Departamento de Matemáticas	Nombre:		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO B**	Examen VIP	
	Fecha:	16 de junio de 2025		

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25 % de la nota.

1.– Calcula el valor de la siguiente expresión: $\left(\dfrac{\left(2\sqrt{45}+\dfrac{3}{2}\sqrt{72}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\cdot 10\sqrt{5}}{2\sqrt{180}}\right)^4 =$

2.– En una muestra de pacientes que están siendo tratados de una enfermedad pulmonar, se observa que los 2/5 son no fumadores. Del resto de pacientes, los 2/9 no tienen colesterol. Si los pacientes que son fumadores y tienen colesterol son 210, ¿cuántos pacientes son fumadores sin colesterol?, ¿cuántos pacientes son fumadores?, ¿de cuántos pacientes consta la muestra?

3.– Dados los siguientes polinomios:

$$P(x)=3x^4-6x^3+4x-2 \qquad Q(x)=x^3-2x^2-3x+1 \qquad S(x)=x^2+1$$

Calcula: *a)* $P(x)\cdot Q(x)-3\cdot S(X)$ *b)* $P(x):S(x)$

4.– Calcula con la ayuda de las propiedades de los logaritmos el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\log_2 \sqrt[5]{8}+\log_2\sqrt{256}+\log_2 8^{-1}}{2\cdot\log_2 4+3\cdot\log_4 2^{-2}}=$$

5.– Resuelve las siguientes ecuaciones: **(1,5 puntos)**

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{x^2-9}=0 \qquad 4^{x+1}+2^{x+3}-320=0 \qquad 2\log(x+1)-\log x=\log(x+3)$$

6.– Cuando dos bombas de agua actúan a la vez, tardan en vaciar un pozo 15 horas. Si actuara solo una, tardaría en vaciarlo 16 horas más que si actuara la otra. ¿Cuánto tardarían en vaciarlo cada una por separado?

7.– Una caja contiene bolas blancas y negras. Si se añade una bola blanca, éstas representan entonces el 25% del contenido de la caja. Si se quita una blanca, las bolas blancas representan el 20% del total. ¿Cuántas bolas de cada color hay en la caja?

8.– Desde la orilla de un río vemos un gran árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40°, y si se retroceden 4 m, se ve bajo un ángulo de 28°. Calcula, primero la altura del árbol y después la anchura del río.

9.– Escribe la ecuación general de las rectas siguientes: **(1,5 puntos)**

a) Paralela a la recta s: $2x+3y-9=0$ y que pasa por (4,5)
b) Perpendicular a la recta r: $x-2y-3=0$ y que pasa por (7,1)
c) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

Departamento de Matemáticas	Nombre:	SOLUCIONES	3ª Evaluación	11
	Curso:	4º ESO A	Examen VIP	
	Fecha:	16 de junio de 2025		

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25 % de la nota.

1.– Calcula el valor de la siguiente expresión: $\dfrac{\left(2\sqrt{45}+\frac{3}{2}\sqrt{72}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\cdot 10\sqrt{5}}{2\sqrt{180}}=$

$$\left(\frac{\left(2\sqrt{45}+\frac{3}{2}\sqrt{72}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\cdot 10\sqrt{5}}{2\sqrt{180}}\right)^4=\left(\frac{\left(6\sqrt{5}+9\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\cdot 10\sqrt{5}}{12\sqrt{5}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{\left(60-18\sqrt{10}+18\sqrt{10}-54\right)\cdot 10\sqrt{5}}{12\sqrt{5}}\right)^4=\left(\frac{6\cdot 10\sqrt{5}}{12\sqrt{5}}\right)^4=5^4=625$$

Donde hemos descompuesto en factores primos los radicandos y hemos extraído fuera todos los factores posibles, hemos operado y simplificado al final.

2.– En una muestra de pacientes que están siendo tratados de una enfermedad pulmonar, se observa que los 2/5 son no fumadores. Del resto de pacientes, los 2/9 no tienen colesterol. Si los pacientes que son fumadores y tienen colesterol son 210, ¿cuántos pacientes son fumadores sin colesterol?, ¿cuántos pacientes son fumadores?, ¿de cuántos pacientes consta la muestra?

