguiente expresión: $\frac{\left[\left(4\sqrt{50}-3\sqrt{72}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}}=$

Antes de operar, vamos a extraer de los radicales todos los factores que se pueda:

$$\frac{\left[\left(4\sqrt{50}-3\sqrt{72}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}}=\frac{\left[\left(4\cdot5\sqrt{2}-3\cdot2\cdot3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$$

Hecho esto, agrupamos y multiplicamos:

$$\frac{\left[\left(4\cdot5\sqrt{2}-3\cdot2\cdot3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\frac{\left[\left(20\sqrt{2}-18\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\frac{\left[\left(2\sqrt{2}\right)\cdot\left(5\sqrt{2}\right)\right]\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=$$

Simplificando llegamos a:

$$\frac{\cancel{2}\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{5\sqrt{2\cdot2\cdot2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{5\cdot2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Como en el denominador hay una suma de raíces, tenemos que racionalizar multiplicando arriba y abajo por el conjugado del denominador:

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{10\sqrt{6}-10\sqrt{4}}{3-2}=\frac{10\sqrt{6}-10\cdot 2}{1}=10\left(\sqrt{6}-2\right)$$

Así que el resultado es: $10\left(\sqrt{6}-2\right)$

60.- Calcula aplicando la definición, los siguientes logaritmos: (2 puntos)

a) $\log_5\left(5\sqrt{5}\right)=x \quad\rightarrow\quad 5^x=5\sqrt{5} \quad\rightarrow\quad 5^x=5\cdot 5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{2}} \quad\rightarrow\quad 5^x=5^{\frac{3}{2}} \quad\rightarrow\quad x=\frac{3}{2}$

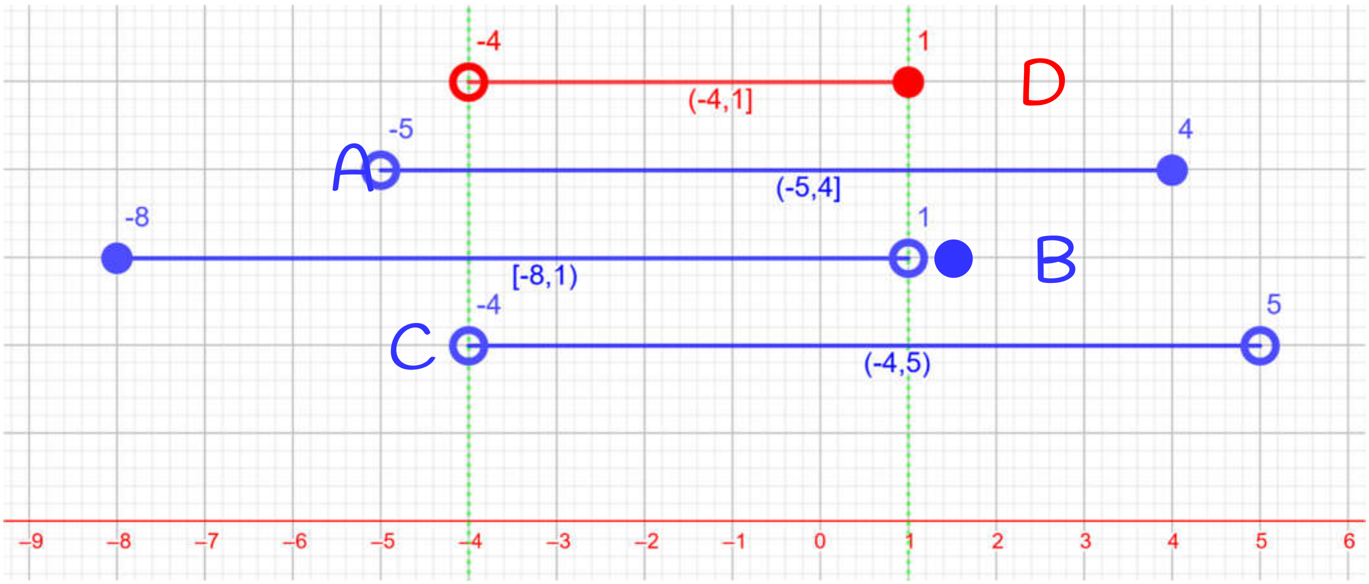
$\rightarrow\quad \log_5\left(5\sqrt{5}\right)=\frac{3}{2}$

b) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{8}}\right)=y \quad\rightarrow\quad \left(\frac{1}{2}\right)^y=\left(\frac{1}{2\sqrt{8}}\right) \quad\rightarrow\quad \left(\frac{1}{2}\right)^y=\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2^y}=\frac{1}{2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}}$

$\rightarrow\quad \frac{1}{2^y}=\frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} \quad\rightarrow\quad y=\frac{5}{2} \quad\rightarrow\quad \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{8}}\right)=\frac{5}{2}$

61.- Escribe tres intervalos A, B y C cuya intersección sea el intervalo $D:\{x\in\mathbb{R}\,/\,-4<x\leq 1\}$

La respuesta a este ejercicio es abierta y tiene muchísimas soluciones, voy a buscar una de ellas dibujando:



He dibujado los intervalos A=(−5,4]; B=[−8,1] y C=(−4,5) y vemos gráficamente que la intersección de todos ellos da como resultado el intervalo D=(−4,1]

$$A\cap B\cap C=D$$

62.- He repartido mi colección de poliedros entre mis amigos matemáticos. A Tales le he dado 1/5 del total, a Hipatia 1/3 del resto, a Arquímedes la mitad de lo que quedaba, y, por último, a Pitágoras le he regalado los 16 poliedros que me quedaban. ¿Cuántos poliedros tenía? ¿Cuántos poliedros he dado a cada uno?

Vamos a ir viendo qué damos a cada uno:

A Tales: $\frac{1}{5}$ de los poliedros, por lo que me quedan $\frac{4}{5}$ de los poliedros

A Hipatia: $\frac{1}{3}$ del resto, $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$ de los poliedros

Por lo que hasta ahora he regalado: $\frac{1}{5}+\frac{4}{15}=\frac{3+4}{15}=\frac{7}{15}$

Así que aún me quedan $\frac{8}{15}$ de los poliedros.

Arquímedes: $\frac{1}{2}$ de lo que quedaba, $\frac{1}{2}$ de $\frac{8}{15}=\frac{1}{2}$ de $\frac{8}{15}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$ de los poliedros

Así que ya he dado: $\frac{1}{5}+\frac{4}{15}+\frac{4}{15}=\frac{3+4+4}{15}=\frac{11}{15}$

Por lo que quedan $1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$ de los poliedros.

Si dice que a Pitágoras le regalo los 16 poliedros que quedaban, entonces:

$\frac{4}{15}$ son 16 poliedros $\rightarrow$ $\frac{1}{15}$ son 4 poliedros y $\frac{15}{15}$ son $4\cdot 15=60$ poliedros

Por tanto, tenía 60 poliedros y he dado 12 a Tales y 16 a Hipatia, Arquímedes y Pitágoras.

63.– Calcula y simplifica todo lo que puedas: (1,5 puntos) $\frac{x^2-x+9}{x^3-9x}+\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x}=$

$$\frac{x^2-x+9}{x^3-9x}+\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{x^2-x+9}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}+\frac{1}{(x-3)\cdot(x+3)}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{x^2-x+9}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}+\frac{x}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}-\frac{x\cdot(x+3)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}+\frac{x^2-9}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}=$$

$$\frac{x^2-x+9+x-x^2-3x+x^2-9}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{x^2-3x}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{\cancel{x(x-3)}}{\cancel{x\cdot(x-3)}\cdot(x+3)}=\frac{1}{x+3}$$

64.– Sea Considera los siguientes polinomios: (1,5 puntos)

$P(x)=3x^4-6x^3+4x-2$ $\quad Q(x)=x^3-2x^2-3x+1$ $\quad R(x)=2x^2+4x-5$ $\quad S(x)=x^2+1$

Calcula:

a) $3\cdot P(x)-2\cdot Q(x)+R(x)=3\cdot(3x^4-6x^3+4x-2)-2\cdot(x^3-2x^2-3x+1)+2x^2+4x-5=9x^4-18x^3+12x-6-$
$-2x^3+4x^2+6x-2+2x^2+4x-5=9x^4-20x^3+6x^2+22x-13$

b) $P(x)\cdot Q(x)-3\cdot S(X)=(3x^4-6x^3+4x-2)\cdot(x^3-2x^2-3x+1)-3(x^2+1)=3x^7-6x^6-9x^5+3x^4-6x^6+12x^5+$
$+18x^4-6x^3+4x^4-8x^3-12x^2+4x-2x^3+4x^2+6x-2-3x^2-3=3x^7-12x^6+3x^5+25x^4-16x^3-11x^2+10x-5$

c) $P(x):S(x)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -6x^3 & +0x^2 & +4x & -2 & \underline{x^2+1} \\
-3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2-6x-3 \\
\hline
0 & -6x^3 & -3x^2 & +4x & & \\
 & +6x^3 & & +6x & & \\
\hline
 & 0 & -3x^2 & +10x & -2 & \\
 & & & +6x & & \\
\hline
 & & -3x^2 & +10x & -2 & \\
 & & +3x^2 & & +3 & \\
\hline
 & & 0 & +10x & +1 &
\end{array}
$$

$$\rightarrow \begin{cases} C(x)=3x^2-6x-3 \\ R(x)=10x+1 \end{cases}$$

65.- Calcula el valor de la siguiente expresión: (1,5 puntos) $\dfrac{\left(2\sqrt{45}+\dfrac{3}{2}\sqrt{72}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\cdot 10\sqrt{5}}{2\sqrt{180}}=$

$$\left(\frac{\left(2\sqrt{45}+\frac{3}{2}\sqrt{72}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\cdot 10\sqrt{5}}{2\sqrt{180}}\right)^4=\left(\frac{\left(6\sqrt{5}+9\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\cdot 10\sqrt{5}}{12\sqrt{5}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{\left(60-18\sqrt{10}+18\sqrt{10}-54\right)\cdot 10\sqrt{5}}{12\sqrt{5}}\right)^4=\left(\frac{6\cdot 10\sqrt{5}}{12\sqrt{5}}\right)^4=5^4=625$$

Donde hemos descompuesto en factores primos los radicandos y hemos extraído fuera todos los factores posibles, hemos operado y simplificado al final.

