Departamento de Matemáticas	Nombre:		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO B**	Examen Final	
	Fecha:	11 de junio de 2023	Cada apartado vale 1,25 puntos	

IES ABYLA (Ceuta)

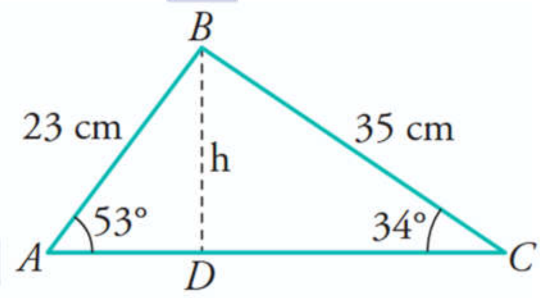
La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

Fátima vuelve a su casa y desde un punto de la calle observa bajo un ángulo de 20° que la luz de su balcón está encendida. Se acerca 25 m más hacia el bloque y el ángulo ahora es de 25°.

1) ¿A qué altura está su balcón?

2) ¿A qué distancia del bloque de pisos se encuentra Fátima?

Dado el siguiente triángulo:



3) Halla la longitud AC.

4) Calcula el área del triángulo ABC.

Sean los puntos A (4, 4), B (−2, 3) y C (3, −2)

5) Comprueba que forman un triángulo isósceles.

6) Calcula su área.

Dadas las rectas $r:\{3x-5y+15=0$ y $s:\{\text{pasa por } (-2,3) \text{ y } (8,3)$

7) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

8) Escribe la ecuación explícita de la recta perpendicular a r que pasa por el origen de coordenadas.

Departamento de Matemáticas	Nombre:	S O L U C I O N E S		3ª Evaluación	11
	Curso:	4º ESO B	Examen Final		
	Fecha:	11 de junio de 2023	Cada apartado vale 1,25 puntos		

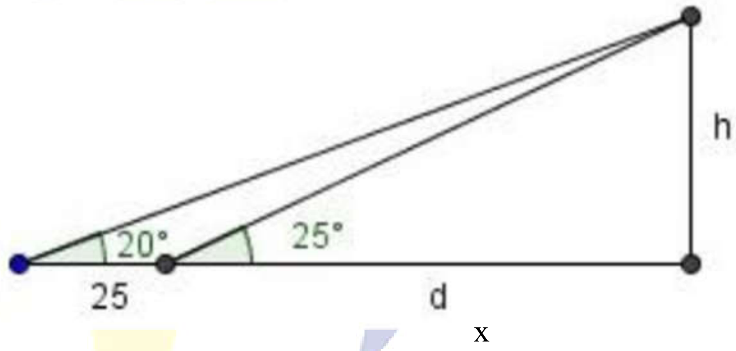
IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

Fátima vuelve a su casa y desde un punto de la calle observa bajo un ángulo de 20° que la luz de su balcón está encendida. Se acerca 25 m más hacia el bloque y el ángulo ahora es de 25°.

1) ¿A qué altura está su balcón?

Para calcular la altura del balcón, vamos a utilizar la tangente, que es la razón trigonométrica que relaciona el cateto opuesto con el cateto contiguo y con ella vamos a plantear un sistema de ecuaciones no lineales n el que las incógnitas serán x y h.



$$\begin{cases} 1)\ tg\ 20° = \dfrac{h}{x+25} \\ 2)\ tg\ 25° = \dfrac{h}{x} \end{cases}$$

Para resolverlo, despejamos x de la segunda ecuación y lo sustituiremos en la primera:

$$tg\ 25° = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{h}{tg\ 25°}$$

De la ecuación 2) despejamos x:

Y lo sustituimos en la 1) $tg\ 20° = \dfrac{h}{x+25} \quad \rightarrow \quad tg\ 20° = \dfrac{h}{\dfrac{h}{tg\ 25°}+25} \quad \rightarrow$ operando un poco:

$$tg\ 20° = \frac{h}{\dfrac{h}{tg\ 25°}+25} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{h}{tg\ 25°}+25\right)tg\ 20° = h \quad \rightarrow \quad \left(\frac{h}{tg\ 25°}+\frac{25 \cdot tg\ 25°}{tg\ 25°}\right)tg\ 20° = h$$

$$(h + 25 \cdot tg\ 25°) \cdot tg\ 20° = h \cdot tg\ 25° \quad \rightarrow \quad h \cdot tg 20° + 25 \cdot tg 25° \cdot tg 20° = h \cdot tg\ 25°$$

Despejando h, llegamos a:

$$25 \cdot tg 25° \cdot tg 20° = h \cdot tg\ 25° - h \cdot tg 20° \quad \rightarrow \quad 25 \cdot tg 25° \cdot tg 20° = h \cdot (tg\ 25° - tg 20°) \quad \rightarrow \quad h = \frac{25 \cdot tg 25° \cdot tg 20°}{tg\ 25° - tg 20°}$$

Y de aquí:

$$h = \frac{25 \cdot tg 25° \cdot tg 20°}{tg\ 25° - tg 20°} = 41{,}46\ m$$

Así que, el balcón está a 41,46 m de altura.