Si nos ayudamos de unas llaves para representar los datos del problema, llevamos a:

Pacientes
- $\frac{2}{5}$ No Fumadores
- $\frac{3}{5}$ Si Fumadores
  - $\frac{2}{9}$ No Colesterol
  - $\frac{7}{9}$ Si Colesterol $\rightarrow$ 210 Pacientes

Por tanto, como podemos observar en el cuadro anterior, 7/9 de los 3/5 de los pacientes son pacientes fumadores y con colesterol, y como nos dicen que estos son 210, con esto ya podemos calcular todo, empezando por el número de pacientes.

$$\frac{7}{9}\,de\,\frac{3}{5}\text{ de los pacientes son 210 pacientes}\quad\rightarrow\quad\frac{7}{9}\frac{3}{5}=\frac{7}{15}$$

Si $\frac{7}{15}$ de los pacientes son 210, $\frac{1}{15}$ son 30 pacientes y $\frac{15}{15}$ son 30·15=450 pacientes.

El total de pacientes de la muestra es de 450 pacientes.

- Fumadores sin colesterol son: $\frac{2}{9}\,de\,\frac{3}{5}\,de\,450\quad\rightarrow\quad\frac{2}{9}\frac{3}{5}\cdot 450=60$ pacientes
- Fumadores son: $\frac{3}{5}\,de\,450\quad\rightarrow\quad\frac{3}{5}\cdot 450=270$ pacientes

Por tanto, la muestra es de 450 pacientes, de los cuales 270 son fumadores y de ellos 60 no tienen colesterol.

3.– Dados los siguientes polinomios:

$$P(x)=3x^4-6x^3+4x-2 \qquad Q(x)=x^3-2x^2-3x+1 \qquad S(x)=x^2+1$$

Calcula: *a)* $P(x)\cdot Q(x)-3\cdot S(X)$ *b)* $P(x):S(x)$

a) $P(x)\cdot Q(x)-3\cdot S(X)=\left(3x^4-6x^3+4x-2\right)\cdot\left(x^3-2x^2-3x+1\right)-3\left(x^2+1\right)=3x^7-6x^6-9x^5+3x^4-6x^6+12x^5+$
$+18x^4-6x^3+4x^4-8x^3-12x^2+4x-2x^3+4x^2+6x-2-3x^2-3=3x^7-12x^6+3x^5+25x^4-16x^3-11x^2+10x-5$

c) $P(x):S(x)$

					x^2+1
$3x^4$	$-6x^3$	$+0x^2$	$+4x$	-2	
$-3x^4$		$-3x^2$			$3x^2-6x-3$
0	$-6x^3$	$-3x^2$	$+4x$		
	$+6x^3$		$+6x$		
	0	$-3x^2$	$+10x$	-2	
			$+6x$		
		$-3x^2$	$+10x$	-2	
		$+3x^2$		$+3$	
		0	$+10x$	$+1$	

$$\rightarrow \begin{cases} C(x)=3x^2-6x-3 \\ R(x)=10x+1 \end{cases}$$

4.– Calcula con la ayuda de las propiedades de los logaritmos el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\log_2\sqrt[5]{8}+\log_2\sqrt{256}+\log_2 8^{-1}}{2\cdot\log_2 4+3\cdot\log_4 2^{-2}}=$$

Como todos los números de los argumentos de los distintos logaritmos son potencias de 2 y de 4, igual que las bases de los logaritmos, todos se pueden calcular, así que vamos a ir, con la ayuda de las propiedades de los logaritmos, calculando cada uno de ellos:

$$\frac{\log_2\sqrt[5]{8}+\log_2\sqrt{256}+\log_2 8^{-1}}{2\cdot\log_2 4+3\cdot\log_4 2^{-2}}=\frac{\log_2\left(\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt{256}\cdot 8^{-1}\right)}{2\cdot\log_2 2^2+3\cdot\log_4 4^{-1}}=\frac{\log_2\left(\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt{2^8}\cdot 2^{-3}\right)}{4\cdot\log_2 2-3\cdot\log_4 4}=\frac{\log_2\left(2^{\frac{3}{5}}\cdot 2^4\cdot 2^{-3}\right)}{4\cdot 1-3\cdot 1}=$$
$$=\frac{\log_2\left(2^{\frac{3}{5}}\cdot 2\right)}{1}=\log_2\left(2^{\frac{8}{5}}\right)=\frac{8}{5}\log_2 2=\frac{8}{5}$$