66.- Sabiendo que $\log a=\dfrac{3}{5}$ y que $\log b=-\dfrac{3}{2}$, calculad el valor de estos logaritmos aplicando sus propiedades: (2 puntos)

a) $\log\left[\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt{10a^5}\right]=$ b) $\log_b\dfrac{10^3}{a^5\cdot b^3}=$

a) $$\log\left[\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt{10\cdot a^5}\right]\underset{\substack{\text{El logaritmo del}\\\text{producto es la}\\\text{suma de logarimos}}}{=}\log\left[\sqrt[3]{b}\right]+\log\left[\sqrt{10}\right]+\log\left[\sqrt{a^5}\right]\underset{\substack{\text{Escribimos}\\\text{en forma de}\\\text{potencia}}}{=}\log\left[b^{\frac{1}{3}}\right]+\log\left[10^{\frac{1}{2}}\right]+\log\left[a^{\frac{5}{2}}\right]$$

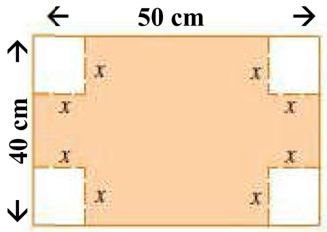
$$\underset{\substack{\text{En el logaritmo de una}\\\text{potencia, el exponente}\\\text{pasa delante}}}{=}\frac{1}{3}\log[b]+\frac{1}{2}\log[10]+\frac{5}{2}\log[a]\underset{\substack{\text{Sustituimos}\\\text{cada uno}\\\text{por su valor}}}{=}\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{5}\underset{\text{Operamos}}{=}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

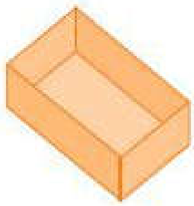
b) $$\log_b\frac{10^3}{a^5\cdot b^3}\underset{\substack{\text{El logaritmo del}\\\text{cociente es la}\\\text{resta de logarimos}}}{=}\log_b\left[10^3\right]-\log_b\left[a^5\right]-\log_b\left[b^3\right]\underset{\substack{\text{En el logaritmo de una}\\\text{potencia, el exponente}\\\text{pasa delante}}}{=}3\log_b[10]-5\log_b[a]-3\cancel{\log_b[b]}$$

$$=3\log_b[10]-5\log_b[a]-3\underset{\substack{\text{Cambiamos}\\\text{a base}\\\text{decimal}}}{=}3\cdot\frac{\log[10]}{\log[b]}-5\cdot\frac{\log[a]}{\log[b]}-3=\underset{\substack{\text{Sustituimos}\\\text{cada uno}\\\text{por su valor}}}{=}3\cdot\frac{1}{-\frac{3}{2}}-5\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{3}{2}}-3=-3$$

67.- Con una cartulina rectangular de 40 cm × 50 cm se quiere construir una caja sin tapa recortando cuatro cuadrados iguales en cada una de las esquinas. Escribe la expresión algebraica del volumen de la caja en función del lado del cuadrado x. ¿Cuánto vale su volumen en litros para x=10 cm? (2 puntos)

Si llamamos x al lado de cada uno de los cuadrados que recortamos, el volumen de la caja formada recortando los 4 cuadrados la calcularemos multiplicando largo por ancho y por alto:





$$V(x)=(40-2x)\cdot(50-2x)\cdot x=4x^3-180x^2+2000x$$

Si x=10 cm, bastaría con sustituir:

$$V(x)=4\cdot 10^3-180\cdot 10^2+2000\cdot 10=6.000\ cm^3$$

Y en litros dividimos por 1.000, por tanto, el volumen de la caja es de 6 litros.

68.- Halla el valor de **k** para que el resto de la división $x^4+kx^3-kx+5 \quad \underline{|x-2}$ sea -3: (1 punto)

Como se trata de una división por un binomio de la forma x–a, podemos utilizar la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & k & 0 & -k & 5 \\ 2 & & 2 & 2k+4 & 4k+8 & 6k+16 \\ \hline & 1 & k+2 & 2k+4 & 3k+8 & \boxed{6k+21} \end{array}$$

Como dicen en el enunciado que el resto es igual a –3, igualaremos nuestro resto a –3 y despejaremos k:

$$6k+21=-3 \quad \rightarrow \quad 6k=-24 \quad \rightarrow \quad k=\frac{-24}{6} \quad \rightarrow \quad k=-4$$

Por tanto, k tiene que valer –4.

69.- Una amiga me pidió que le pasase un escrito al ordenador. El primer día pasé ¼ del trabajo total. El segundo día 1/3 de lo restante. El tercer día 1/6 de lo que faltaba, y el cuarto lo terminé pasando 30 folios. ¿Puedes averiguar cuántos folios tenía el escrito? (1,5 puntos)

- Si el primer día un cuarto del trabajo: $\frac{1}{4}$ — Quedan ¾
- El segundo día 1/3 de lo que queda: $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

Entre los dos días: 1) + 2) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ — Por tanto, quedan 1/2

- El tercer día 1/6 de lo que queda: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

Así que, entre los tres días: 1) + 2) +3) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}=\frac{7}{12}$ — Por tanto, al final quedan 5/12

- Si el cuarto día hace las últimas 30 páginas que representan 5/12, entonces

$$\frac{5}{12} \text{ son 30 páginas} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{12} \text{ son } \frac{30}{5}=6 \quad \rightarrow \quad \frac{12}{12} \text{ son } 6\cdot 12=72 \text{ páginas}$$

Por tanto, el trabajo tiene 72 folios.

70.- Calcula y simplifica todo lo que puedas: (1,5 puntos) $\frac{1}{x^2-x}+\frac{2x-1}{x-1}-\frac{3x-1}{x}=$

Para sumar las fracciones algebraicas, al igual que las fracciones con números, tenemos que reducir a común denominador, y para ello descomponemos en factores los denominadores y hacemos el m.c.m.:

$$\left.\begin{array}{l} x^2-x=x(x-1) \\ x-1=x-1 \\ x=x \end{array}\right\} m.c.m.=x\cdot(x-1) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x^2-x}+\frac{2x-1}{x-1}-\frac{3x-1}{x}=\frac{1}{x\cdot(x-1)}+\frac{x\cdot(2x-1)}{x\cdot(x-1)}-\frac{(x-1)\cdot(3x-1)}{x\cdot(x-1)}=$$

$$=\frac{1}{x\cdot(x-1)}+\frac{2x^2-x}{x\cdot(x-1)}-\frac{3x^2-4x+1}{x\cdot(x-1)}=\frac{1+2x^2-x-3x^2+4x-1}{x\cdot(x-1)}=\frac{-x^2+3x}{x\cdot(x-1)}=\frac{x\cdot(3-x)}{x\cdot(x-1)}=\frac{\cancel{x}\cdot(3-x)}{\cancel{x}\cdot(x-1)}=\frac{3-x}{x-1}$$

71.- Dados los siguientes polinomios: (1,5 puntos)

$P(x)=3x^4-6x^3+4x-2 \qquad Q(x)=x^3-2x^2-3x+1 \qquad R(x)=2x^2+4x-5 \qquad S(x)=x^2+1$

Calcula: a) $3\cdot P(x)-2\cdot Q(x)+R(x)$ b) $P(x)\cdot Q(x)-3\cdot S(X)$ c) $P(x):S(x)$

a) $3\cdot P(x)-2\cdot Q(x)+R(x)=3\cdot(3x^4-6x^3+4x-2)-2\cdot(x^3-2x^2-3x+1)+2x^2+4x-5=9x^4-18x^3+12x-6-$
$-2x^3+4x^2+6x-2+2x^2+4x-5=9x^4-20x^3+6x^2+22x-13$

b) $P(x)\cdot Q(x)-3\cdot S(X)=(3x^4-6x^3+4x-2)\cdot(x^3-2x^2-3x+1)-3(x^2+1)=3x^7-6x^6-9x^5+3x^4-6x^6+12x^5+$
$+18x^4-6x^3+4x^4-8x^3-12x^2+4x-2x^3+4x^2+6x-2-3x^2-3=3x^7-12x^6+3x^5+25x^4-16x^3-11x^2+10x-5$

c) $P(x):S(x)$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -6x^3 & +0x^2 & +4x & -2 & x^2+1 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & & -3x^2 & & & 3x^2-6x-3 \\
\cline{1-5}
0 & -6x^3 & -3x^2 & +4x & & \\
 & +6x^3 & & +6x & & \\
\cline{1-5}
 & 0 & -3x^2 & +10x & -2 & \\
 & & & +6x & & \\
\cline{1-5}
 & & -3x^2 & +10x & -2 & \\
 & & +3x^2 & & +3 & \\
\cline{1-5}
 & & 0 & +10x & +1 &
\end{array}
\quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} C(x)=3x^2-6x-3 \\ R(x)=10x+1 \end{array}\right.$$