5.– Resuelve las siguientes ecuaciones: **(1,5 puntos)**

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{x^2-9}=0 \qquad 4^{x+1}+2^{x+3}-320=0 \qquad 2\log(x+1)-\log x=\log(x+3)$$

a) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x^2-9}=0 \rightarrow \sqrt{3x+1}=\sqrt{x^2-9}$ → (Elevamos al cuadrado ambos miembros) $3x+1=x^2-9$ → (Agrupamos) $x^2-3x-10=0$

→ (Factorizamos) $(x-5)\cdot(x+2)=0 \rightarrow \begin{cases} \text{Si } x-5=0 \rightarrow x_1=5 \\ \text{Si } x+2=0 \rightarrow x_2=-2 \end{cases}$

Comprobamos ambas soluciones y descartamos la solución x=–2 porque hace que la segunda raíz sea negativa.

Por tanto, x=5

b) $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0$ → (Descomponemos en potencias de 2) $\left(2^2\right)^{x+1}+2^x\cdot 2^3-320=0 \rightarrow 2^{2x}\cdot 2^2+2^x\cdot 2^3-320=0 \rightarrow$

$\rightarrow 4\cdot\left(2^x\right)^2+8\cdot 2^x-320=0$ → (Hacemos el cambio de variable: $z=2^x$) $4z^2+8z-320=0$ → (Simplificamos) $z^2+2z-80=0 \rightarrow$

→ (Factorizamos) $(z-8)\cdot(z+10)=0 \rightarrow \begin{cases} \text{Si } z-8=0 \rightarrow z_1=8 \\ \text{Si } z+10=0 \rightarrow z_2=-10 \end{cases}$

Si deshacemos el cambio de variable: $\begin{cases} \text{Si } z=8 \rightarrow z_1=8 \rightarrow 2^x=8 \rightarrow 2^x=2^3 \rightarrow x=3 \\ \text{Si } z=-10 \rightarrow z_2=-10 \rightarrow 2^x=-10 \rightarrow \text{No sol} \end{cases}$

Por tanto, x=3

c) $2\log(x+1)-\log x=\log(x+3)$ → (Aplicamos propiedades de los Logaritmos) $\log(x+1)^2-\log x=\log(x+3) \rightarrow \log\dfrac{(x+1)^2}{x}=\log(x+3)$

→ (Si los logaritmos son iguales, sus argumentos tambien) $\dfrac{(x+1)^2}{x}=x+3$ → (Operando) $x^2+2x+1=x^2+3x$ → (Agrupando) $x=1$

Comprobamos que todo va bien, verificando si los logaritmos tienen problemas con x=1, pero vemos que no.

Por tanto, la solución es x=1.

6.– Cuando dos bombas de agua actúan a la vez, tardan en vaciar un pozo 15 horas. Si actuara solo una, tardaría en vaciarlo 16 horas más que si actuara la otra. ¿Cuánto tardarían en vaciarlo cada una por separado?

Se trata de un problema de ecuaciones, pero particularmente uno de grifos, así que si llamamos x al tiempo (en horas) que tardaría una de las bombas, entonces la otra tardaría $16+x$ horas.

Para plantear la ecuación, nos fijamos en cuanto depósito se vacía en una hora con cada una de las bombas o con las dos:

$\left.\begin{array}{l} \text{Bomba 1}: x \\ \text{Bomba 2}: x+16 \\ \text{Las dos}: 15 \end{array}\right\}$ → (En 1 hora vaciaran:) $\left.\begin{array}{l} \text{Bomba 1}: \dfrac{1}{x} \\ \text{Bomba 2}: \dfrac{1}{x+16} \\ \text{Las dos}: \dfrac{1}{15} \end{array}\right\}$ → (Lo que hagan las dos bombas a la vez en 1 hora será igual a la suma de lo que haga cada una pors eparado también en 1 hora) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+16}=\dfrac{1}{15} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{15(x+16)}{x\cdot(x+16)\cdot 15}+\dfrac{15x}{x\cdot(x+16)\cdot 15}=\dfrac{x(x+16)}{x\cdot(x+16)\cdot 15} \rightarrow 15x+240+15x=x^2+16x \rightarrow$

$\rightarrow x^2+16x-30x-240=0 \rightarrow x^2-14x-240=0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-14 \\ c=-240 \end{cases} \leftrightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\rightarrow x=\dfrac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 1\cdot(-240)}}{2\cdot 1}=\dfrac{14\pm\sqrt{196+960}}{2}=\dfrac{14\pm\sqrt{1156}}{2}=\dfrac{14\pm 34}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{14+34}{2}=\dfrac{48}{2}=24 \\ x_2=\dfrac{14-34}{2}=\dfrac{-20}{2}=-10 \end{cases}$

Desechamos la segunda por ser negativa (los tiempos no pueden ser negativos) y nos quedamos con la primera.

Por tanto, una bomba es capaz de vaciar el depósito en 24 horas y la otra en 24 + 16 = 40 horas.

7.– Una caja contiene bolas blancas y negras. Si se añade una bola blanca, éstas representan entonces el 25% del contenido de la caja. Si se quita una blanca, las bolas blancas representan el 20% del total. ¿Cuántas bolas de cada color hay en la caja?

Se trata de un problema que se puede resolver mediante un sistema de ecuaciones lineales. Si llamamos N al número de bolas negras y B al número de bolas blancas, en total dentro de la caja hay B+N bolas. Así que con esto trataremos de plantear el sistema:

- ✓ Si se añade una bola blanca, ahora hay B+1 bolas blancas, y estas representan el 25 % del total (la cuarta parte), por tanto, la primera ecuación es:

$$B+1=\frac{B+N+1}{4} \xrightarrow{\text{Operando}} 4B+4=B+N+1 \rightarrow 3B-N=-3$$

- ✓ Si se saca una bola blanca, ahora hay B-1 bolas blancas y estas representan el 20 % del total (la quita parte), por tanto, la segunda ecuación es:

$$B-1=\frac{B+N-1}{5} \xrightarrow{\text{Operando}} 5B-5=B+N-1 \rightarrow 4B-N=4$$

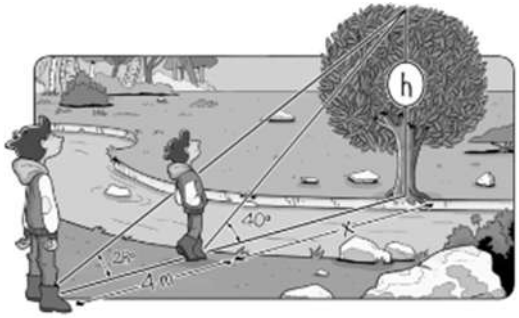
El sistema queda de la forma: $\begin{cases} 3B-N=-3 \\ 4B-N=4 \end{cases}$ $\xrightarrow[\text{Si a la primera le restamos la segunda}]{\text{Por Reducción}}$ $-B=-7 \rightarrow B=7$

Y sustituyendo en $4B-N=4$, obtendremos el valor de N:

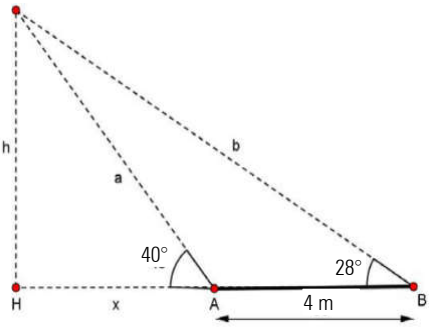
$$4B-N=4 \rightarrow 47-N=4 \rightarrow N=28-4=24$$

Por tanto, en la caja hay 7 bolas blancas y 24 bolas negras.

8.– Desde la orilla de un río vemos un gran árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40°, y si se retroceden 4 m, se ve bajo un ángulo de 28°. Calcula, primero la altura del árbol y después la anchura del río.