72.- Calcula el valor de la siguiente expresión: (1,5 puntos) $\frac{\left[\left(4\sqrt{50}-3\sqrt{72}\right)\cdot\left(5\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)\right]}{\sqrt{32}-\sqrt{8}}$

Sacamos todo lo que se pueda de los radicales y operamos hasta reducir al máximo el resultado:

$$\frac{\left[\left(4\sqrt{50}-3\sqrt{72}\right)\cdot\left(5\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)\right]}{\sqrt{32}-\sqrt{8}}=\frac{\left[\left(2\sqrt{2}\right)\cdot\left(8\sqrt{2}\right)\right]}{2\sqrt{2}}=\frac{32}{2\sqrt{2}}=\frac{16}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$$

73.– Calcula con la ayuda de las propiedades de los logaritmos el valor de la siguiente expresión: (2 puntos)

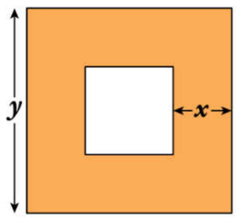
$$\frac{\log_2\sqrt[5]{8}+\log_2\sqrt{256}+\log_2 8^{-1}}{2\cdot\log_2 4+3\cdot\log_4 2^{-2}}=$$

Como todos los números de los argumentos de los distintos logaritmos son potencias de 2 y de 4, igual que las bases de los logaritmos, todos se pueden calcular, así que vamos a ir, con la ayuda de las propiedades de los logaritmos, calculando cada uno de ellos:

$$\frac{\log_2\sqrt[5]{8}+\log_2\sqrt{256}+\log_2 8^{-1}}{2\cdot\log_2 4+3\cdot\log_4 2^{-2}}=\frac{\log_2\left(\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt{256}\cdot 8^{-1}\right)}{2\cdot\log_2 2^2+3\cdot\log_4 4^{-1}}=\frac{\log_2\left(\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt{2^8}\cdot 2^{-3}\right)}{4\cdot\log_2 2-3\cdot\log_4 4}=\frac{\log_2\left(2^{\frac{3}{5}}\cdot 2^4\cdot 2^{-3}\right)}{4\cdot 1-3\cdot 1}=$$

$$=\frac{\log_2\left(2^{\frac{3}{5}}\cdot 2\right)}{1}=\log_2\left(2^{\frac{8}{5}}\right)=\frac{8}{5}\log_2 2=\frac{8}{5}$$

74.– Expresa algebraicamente y en forma de producto, el área del anillo cuadrado de la figura usando las variables que aparecen en ella y después calcula su valor para x=1 e y=3 cm. (2 puntos)



Observando la figura, podemos calcular el área sombreada, restándole al cuadrado naranja (grande) el cuadrado blanco (interior):

El área del cuadrado naranja viene dada por: $A_G=y^2$

Para el área del blanco, primero necesitamos conocer el lado, y el lado lo calcularemos con la ayuda del grande, es decir el lado del blanco es y – dos veces x: $l_B=y-2x$, por tanto, su área vendrá dada por: $A_B=\left(y-2x\right)^2=y^2-4xy+4x^2$

Así que el área sombreada será:

$$A_{sombreada}=A_G-A_B=y^2-\left(y^2-4xy+4x^2\right)=y^2-y^2+4xy-4x^2=4xy-4x^2=4x\left(y-x\right)$$

Que expresada en forma de producto será: $A(x,y)=4x\cdot\left(y-x\right)$

Y, para x=1 e y=3: $A(x,y)=4x\cdot\left(y-x\right)\quad\rightarrow\quad A(1,3)=4\cdot1\cdot(3-1)=8\ cm^2$

Por tanto, el área es de 8 cm^2.

75.– Escribe un polinomio de cuarto grado que no tenga raíces. **Justifica tu respuesta**

La respuesta es abierta, pero una solución fácil sería multiplicar dos polinomios de segundo grado que no tengan raíces, como por ejemplo los polinomios x^2+1 y x^2+4, así que, un polinomio de 3° grado sin raíces podría ser el:

$$P(x)=\left(x^2+4\right)\cdot\left(x^2+1\right)=x^4+5x^2+4$$

76.- Calcula paso a paso las siguientes operaciones y escribe su resultado en esta hoja:

a) $$-(-2)\cdot\left(-(-3)^2\right)\cdot\left(-\left(-\left(-\left(-4\right)^0\right)\right)\right)^3\cdot(-1)^{12}=2\cdot(-9)\cdot(-1)\cdot 1=+18$$

b) $$0{,}4+0{,}\widehat{4}+0{,}0\widehat{4}=\begin{cases}0{,}4=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}\\ 0{,}\widehat{4}=\begin{cases}N=0{,}\widehat{4}\\10N=4{,}\widehat{4}\end{cases}\rightarrow\quad 9N=4\quad\rightarrow\quad N=\dfrac{4}{9}\\ 0{,}0\widehat{4}=\begin{cases}10N=0{,}\widehat{4}\\100N=4{,}\widehat{4}\end{cases}\rightarrow\quad 90N=4\quad\rightarrow\quad N=\dfrac{4}{90}\end{cases}$$

$$\rightarrow\quad 0{,}4+0{,}\widehat{4}+0{,}0\widehat{4}=\frac{2}{5}+\frac{4}{9}+\frac{4}{90}=\frac{36+40+4}{90}=\frac{80}{90}=\frac{8}{9}$$

c) $$\frac{1-\dfrac{2}{3-\dfrac{2}{3}}}{2+\dfrac{2}{5}}=\frac{1-\dfrac{2}{\dfrac{9-2}{3}}}{\dfrac{10+2}{5}}=\frac{1-\dfrac{6}{7}}{\dfrac{12}{5}}=\frac{\dfrac{7-6}{7}}{\dfrac{12}{5}}=\frac{\dfrac{1}{7}}{\dfrac{12}{5}}=\frac{1\cdot5}{7\cdot12}=\frac{5}{84}$$

77.- Claudia sale de su casa, se monta en el ascensor de su edificio y toquetea todos los botones de forma que, éste, sube 6 plantas, después baja 9, vuelve a subir 7, baja 5, sube 7, baja 4 y por último baja 8, parándose en el segundo sótano. ¿En qué planta vive Claudia?, ¿Cuál es la planta más alta por la que ha pasado?

Supongamos que se monta en la planta baja, si los pisos que sube los contamos como positivos y los que baja como negativos, se bajaría en la planta:

$$+6-9+7-5+7-4-8=-6$$

Como lo hace en la -2, entonces la diferencia es de:

$$-2-(-6)=-2+6=4$$

Por tanto, claudia vive en la cuarta planta.

Para ver la planta más alta por la que ha pasado basta con hacer las sumas parciales y ver cuál es mayor:

$$4+6=10\qquad 10-9=1\qquad 1+7=8\qquad 8-5=3$$

$$3+7=10\qquad 10-4=6\qquad 6-8=-2$$

La planta más alta que pasa es la décima planta por la que pasa en dos ocasiones.

78.- Una canica cae al suelo y se eleva cada vez los 2/3 de la altura anterior. Tras botar tres veces, se ha elevado 2 metros. ¿Desde qué altura cayó la canica?

Vamos a hacer el ejercicio al revés, si en cada bote llega a 2/3 de la altura anterior, en sentido contrario, en cada bote subiría hasta 3/2 de la altura anterior, si reiteramos 3 veces el proceso:

$$2\ m\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3=2\cdot\frac{27}{8}=\frac{27}{4}=6{,}75\ m$$

Por tanto, la canica cayó desde una altura inicial de 6,75 metros.

79.– Al medir las distancias de frenado de mi viejo Audi cuando circula a 90 km/h, se obtienen los siguientes resultados: 37,5 m, 37,8 m y 37,4 m. ¿Qué medida es la más fiable?

Sabemos que cuando tenemos varias medidas, la medida más fiable es la que tiene menor error relativo. Así que calcularemos primero la distancia de frenado mediante media aritmética de las 3 medidas:

$$\overline{x}=\frac{\sum_i x_i}{n}=\frac{37{,}5+37{,}8+37{,}4}{3}=37{,}6\ m$$

En la que ponemos el mismo número de cifras significativas.

De las tres medidas, la medida más fiable es la de 37,5 metros, puesto que es la más próxima a la media, y por ello, su error absoluto será el menor y por tanto, también lo será su error relativo, y no sería necesario calcularlo, pero lo haremos para que se vea:

$$E_{A(37{,}5)}=\left|V_{\text{Real}}-V_{\text{Aprox}}\right|=\left|37{,}5-37{,}6\right|=0{,}1 \quad\rightarrow\quad E_{R(37{,}5)}=\frac{E_A}{V_R}\cdot 100=\frac{0{,}1}{37{,}6}\cdot 100=0{,}27\ \%$$

$$E_{A(37{,}8)}=\left|V_{\text{Real}}-V_{\text{Aprox}}\right|=\left|37{,}8-37{,}6\right|=0{,}2 \quad\rightarrow\quad E_{R(37{,}8)}=\frac{E_A}{V_R}\cdot 100=\frac{0{,}2}{37{,}6}\cdot 100=0{,}53\ \%$$

$$E_{A(37{,}4)}=\left|V_{\text{Real}}-V_{\text{Aprox}}\right|=\left|37{,}4-37{,}6\right|=0{,}2 \quad\rightarrow\quad E_{R(37{,}4)}=\frac{E_A}{V_R}\cdot 100=\frac{0{,}2}{37{,}6}\cdot 100=0{,}53\ \%$$

80.– El café pierde el 20% de su peso al tostarlo. Si lo compramos a 10 € el kilo, ¿a qué precio hay que venderlo para ganar un 10% después de tostarlo?

Si compramos un kilo de café natural y lo tostamos, al perder el 20% de su peso, obtendremos 0,8 kg de café tostado.

Esos 0,8 kg de café nos han costado 10 €, así que 1 kg de café tostado costaría:

$$\frac{0{,}8\ kg}{10\ €}=\frac{1\ kg}{x} \quad\rightarrow\quad x=\frac{10\ €\cdot 1\ \cancel{kg}}{0{,}8\ \cancel{kg}}=12{,}50\ €$$

Para lo que hemos hecho una proporción.

Como queremos ganar un 10% , habría que añadir un 10% a los 12,50 €, por tanto:

$$12{,}50\ €\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)=12{,}50\ €\cdot 1{,}1=13{,}75\ €$$

Así que, para ganar un 10% después de tostarlo habría que venderlo a 13,75 €/Kg

81.– Si dos números reales, x e y, pertenecen a los intervalos (–1, 3) y [0, 2], respectivamente, ¿a qué intervalo pertenece el resultado de x–y? ¿y de y–x?

Para x–y: Vamos a calcular la diferencia entre los extremos del primero y los del segundo:

- Si x es –1 abierto e y es 0 cerrado, por tanto, x–y=–1–0=–1 abierto.
- Si x es 3 abierto e y es 0 cerrado, por tanto, x–y=3–0=3 abierto.
- Si x es –1 abierto e y es 2 cerrado, por tanto, x–y=–1–2=–3 abierto.

- Si x es 3 abierto e y es 2 cerrado, por tanto, x−y=3−2=1 abierto.

Por tanto, x−y pertenece al intervalo (−3,3)

Para y−x: Vamos a calcular la diferencia entre los extremos del segundo y los del primero:

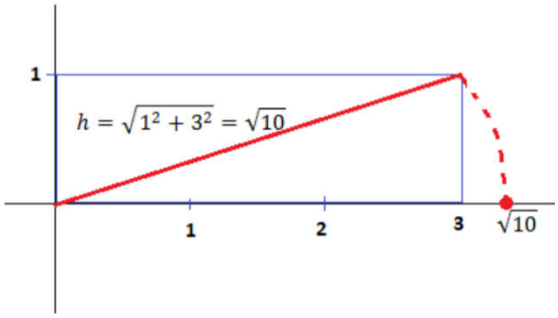
- Si y es 0 cerrado y x es −1 abierto, por tanto, y−x=0−(−1)=1 abierto.
- Si y es 2 cerrado y x es −1 abierto, por tanto, y−x=2−(−1)=3 abierto.
- Si y es 0 cerrado y x es 3 abierto, por tanto, y−x=0−3=−3 abierto.
- Si y es 2 cerrado y x es 3 abierto, por tanto, y−x=2−3=−1 abierto.

Por tanto, y−x pertenece al intervalo (−3,3)

82.− Representa de manera exacta en la recta real los números: $\sqrt{10}$ y $\sqrt{11}$

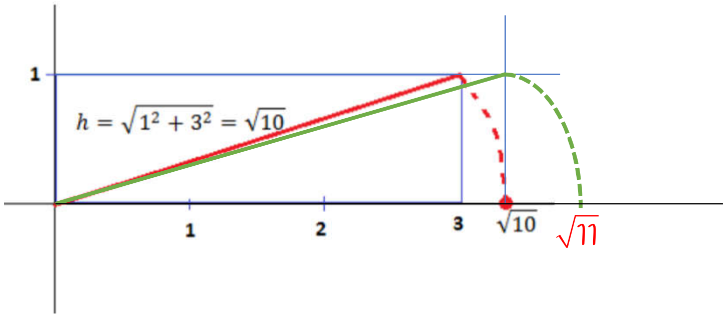
Para ello, nos ayudaremos del Teorema de Pitágoras. Sabemos que el número $\sqrt{10}$ es la diagonal de un rectángulo de lados 3 y 1:

$$\sqrt{10}=\sqrt{9+1}=\sqrt{3^2+1^2}$$



Por tanto, si lo dibujamos tenemos la figura de la derecha y bastaría con ayudarnos de un compás para pinchar en el (0,0) y prolongar la diagonal hasta la recta real. Esto nos daría la medida exacta de $\sqrt{10}$ en dicha recta.

Para representar $\sqrt{11}$ lo más fácil es ayudarnos de la representación de $\sqrt{10}$, puesto que podemos escribir: $\sqrt{11}=\sqrt{10+1}=\sqrt{\sqrt{10}^2+1^2}$, así que $\sqrt{11}$ es la diagonal de un rectángulo de lados $\sqrt{10}$ y 1.



83.− Dados los intervalos $A=[-4,2]$ $B=[-1,4)$ y $C=(2,+\infty)$, completa la tabla:

Operación		Intervalo	Representación Gráfica	Notación Matemática
a)	$A\cup B$	$[-4,4)$		$\{x\in\mathbb{R}\,/\,-4\le x<4\}$
b)	$B\cap\overline{C}$	$[-1,2]$		$\{x\in\mathbb{R}\,/\,-1\le x\le 2\}$
c)	$\overline{A\cap B\cup C}$	$(-\infty,-1)$		$\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<-1\}$

84.− Calcula: (2 puntos)

a) $$\frac{\left(2\sqrt{54}-6\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{10+\sqrt{36}}}}}=\frac{\left(6\sqrt{6}-6\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{10+6}}}}=\frac{6\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{5+4}}}=\frac{6(6-3)}{\sqrt{1+3}}=$$

$$=\frac{6(3)}{2}=3\cdot 3=9$$

b) $5\sqrt[3]{128}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{16}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{54}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{250}=5\sqrt[3]{2^7}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2^4}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{3^3\cdot 2}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=5\cdot 2^2\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt[3]{2}+$

$+\frac{4}{3}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{2}-\frac{21}{5}\cdot 5\cdot\sqrt[3]{2}=20\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}-21\sqrt[3]{2}=0\sqrt[3]{2}=0$

85.- Calcula paso a paso y escribe su resultado en esta hoja: (1 punto)

$$\sqrt{\sqrt{\left[(-5)\cdot 2-\frac{1}{8}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}-\sqrt{\left(1+\sqrt{-16}\cdot\sqrt{-36}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}+1\right)}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{(-4)^2\cdot(-2)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}}}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{\left[-10-\frac{1}{8}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}-\sqrt{\left(1+\sqrt{(-16)\cdot(-36)}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4\cdot 2^3\cdot 2}}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}-\sqrt{(1+24)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}+\sqrt[8]{2^8}=$$

$$=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{25}{4}}+2=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}+2=1$$

86.- Carolina ha estado tres días de viaje. El primer día gastó la mitad del dinero que tenía. El segundo día, la tercera parte de lo que le quedaba y el tercero la cuarta parte del nuevo resto. (1,5 puntos)

a) Indica qué parte del dinero se gastó cada día.

$$\text{Viaje}\begin{cases}\text{Día 1: } \frac{1}{2} & \rightarrow \quad \text{quedan: } \frac{1}{2}\\ \text{Día 2: } \frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{2}=\frac{1}{6} & \rightarrow \quad \text{Dia 1 + Dia 2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \text{quedan: } \frac{1}{3}\\ \text{Día 3: } \frac{1}{4} \text{ de } \frac{1}{3}=\frac{1}{12} & \end{cases}$$

Por tanto, el primer día gastó la mitad del dinero, el segundo la sexta parte y el tercero la doceava parte.

b) Si el tercer día se gastó 12,50 €, ¿cuánto dinero tenía inicialmente?

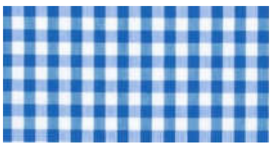
Si el tercer día gastó 12,50 €, entonces 1/12 del total del dinero se corresponden con 12,50 € por ello:

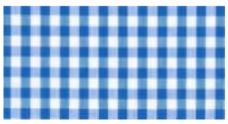
$$\text{Si } \frac{1}{12} \text{ son } 12{,}50\text{ €} \qquad \text{entonces} \qquad \frac{12}{12} \text{ serán } 12\cdot 12{,}50 = 150\text{ €}$$

Así que, Carolina tenía inicialmente 150 €.

87.- Al lavar una tela, su longitud se reduce un 8%, y su anchura un 4%. ¿Qué longitud debemos comprar de una pieza de 90 cm de ancho para tener, después de lavada 5 m² de tela? (1,5 puntos)

Vamos a ayudarnos de una tabla con los datos del problema para resolverlo:

Tela Nueva	
	Ancho = 90 cm Largo = 6,29 m

Tela Lavada	
	Para calcular el ancho de la tela lavada, multiplicaremos por el índice de variación porcentual I_v = 0,96 Ancho = 0,96 · 90 = 86, 4cm Área = 5 m²

Como conocemos el área de la tela lavada y el ancho, por tanto, podemos calcular el lado:

$$\text{Area} = \text{Ancho}\cdot\text{Largo} \quad \rightarrow \quad \text{Largo} = \frac{\text{Area}}{\text{Ancho}}=\frac{5m^2}{0{,}864m}=5{,}79\ m$$

Este sería el largo de la tela lavada.

Como ha encogido un 8%, su Índice de variación porcentual será: $I_v = \left(1 \pm \frac{\%}{100}\right) = \left(1 - \frac{8}{100}\right) = 0{,}92$

Así que ya conocemos la longitud final y el índice de variación porcentual, por lo que podemos calcular la longitud inicial recordando que:

$$\text{Longitud}_{\text{Final}} = \text{Longitud}_{\text{Inicial}} \cdot I_v \quad \rightarrow \quad \text{Longitud}_{\text{Inicial}} = \frac{\text{Longitud}_{\text{Final}}}{I_{\text{variación}}} = \frac{5{,}79}{0{,}92} = 6{,}29\ m$$

Por lo que hemos de comprar 6,29 m de tela.