Si nos ayudamos de un croquis obtenemos el dibujo de la izquierda, donde hemos llamado h a la altura del árbol y x a la anchura del rio.



La razón trigonométrica que relaciona los catetos opuestos y los catetos contiguos es la tangente, así que:

En el triángulo pequeño: $\tan 40° = \frac{h}{x}$

Mientras que en el triángulo grande: $\tan 28° = \frac{h}{x+4}$

Con ambas ecuaciones, formamos un sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \tan 40° = \dfrac{h}{x} \\ \tan 28° = \dfrac{h}{x+4} \end{cases}$

Como nos piden calcular primero h, vamos a despejar x en la primera ecuación:

$$\text{De } \tan 40° = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{h}{\tan 40°}$$

Para después sustituirla en la segunda:

$$\text{En } \tan 28° = \frac{h}{x+4} \quad \rightarrow \quad \tan 28° = \frac{h}{\frac{h}{\tan 40°}+4} \quad \overset{\text{Operando un poco}}{\rightarrow} \quad \tan 28° = \frac{h}{\frac{h}{\tan 40°}+\frac{4\cdot\tan 40°}{\tan 40°}} \quad \rightarrow$$

$$\tan 28° = \frac{h}{\frac{h+4\tan 40°}{\tan 40°}} \quad \rightarrow \quad \tan 28° = \frac{h\cdot\tan 40°}{h+4\tan 40°} \quad \overset{\text{Operando}}{\rightarrow} \quad (h+4\tan 40°)\tan 28° = h\cdot\tan 40° \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad h\cdot\tan 28° + 4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28° = h\cdot\tan 40° \quad \overset{\text{Agrupando}}{\rightarrow} \quad h\cdot\tan 40° - h\cdot\tan 28° = 4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28° \quad \rightarrow$$

$$\overset{\text{Sacamos factor común h}}{\rightarrow} \quad h\cdot(\tan 40° - \tan 28°) = 4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28° \quad \overset{\text{Despejamos h}}{\rightarrow} \quad h = \frac{4\cdot\tan 40°\cdot\tan 28°}{\tan 40° - \tan 28°} = 5{,}806 \ m$$

$$\rightarrow \quad h = 5{,}806 \ m \quad \rightarrow \quad \text{El árbol mide 5,81 metros}$$

Y para calcular la anchura del río x, la calcularemos de: $\tan 40° = \frac{h}{x}$, por tanto:

$$\tan 40° = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{h}{\tan 40°} = \frac{5{,}8057}{\tan 40°} \quad \rightarrow \quad x = 6{,}919 \ m \quad \rightarrow \quad \text{La anchura del río es de 6,92 metros}$$

9.– Escribe la ecuación general de las rectas siguientes:

a) Paralela a la recta s: $2x + 3y - 9 = 0$ y que pasa por (4,5)

b) Perpendicular a la recta r: $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por (7,1)

c) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

a) Paralela a la recta s: $2x + 3y - 9 = 0$ y que pasa por (4,5)

Si es paralela a la recta s, tiene el mismo vector director, así que la ecuación de la nueva recta sería:

$$2x + 3y + k = 0$$

Nos falta conocer k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto (4,5), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2\cdot 4 + 3\cdot 5 + k = 0 \quad \rightarrow \quad 8 + 15 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -23$$

Por lo tanto, la recta pedida es: $2x + 3y - 23 = 0$

b) Perpendicular a la recta r: $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por (7,1)

Si es perpendicular tiene como vector director el vector (1,–2) y por tanto su ecuación vendrá dada por:

$$2x + y + k = 0$$

Nos falta conocer k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto (7,1), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2\cdot 7 + 1\cdot 1 + k = 0 \quad \rightarrow \quad 14 + 1 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -15$$

Por lo tanto, la recta pedida es: 2x + y – 15 = 0

c) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

Las ecuaciones de ambas rectas son: $r: x - 2y - 3 = 0$ y $s: 2x + 3y - 9 = 0$

Sus vectores directores son: $\vec{r} = (2,1)$ y $\vec{s} = (-3,2)$ que como podemos observar no son paralelos ni perpendiculares.

Por tanto, las rectas r y s son secantes no perpendiculares.