88.- Aplicando la definición de logaritmo, calcula: $\log\left(\frac{0{,}01 \cdot \sqrt[3]{100}}{10^{-1} \cdot 0{,}1}\right)$ (1 punto)

Antes de aplicar la definición de logaritmo vamos a agrupar todas las potencias de 10 que aparecen en el argumento.

$$\log\left(\frac{0{,}01 \cdot \sqrt[3]{100}}{10^{-1} \cdot 0{,}1}\right) = \log\left(\frac{10^{-2} \cdot 10^{\frac{2}{3}}}{10^{-1} \cdot 10^{-1}}\right) = \log\left(\frac{10^{-2} \cdot 10^{\frac{2}{3}}}{10^{-2}}\right) = \log\left(\frac{\cancel{10^{-2}} \cdot 10^{\frac{2}{3}}}{\cancel{10^{-2}}}\right) = \log\left(10^{\frac{2}{3}}\right) \underset{\substack{\text{definición}\\ \text{de logaritmo}}}{\overset{\text{Aplicando}}{=}} 10^{x} = 10^{\frac{2}{3}}$$

Por tanto, $\log\left(\frac{0{,}01 \cdot \sqrt[3]{100}}{10^{-1} \cdot 0{,}1}\right) = \frac{2}{3}$

89.- Reduce la siguiente expresión: $\log_a ac + \log_d d^3 + \log_b b - \log_a c$ (1 punto)

$$\log_a ac + \log_d d^3 + \log_b b - \log_a c = \log_a a + \log_a c + \log_d d^3 + \log_b b - \log_a c =$$
$$= 1 + \log_a c + 3 + 1 - \log_a c = 1 + \cancel{\log_a c} + 3 + 1 - \cancel{\log_a c} = 5$$

90.- Dados los intervalos: $A = \{x \in \mathbb{R} / -5 \le x < 4\}, B = \{x \in \mathbb{R} / 1 \le x < 5\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x \le 8\}$

Calcula:

a) $A \cup (B \cap C) = [-5, 5)$ $\rightarrow$ $A \cup (B \cap C) = \{x \in \mathbb{R} / -5 \le x < 5\}$

b) $A \cap (B \cup C) = (0,4)$ $\rightarrow$ $A \cap (B \cup C) = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 4\}$

91.- En la medida de 1 m se ha cometido un error de 1 mm, y en la de 500 Km, otro de 500 m. ¿Qué medida es mejor? (1 punto)

Si somos buenos conocedores de la teoría, nos daremos cuenta de que el error que nos dan es el error absoluto porque tiene dimensiones (era la diferencia en valor absoluto entre el valor real y el medido). Como nos piden comparar las medidas necesitamos calcular el error relativo para poder compararlos, la medida que tenga el menor relativo será la más precisa y por tanto mejor.

$$E_r = \frac{E_{\text{Absoluto}}}{V_{\text{Real}}} \cdot 100 = \begin{cases} E_{r_1} = \frac{E_{\text{Absoluto}}}{V_{\text{Real}}} \cdot 100 = \frac{1\ \cancel{mm}}{1000\ \cancel{mm}} \cdot 100 = 0{,}1\ \% \\ E_{r_2} = \frac{E_{\text{Absoluto}}}{V_{\text{Real}}} \cdot 100 = \frac{500\ \cancel{m}}{500.000\ \cancel{m}} \cdot 100 = 0{,}1\ \% \end{cases}$$

Así que, ambas medidas son igual de buenas por tener el mismo error relativo.

92.- Determina el valor de x en la siguiente expresión: $\log(2x-4) = 2$

Si aplicamos la definición de logaritmo, llegamos a: $log(2x-4)=2 \quad \rightarrow \quad 10^2=2x-4$, que es una ecuación de primer grado en x, y cuya solución viene dada por:

$$2x-4=100 \quad \rightarrow \quad 2x=104 \quad \rightarrow \quad x=\frac{104}{2} \quad \rightarrow \quad x=52$$

Así que el valor de x es 52.

93.– En una muestra de pacientes que están siendo tratados de una grave enfermedad pulmonar, se observa que los 2/5 son no fumadores. Del resto de pacientes, los 2/9 no tienen colesterol. Si los pacientes que son fumadores y tienen colesterol son 4.200, calcula: (Examen 1 – 2023)

a) ¿cuántos pacientes son fumadores sin colesterol?
b) ¿cuántos pacientes son fumadores?
c) ¿cuántos pacientes tiene la muestra?

Si nos ayudamos de unas llaves para representar los datos del problema, llevamos a:

$$\text{Pacientes}\begin{cases} \frac{2}{5}\ \text{No Fumadores} \\ \frac{3}{5}\ \text{Si Fumadores}\begin{cases} \frac{2}{9}\ \text{No Colesterol} \\ \frac{7}{9}\ \text{Si Colesterol} \quad \rightarrow \quad 4.200\ \text{Pacientes} \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto, como podemos observar en el cuadro anterior, 7/9 de los 3/5 de los pacientes son pacientes fumadores y con colesterol, y como nos dicen que estos son 4.200, con esto ya podemos calcular todo, empezando por el número de pacientes.

$$\frac{7}{9}\,de\,\frac{3}{5}\text{de los pacientes son 4.200 pacientes} \quad \rightarrow \quad \frac{7}{9}\frac{3}{5}=\frac{7}{15}$$

Si $\frac{7}{15}$ de los pacientes son 4.200, $\frac{1}{15}$ son 600 pacientes y $\frac{15}{15}$ son 600 · 15 = 9.000 pacientes.

El total de pacientes de la muestra es de 9.000 pacientes.

- Fumadores sin colesterol son: $\frac{2}{9}\,de\,\frac{3}{5}\text{de } 9000 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{9}\frac{3}{5}\cdot 9000=1.200$ pacientes

- Fumadores son: $\frac{3}{5}\text{de } 9.000 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{5}\cdot 9.000=5.400$ pacientes

Por tanto, la muestra es de 9.000 pacientes, de los que 5.400 son fumadores y de ellos 1.200 no tienen colesterol.

94.– El AVE recorre los 350 kilómetros que separan Villacero de Villafin, parando en tres estaciones intermedias, que se encuentran a 90, 210 y 315 kilómetros de Villa bajo. En la primera permanece 5 minutos; en la segunda, 10, y en la tercera, 5. El tiempo que tarda en realizar todo el recorrido, contando las paradas, es de 1 hora y 40 minutos.

a) Calcula la velocidad media del tren.

La velocidad media viene dada por el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado, por tanto:

$$V_m = \frac{e}{t} = \frac{350\ km}{\frac{5}{3}\ h} = 210\ km/h \quad \rightarrow \quad \text{La velocidad media es de 210 km/h}$$

Donde el tiempo 1 h y 40 min lo hemos expresado en horas y en forma de fracción.

b) Si el primer tren sale a las siete de la mañana, averigua a qué hora pasa por cada parada y a qué hora llega.

Queda claro que si sale a las 7:00 llegará a destino una hora y cuarenta minutos después, por tanto, a las 8:40.

Para calcular a qué hora pasa por cada una de las paradas lo haremos mediante una proporción ya que sabemos que los 350 km los recorre en 1 hora y 20 minutos, lo que en horas son: 4/3 de hora.

$$\frac{350\ \text{km}}{\frac{4}{3}\ \text{h}} = \frac{90\ \text{km}}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{90 \cdot \frac{4}{3}}{350} = \frac{120}{350} = \frac{12}{35}\ \text{h} \approx 21\ \text{min}$$

Por tanto, a la primera parada llega aproximadamente a las 7:21 h y sale 5 min después, a las 7:26 h.

Para calcular el tiempo que tarda en llegar a la segunda parada hacemos lo mismo, pero ahora recorre:

$$210 - 90 = 120\ \text{km}$$

$$\frac{350\ \text{km}}{\frac{4}{3}\ \text{h}} = \frac{120\ \text{km}}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{120 \cdot \frac{4}{3}}{350} = \frac{160}{350} = \frac{16}{35}\ \text{h} \approx 28\ \text{min}$$

Así que, a la segunda parada llega aproximadamente a las 7:54 h y sale 10 min después, a las 8:04 h

Y, por último, para calcular el tiempo que tarda en llegar a la tercera parada repetimos el proceso, pero esta vez el Ave recorre:

$$315 - 210 = 105\ \text{km}$$

$$\frac{350\ \text{km}}{\frac{4}{3}\ \text{h}} = \frac{105\ \text{km}}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{105 \cdot \frac{4}{3}}{350} = \frac{140}{350} = \frac{14}{35}\ \text{h} \approx 24\ \text{min}$$

Así que, a la tercera parada llega aproximadamente a las 8:28 h y sale a las 8:33 h

Por tanto, pasa por las paradas a las 7:21, 7:54 y 8:28 llegando a destino a las 8:40 horas

Para verificar que todo ha ido bien, podemos comprobar que en el último trayecto de 350−315 = 35 km, tarda 8 minutos:

$$\frac{350\ \text{km}}{\frac{4}{3}\ \text{h}} = \frac{35\ \text{km}}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{35 \cdot \frac{4}{3}}{350} = \frac{\frac{140}{3}}{350} = \frac{2}{15}\ \text{h} = 8\ \text{min}$$

95.– Se cree que, por año, un coche nuevo pierde de media un 18% de su precio original. Si el coche de mis sueños, el Audi RS Q8, vale actualmente 130.000 € en el concesionario. (Examen DUO - 2023)

a) Si decidiera venderlo dentro de 15 años, ¿Cuál sería su valor en ese momento?

Si su precio pierde un 18 % cada año, esto lleva asociado un índice de variación porcentual de:

$$I_v = \left(1 - \frac{\%}{100}\right) = \left(1 - \frac{18}{100}\right) = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$$

Como pierde el mismo porcentaje cada año, el índice de variación total será el producto de todos ellos:

$$I_{V_{Total}} = I_{v_1} \cdot I_{v_2} \cdot I_{v_3} \cdots\cdots I_{v_{13}} \cdot I_{v_{14}} \cdot I_{v_{15}} = (0{,}85)\cdot(0{,}85)\cdot(0{,}85)\cdots(0{,}85)\cdot(0{,}85)\cdot(0{,}85) = (0{,}85)^{15}$$

Y ahora, para calcular la cantidad final, bastaría con multiplicar la cantidad inicial por el índice de variación porcentual (Iv) total:

$$C_f = C_o \cdot I_{V_{Total}} = 130.000 \cdot (0{,}82)^{15} = 6.624{,}47 \text{ €}$$

Por tanto, el valor del Audi RS Q8 dentro de 15 años será de 6.624,47 €

b) ¿Qué porcentaje de dinero habría perdido?

Para calcular el % perdido, usamos el Iv total:

$$I_{V_{Total}} = \left(1 - \frac{\%}{100}\right) = (0{,}82)^{15} = 0{,}050957 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{\%}{100} = 0{,}0509575$$

Y de ahí, despejaremos el %:

$$1 - \frac{\%}{100} = 0{,}051 \quad \rightarrow \quad 1 - 0{,}051 = \frac{\%}{100} \quad \rightarrow \quad 0{,}949 = \frac{\%}{100} \quad \rightarrow \quad \% = 100 \cdot 0{,}949 = 94{,}9$$

Así que el coche habría perdido aproximadamente el 95 % de su valor inicial.

96.– En un terremoto aparecen dos tipos de ondas sísmicas: las P, longitudinales y de velocidad de propagación rápida, y las ondas S, transversales y de velocidad menor. En la escala de Richter, la magnitud de un terremoto se calcula como:

$$M = \log A + 3\log(8t) - 2{,}92$$

Donde A es la amplitud en milímetros de las ondas S (medidas en el sismógrafo), y t, el tiempo transcurrido, en segundos, entre la aparición de las ondas P y las S.

a) Copia y completa la tabla, calculando las características para tres seísmos diferentes.

Seísmo	t (s)	A (mm)	M
1	8	15	3,67
2	15	4,81	4
3	71,2	45	7

Para resolverlo bastaría con sustituir dos de los valores que nos dan en la expresión de M, y calcular el tercero:

- En el seísmo 1, si sustituimos t por 8 y A por 15, obtenemos:

$$M = \log A + 3\log(8t) - 2{,}92 \quad \rightarrow \quad M = \log 15 + 3\log(8\cdot 8) - 2{,}92 \quad \rightarrow \quad M = \log 15 + 3\log 64 - 2{,}92 = 3{,}67$$

$$M = 3{,}67$$

- En el seísmo 2, si sustituimos A por 45 y M por 7, obtenemos:

$$M=\log A+3\log(8t)-2{,}92 \quad\rightarrow\quad 4=\log A+3\log(8\cdot 15)-2{,}92 \quad\rightarrow\quad \log A=4-3\log(8\cdot 15)+2{,}92=0{,}682$$
$$\rightarrow\quad \log A=0{,}682 \quad\rightarrow\quad 10^{0{,}682}=A$$

$$A=4{,}81$$

 Y por último, en el **seísmo 3,** si sustituimos t por 15 y M por 4, obtenemos:

$$M=\log A+3\log(8t)-2{,}92 \quad\rightarrow\quad 7=\log 45+3\log(8\cdot t)-2{,}92 \quad\rightarrow\quad 7+2{,}92-\log 45=3\log(8\cdot t)$$
$$\rightarrow\quad 9{,}92-\log 45=3\log 8+3\log t \quad\rightarrow\quad 9{,}92-\log 45-3\log 8=3\log t$$
$$\rightarrow\quad \frac{9{,}92-\log 45-3\log 8}{3}=\log t \quad\rightarrow\quad \log t=1{,}853 \quad\rightarrow\quad t=10^{1{,}853}=71{,}2$$

$$t=71{,}2 \text{ seg}$$

b) Calcula la relación entre las amplitudes de dos terremotos de magnitudes 6 y 9. (Suponemos el mismo valor para t.)

Si los terremotos tienen magnitudes 6 y 9, sustituyendo en la expresión dada, tenemos que:

$$M=\log A+3\log(8t)-2{,}92 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} M_1=\log A_1+3\log(8t)-2{,}92 \\ M_2=\log A_2+3\log(8t)-2{,}92 \end{cases}$$

Si a la expresión del terremoto 2 le restamos la del 1, llegamos a:

$$M_2-M_1=\log A_2+3\log(8t)-2{,}92-\left(\log A_1+3\log(8t)-2{,}92\right)=$$
$$=\log A_2+3\log(8t)-2{,}92-\log A_1-3\log(8t)+2{,}92=$$
$$=\log A_2+\cancel{3\log(8t)}-\cancel{2{,}92}-\log A_1-\cancel{3\log(8t)}+\cancel{2{,}92} \quad\rightarrow$$
$$\rightarrow\quad M_2-M_1=\log A_2-\log A_1$$

Y aplicando la propiedad delo logaritmo del cociente:

$$M_2-M_1=\log A_2-\log A_1 \quad\rightarrow\quad M_2-M_1=\log\frac{A_2}{A_1}$$

Y sustituyendo los valores de M_1 y M_2, llegamos a:

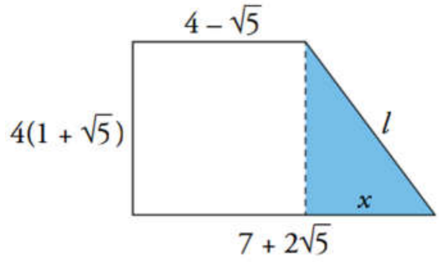
$$M_2-M_1=\log\frac{A_2}{A_1} \quad\rightarrow\quad 9-6=\log\frac{A_2}{A_1} \quad\rightarrow\quad \log\frac{A_2}{A_1}=3$$

Y por la definición de logaritmo:

$$\log\frac{A_2}{A_1}=3 \quad\rightarrow\quad \frac{A_2}{A_1}=10^3 \quad\rightarrow\quad \frac{A_2}{A_1}=1000 \quad\rightarrow\quad A_2=1000\cdot A_1$$

Por tanto, la relación entre ambas amplitudes es que la del terremoto de magnitud 9 es mil veces la del terremoto de magnitud 6. $A_2=1000\cdot A_1$

97.- Sabiendo que el perímetro de una figura plana es igual a la suma de todos sus lados, calcular el perímetro del trapecio rectángulo de la figura adjunta, para lo cual será necesario calcular antes el valor de l.



Empezamos calculando la longitud del cateto x del triángulo rectángulo de color azul, para ello restamos:

$$x=7+2\sqrt{5}-\left(4-\sqrt{5}\right)=7+2\sqrt{5}-4+\sqrt{5}=3+3\sqrt{5}=3\left(1+\sqrt{5}\right)$$

Hecho esto, calculamos la hipotenusa del triángulo azul utilizando el teorema de Pitágoras:

$$l=\sqrt{\left[4\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2+\left[3\left(1+\sqrt{5}\right)\right]^2}=\sqrt{16\left(1+\sqrt{5}\right)^2+9\left(1+\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{25\left(1+\sqrt{5}\right)^2}=5\left(1+\sqrt{5}\right)$$

Una vez conseguido el lado l, bastaría con sumar todos los lados para encontrar el valor del perímetro:

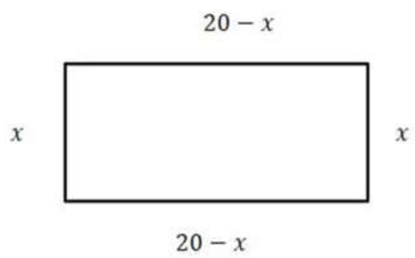
$$P=7+2\sqrt{5}+4\left(1+\sqrt{5}\right)+4-\sqrt{5}+5\left(1+\sqrt{5}\right)=7+2\sqrt{5}+4+4\sqrt{5}+4-\sqrt{5}+5+5\sqrt{5}=20+10\sqrt{5}$$

Por tanto, el perímetro pedido es $P=10\left(2+\sqrt{5}\right)$

98.- Jugando con un trozo de alambre, podemos formar figuras geométricas planas. Si doblamos un trozo de alambre de 40 cm y formamos un rectángulo, estoy seguro de que seríais capaces de hallar la expresión algebraica que definiría su área y calcular su valor para x=4.

Si llamamos x a la altura del rectángulo, las dos bases del rectángulo medirán 40–2x, y por tanto, su base mediría la mitad.

Representando estos datos en un dibujo, llegamos a:



Como el área de un rectángulo es el producto de su base por su altura, tenemos que:

$$A = \text{base x altura} = (20-x)\cdot x \quad \rightarrow \quad A(x)=20x-x^2$$

Cuando nos piden que calculemos su área para x=4, en realidad nos están pidiendo el valor numérico del polinomio A cuando x es 4:

$$A(x)=20x-x^2 \quad \rightarrow \quad A(4)=20\cdot 4-4^2=80-16=64\ \text{cm}^2$$

Por tanto, su área viene dada por $A(x)=20x-x^2$ y para x=4, $A(4)=64\ \text{cm}^2$

99.- Simplifica con la ayuda de la regla de Ruffini la siguiente fracción algebraica: (1,5 puntos)

$$\frac{2x^6-28x^4+98x^2-72}{x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12}=\text{Sacamos factor común}=\frac{2\left(x^6-14x^4+49x^2-36\right)}{x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12}=$$

Y después factorizamos con la ayuda de Ruffini para después simplificar:

$$\frac{2\left(x^6-14x^4+49x^2-36\right)}{x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12}=\frac{2\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}}=2(x-3)=2x-6$$

100.- Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas. (4,5 puntos)

a) $\frac{y}{y-2}-\frac{y}{y-1}-\frac{y}{y^2-3y+2}=\begin{cases} y-2=(y-2) \\ y-1=(y-1) \\ y^2-3y+2=(y-2)\cdot(y-1) \end{cases} \rightarrow \quad m.c.m.=(y-2)\cdot(y-1) \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad \frac{y}{y-2}-\frac{y}{y-1}-\frac{y}{y^2-3y+2}=\frac{y\cdot(y-1)}{(y-2)\cdot(y-1)}-\frac{y\cdot(y-2)}{(y-2)\cdot(y-1)}-\frac{y}{(y-2)\cdot(y-1)}=\frac{y^2-y-y^2+2y-y}{(y-2)\cdot(y-1)}=$$

$$=\frac{0}{(y-2)\cdot(y-1)}=0$$

Hacemos el mínimo común múltiplo de los tres denominadores para poder reducir a común denominador y sumar las tres fracciones algebraicas.

b) $x-\frac{x-4}{x-\frac{x+3}{x-\frac{9}{x}}}=x-\frac{x-4}{x-\frac{x+3}{\frac{x^2-9}{x}}}=x-\frac{x-4}{x-\frac{x(x+3)}{x^2-9}}=x-\frac{x-4}{x-\frac{x\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}\cdot(x-3)}}=x-\frac{x-4}{x-\frac{x}{x-3}}=x-\frac{x-4}{\frac{x\cdot(x-3)-x}{x-3}}=$

$$=x-\frac{x-4}{\frac{x^2-3x-x}{x-3}}=x-\frac{x-4}{\frac{x^2-4x}{x-3}}=x-\frac{(x-4)\cdot(x-3)}{x^2-4x}=x-\frac{\cancel{(x-4)}\cdot(x-3)}{x\cdot\cancel{(x-4)}}=x-\frac{x-3}{x}=\frac{x^2-x+3}{x}$$

Operamos de forma similar a como la hacíamos con fracciones numéricas, intentando simplificar por el camino para facilitar los cálculos.

c) $\left(y+2+\frac{4}{y-2}\right)^2\cdot\left(\frac{y^2-4}{y+2}\right)^3=\left(\frac{(y+2)\cdot(y-2)}{y-2}+\frac{4}{y-2}\right)^2\cdot\left(\frac{\cancel{(y+2)}\cdot(y-2)}{\cancel{y+2}}\right)^3=\left(\frac{y^2-4}{y-2}+\frac{4}{y-2}\right)^2\cdot(y-2)^3=$

$$=\left(\frac{y^2-4+4}{y-2}\right)^2\cdot(y-2)^3=\left(\frac{y^2}{y-2}\right)^2\cdot(y-2)^3=\frac{y^4\cdot(y-2)^{\cancel{3}}}{\cancel{(y-2)^2}}=y^4\cdot(y-2)=y^5-2y^4$$

Reducimos a común denominador en el primer paréntesis y operamos. No desarrollamos las identidades notables, mejor intentamos simplificar antes.

101.- Opera y da el resultado en la fracción irreducible: (4 puntos)

$$\frac{\left(\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-9}\cdot\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}\right):\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}}{\frac{2x^2-2x}{3x^2+3x-6}\cdot\frac{3x^2+12x+12}{4x}}=$$

Vamos a intentar descomponer todo en factores con la ayuda de las identidades notables y de la regla de Ruffini, para operar y después simplificar todo lo que se pueda.

$$\frac{\left(\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-9}\cdot\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}\right):\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}}{\frac{2x^2-2x}{3x^2+3x-6}\cdot\frac{3x^2+12x+12}{4x}}=\frac{\left(\frac{\cancel{(x-3)}\cdot\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-3)}\cdot\cancel{(x+3)}}\cdot\frac{\cancel{(x+3)}\cdot(x-1)}{\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x-1)}}\right):\frac{\cancel{(x+2)}\cdot(x-1)}{\cancel{(x+2)}\cdot(x+2)}}{\frac{2x(x-1)}{3(x^2+x-2)}\cdot\frac{3(x^2+4x+4)}{4x}}=$$

$$=\frac{(x-1):\dfrac{(x-1)}{(x+2)}}{\dfrac{\cancel{2x}\,\cancel{(x-1)}}{\cancel{3}\,\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x+2)}}\cdot\dfrac{\cancel{3}\,\cancel{(x+2)}(x+2)}{2\cdot\cancel{2x}}}=\frac{\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}}}{\dfrac{(x+2)}{2}}=\frac{\dfrac{(x+2)}{1}}{\dfrac{(x+2)}{2}}=\frac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}=2$$

102.- Calcula paso a paso y escribe su resultado en esta hoja:

$$\sqrt{\sqrt{\left[(-5)\cdot2-\frac{1}{8}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}-\sqrt{\left(1+\sqrt{-16}\cdot\sqrt{-36}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}+1\right)}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{(-4)^2\cdot(-2)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}}}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{\left[-10-\frac{1}{8}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}-\sqrt{\left(1+\sqrt{(-16)\cdot(-36)}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^4\cdot2^3\cdot2}}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}-\sqrt{(1+24)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}+\sqrt[8]{2^8}=$$

$$=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{25}{4}}+2=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}+2=1$$

103.- Una persona sale de compras y se gasta los 3/7 del dinero que lleva en gasolina, después la mitad de lo que le queda en el supermercado, más tarde, la mitad del nuevo resto en una tienda de regalos y, finalmente, la mitad de lo restante en una papelería. Si vuelve a casa con 12,50 euros:

a) ¿Cuánto dinero tenía al salir de casa?
b) ¿Cuánto se ha gastado en cada cosa?
c) ¿Con qué fracción del dinero volvió a casa?

$$\text{Shopping}\begin{cases}\text{Gasolina: }\dfrac{3}{7} & \rightarrow \quad \text{quedan: }\dfrac{4}{7}\\[2ex] \text{Súpermercado: }\dfrac{1}{2}\text{ de }\dfrac{4}{7}=\dfrac{2}{7} & \rightarrow \quad \text{Gasolina + Súper} = \dfrac{3}{7}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{7} \quad \rightarrow \quad \text{quedan: }\dfrac{2}{7}\\[2ex] \text{Regalos: }\dfrac{1}{2}\text{ de }\dfrac{2}{7}=\dfrac{1}{7} & \rightarrow \quad \text{quedan: }\dfrac{1}{7}\\[2ex] \text{Papelería: }\dfrac{1}{2}\text{ de }\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{14} & \rightarrow \quad \text{quedan: }\dfrac{1}{14}\end{cases}$$

Si vuelve a casa con 12,50 €, quiere esto decir que $\frac{1}{14}$ del dinero total son 12,50 €

Así que de casa salió con: 14 · 12,50 = 175 €

En cada cosa se ha gastado:

$$\text{Shopping}\begin{cases}\text{Gasolina: }\dfrac{3}{7}\text{ de } 175 = 75\text{ €}\\[2ex] \text{Súpermercado: }\dfrac{2}{7}\text{ de } 175 = 50\text{ €}\\[2ex] \text{Regalos: }\dfrac{1}{7}\text{ de } 175 = 25\text{ €}\\[2ex] \text{Papelería: }\dfrac{1}{14}\text{ de } 175 = 12{,}50\text{ €}\end{cases}$$

Y es evidente que volvió a casa con 1/14 del dinero con el que salió.

104.- Calcula y simplifica todo lo que puedas: $\dfrac{x-x^2}{1-x^2}+\dfrac{1+x}{x^2+2x+1}-\dfrac{1-2x}{1+x}=$

Antes de operar vamos a descomponer en factores para ver si se simplifica algo y facilitamos los cálculos:

$$\frac{x-x^2}{1-x^2}+\frac{1+x}{x^2+2x+1}-\frac{1-2x}{1+x}=\left\{\begin{array}{l} x-x^2=\text{Factor común}=x\cdot(1-x)\\ 1-x^2=\text{Id. Notable}=(1-x)\cdot(1+x)\\ x^2+2x+1=\text{Id. Notable}=(x+1)^2\end{array}\right\}=\frac{x(1-x)}{(1-x)(1+x)}+\frac{1+x}{(1+x)^2}-\frac{1-2x}{1+x}=$$

$$=\text{Simplificamos}=\frac{x\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}(1+x)}+\frac{\cancel{1+x}}{(1+x)^{\cancel{2}}}-\frac{1-2x}{1+x}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1-2x}{1+x}=\frac{x+1-1+2x}{1+x}=\frac{3x}{x+1}$$

105.- Dados los siguientes polinomios:

$$P(x)=4x^4+2x^3-3x^2+5x-1 \qquad Q(x)=x^4-2x^3+3x-5 \qquad R(x)=2x^2-3$$

Calcula: a) $3\cdot P(x)-2\cdot Q(x)+R(x)$ b) $[Q(x)]^2$ c) $P(x):R(x)$

a) $3\cdot P(x)-2\cdot Q(x)+R(x)=3\cdot(4x^4+2x^3-3x^2+5x-1)-2\cdot(x^4-2x^3+3x-5)+2x^2-3=$

$=\cancel{12x^4}+\cancel{6x^3}-\cancel{9x^2}+\cancel{15x}-\cancel{3}-\cancel{2x^4}+\cancel{4x^3}-\cancel{6x}+\cancel{10}+\cancel{2x^2}-\cancel{3}=$

$=10x^4+10x^3-7x^2+9x+4$

b) $[Q(x)]^2=Q(x)\cdot Q(x)=(x^4-2x^3+3x-5)\cdot(x^4-2x^3+3x-5)=$

$=\cancel{x^8}-\cancel{2x^7}+\cancel{3x^5}-\cancel{5x^4}-\cancel{2x^7}+\cancel{4x^6}-\cancel{6x^4}+\cancel{10x^3}+\cancel{3x^5}-\cancel{6x^4}+\cancel{9x^2}-\cancel{15x}-\cancel{5x^4}+\cancel{10x^3}-\cancel{15x}+\cancel{25}$

$=x^8-4x^7+4x^6+6x^5-22x^4+20x^3+9x^2-30x+25$

c) $P(x):R(x) \quad \rightarrow \quad 4x^4+2x^3-3x^2+5x-1 \ \underline{|\ 2x^2-3}$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +2x^3 & -3x^2 & +5x & -1 & 2x^2-3 \\ \cline{6-6}
-4x^4 & & 6x^2 & & & 2x^2+x+\frac{3}{2} \\ \hline
0 & 2x^3 & 3x^2 & +5x & & \\
 & -2x^3 & & +3x & & \\ \hline
 & 0 & 3x^2 & +8x & -1 & \\ \hline
 & & 3x^2 & 8x & -1 & \\
 & & -3x^2 & & +\frac{9}{2} & \\ \hline
 & & 0 & +8x & +\frac{7}{2} &
\end{array}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} C(x)=2x^2+x+\frac{3}{2} \\ R(x)=8x+\frac{7}{2}\end{array}\right.$$

106.- Calcula el valor de las siguientes expresiones con radicales:

a) $\dfrac{(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})^2-(5\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2}{2\sqrt{24}}$ b) $\dfrac{2a}{\sqrt{a}}+\dfrac{b}{\sqrt[3]{b^2}}-\dfrac{\sqrt{a}}{2-\sqrt{2}}=$

a) $\dfrac{(2\sqrt{2}+5\sqrt{3})^2-(5\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2}{2\sqrt{24}}=\overset{\text{Desarrollamos ambas identidades notables}}{=}=\dfrac{(8+75+20\sqrt{6})-(8+75-20\sqrt{6})}{4\sqrt{6}}=$

$\overset{\text{Operamos}}{=}\dfrac{8+75+20\sqrt{6}-8-75+20\sqrt{6}}{4\sqrt{6}}=\dfrac{40\sqrt{6}}{4\sqrt{6}}=\overset{\text{Y simplificamos}}{=}=\dfrac{\cancel{4}\cdot 10\cdot\cancel{\sqrt{6}}}{\cancel{4}\,\cancel{\sqrt{6}}}=10$

b) $$\frac{2a}{\sqrt{a}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b^2}}-\frac{\sqrt{a}}{2-\sqrt{2}}=\begin{cases}\dfrac{2a}{\sqrt{a}}=\dfrac{2a}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\dfrac{2a\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}}=\dfrac{2a\sqrt{a}}{a}=\dfrac{2\cancel{a}\sqrt{a}}{\cancel{a}}=2\sqrt{a}\\ \dfrac{b}{\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{b}{\sqrt[3]{b^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}=\dfrac{b\cdot\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^3}}=\dfrac{b\cdot\sqrt[3]{b}}{b}=\dfrac{\cancel{b}\cdot\sqrt[3]{b}}{\cancel{b}}=\sqrt[3]{b}\\ \dfrac{\sqrt{a}}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{2-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{a}}{\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{a}}{4-2}=\dfrac{2\sqrt{a}+\sqrt{2a}}{2}\end{cases}$$

Donde hemos racionalizado cada uno de los radicales por separado

Una vez racionalizados sumamos y agrupamos $\rightarrow$ $$\frac{2a}{\sqrt{a}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b^2}}-\frac{\sqrt{a}}{2-\sqrt{2}}=2\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt{a}-\frac{\sqrt{2a}}{2}=\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}-\frac{\sqrt{2a}}{2}$$

107.– Aplica las propiedades de los logaritmos para reducir a un solo logaritmo:

$$\log a-4\log b+\frac{1}{5}(\log c-2\log d)$$

$$\log a-4\log b+\frac{1}{5}(\log c-2\log d)=\log a-4\log b+\frac{1}{5}\log c-\frac{2}{5}\log d=\begin{cases}\log a=\log a\\ 4\log b=\log b^4\\ \dfrac{1}{5}\log c=\log\sqrt[5]{c}\\ \dfrac{2}{5}\log d=\log\sqrt[5]{d^2}\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Donde hemos aplicado}\\ \text{las propiedades de la potencia}\\ \log_a(P)^Q=Q\cdot\log_a P\\ \text{y de la raíz}\\ \log_a\sqrt[Q]{P}=\dfrac{1}{Q}\cdot\log_a P\end{array}\right\}=\log a-\log b^4+\log\sqrt[5]{c}-\log\sqrt[5]{d^2}=\left\{\begin{array}{l}\text{Y si aplicamos las propiedades del}\\ \text{producto: }\log_a(P\cdot Q)=\log_a P+\log_a Q\\ \text{y cociente: }\log_a\left(\dfrac{P}{Q}\right)=\log_a P-\log_a Q\end{array}\right\}$$

llegamos a: $\log a-4\log b+\frac{1}{5}(\log c-2\log d)=\log\left(\dfrac{a\cdot\sqrt[5]{c}}{b^4\cdot\sqrt[5]{b^2}}\right)$

108.– Calcula el valor de "m" para que al dividir el polinomio $P(x)=2x^5-4x^4+3x^2-(m+5)x+18$ por el binomio $(x-3)$ de resto 60.

Como se trata de una división de un polinomio por un binomio, la podemos realizar mediante la regla de Ruffini, así que cogemos los coeficientes y usamos el 3:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -4 & 0 & 3 & -m-5 & 18\\ 3 & & 6 & 6 & 18 & 63 & -3m+174\\ \hline & 2 & 2 & 6 & 21 & -m+58 & \boxed{60}\end{array}$$

Como el resto, según el enunciado, es 60 llegamos a que:

$$18-3m+174=60$$

Que es una ecuación de primer grado en m y cuya solución es:

$$192-3m=60\quad\rightarrow\quad -3m=60-192\quad\rightarrow\quad -3m=-132\quad\rightarrow\quad m=\frac{132}{3}\quad\rightarrow\quad m=44$$

Por tanto, m=44

109.- En una determinada ciudad se reciclaron hace dos años 3.520 toneladas de vidrio. El año pasado, la cantidad reciclada disminuyó en un 7,3 %. Tras una serie de campañas de publicidad, este año se consiguió reciclar un 24,8 % más. ¿Cuánto vidrio se ha reciclado en este último año? ¿Cómo ha variado la cantidad de vidrio reciclado respecto del primer año?

La cantidad de vidrio reciclado ha sufrido dos variaciones en los dos últimos años, así que vamos a calcular los índices de variación asociados a cada una de ellas:

- Baja un 7,3% $\rightarrow \quad Iv_1 = 1 - \frac{\%}{100} = 1 - \frac{7,3}{100} = 1 - 0,073 = 0,927$
- Sube un 24,8% $\rightarrow \quad Iv_2 = 1 + \frac{\%}{100} = 1 + \frac{24,8}{100} = 1 + 0,248 = 1,248$

El índice de variación total se calcula multiplicando todos los índices parciales:

$$I_{V_{Total}} = Iv_1 \cdot Iv_2 = 0,927 \cdot 1,248 = 1,156896$$

Para calcular la cantidad de vidrio reciclada este año, multiplicaremos la cantidad reciclada hace dos años por el índice de variación total:

$$\text{Cantidad}_{\text{final}} = \text{Cantidad}_{\text{inicial}} \cdot \text{Iv}_{\text{Total}} \quad \rightarrow \quad C_f = 3.502 \text{ Ton} \cdot 1,156896 = 4.051,45 \text{ Ton}$$

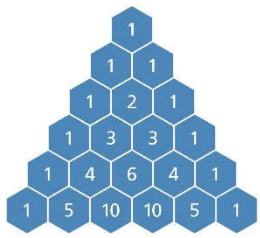
Para calcular el porcentaje total de subida o bajada nos fijamos en el índice de variación total y como es mayor que 1 lo que se pasa de uno 0,156896 lo multiplicamos por 100 y obtenemos el porcentaje:

$$\% = 0,156896 \cdot 100 = 15,6896\% \approx 15,7\%$$

Por tanto, la cantidad de vidrio reciclada este año ronda las 4.051 toneladas, y esta cantidad ha aumentado un 15,7 %

110.- Calcula: $(2x-3)^5$

Con la ayuda del **triángulo de Pascal** dibujado a la derecha, sabemos que:



$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Así que bastaría con cambiar a por 2x y b por −3 y calcular:

$$(2x-3)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4(-3) + 10(2x)^3(-3)^2 + 10(2x)^2(-3)^3 + 5(2x)(-3)^4 + (-3)^5 =$$
$$= 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243$$