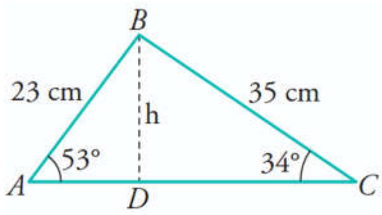
2) ¿A qué distancia del bloque de pisos se encuentra Fátima?

En este punto nos piden el valor de x del dibujo, que calcularemos con $x = \dfrac{h}{tg\ 25^\circ}$, por tanto, con sustituir lo obtenido en el apartado anterior, nos bastaría:

$$x = \frac{h}{tg\ 25^\circ} = \frac{41{,}46}{tg\ 25^\circ} = 88{,}91\ m$$

Así que, Fátima está a 88,91 metros de la torre.

Dado el siguiente triángulo:



3) Halla la longitud AC.

Si nos fijamos en el triángulo $\widehat{ABD}$, podemos calcular $\overline{AD}$:

$$\cos 53^\circ = \frac{\overline{AD}}{23} \quad \rightarrow \quad \overline{AD} = 23 \cdot \cos 53^\circ = 13{,}84\ cm$$

Si ahora nos fijamos en el triángulo $\widehat{BDC}$, podemos calcular $\overline{AD}$:

$$\cos 34^\circ = \frac{\overline{DC}}{35} \quad \rightarrow \quad \overline{DC} = 35 \cdot \cos 34^\circ = 29{,}01\ cm$$

Por tanto, la distancia $\overline{AC}$ será la suma de ambas:

$$\overline{AC} = \overline{AD}, + \overline{DC} = 13{,}85 + 29{,}01 = 42{,}85\ cm$$

Así que, lo longitud AC es de 42,85 cm.

4) Calcula el área del triángulo ABC.

Sabemos que el área de cualquier triángulo viene dada por el semiproducto de su base por su altura, así que, conocida la base AC, calcularemos la altura h:

Si nos fijamos otra vez en el triángulo $\widehat{ABD}$, podemos calcular h:

$$sen\ 53^\circ = \frac{h}{23} \quad \rightarrow \quad h = 23 \cdot sen\ 53^\circ = 18{,}37\ cm$$

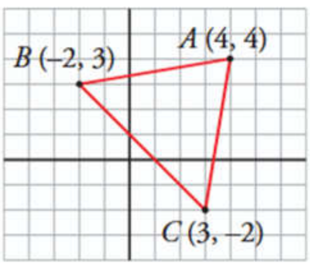
Así que, con la base y la altura, el área viene dada por:

$$A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} = \frac{42{,}85 \cdot 18{,}37}{2} = 393{,}55\ cm^2$$

Con esto, el área del triángulo ABD es de 393,55 cm^2

Sean los puntos A (4, 4), B (−2, 3) y C (3, −2)

5) Comprueba que forman un triángulo isósceles.

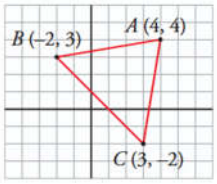


Lo primero será representar los puntos en un plano cartesiano para tener mejor idea del ejercicio.

Hecho esto, parece observarse un triángulo que parece isósceles, pero no basta con que lo parezca, sino que lo sea.

Para comprobarlo calcularemos los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ y sus módulos:

El módulo de un vector $\vec{V}=(v_x,v_y)$ es la distancia entre el origen y el extremo y se calcula mediante el teorema de Pitágoras:



$$\|\vec{V}\|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

Así que empezaremos por calcular los vectores y luego sus módulos:

⊗ $\vec{AB}=B-A=(-2,3)-(4,4)=(-6,-1) \rightarrow \vec{AB}=(-6,-1) \rightarrow \|\vec{AB}\|=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$
$\rightarrow \|\vec{AB}\|=\sqrt{37}$

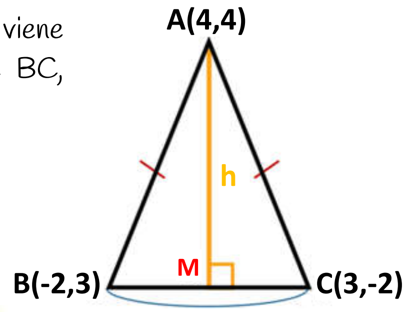
⊗ $\vec{AC}=C-A=(3,-2)-(4,4)=(-1,-6) \rightarrow \vec{AC}=(-1,-6) \rightarrow \|\vec{AC}\|=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$
$\rightarrow \|\vec{AC}\|=\sqrt{37}$

⊗ $\vec{BC}=C-B=(3,-2)-(-2,3)=(5,-5) \rightarrow \vec{BC}=(5,-5) \rightarrow \|\vec{BC}\|=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}$
$\rightarrow \|\vec{BC}\|=5\sqrt{2}$

Vemos que dos de sus lados son iguales.

Por tanto, el triángulo es isósceles puesto que tiene dos lados iguales y uno desigual.

6) Calcula su área.



Como ya hemos comentado en el ejercicio anterior, el área de cualquier triángulo viene dada por el semiproducto de su base por su altura, así que, conocida la base BC, calcularemos la altura h.

Para ello, empezaremos calculando el punto medio del segmento $\overline{BC}$:

$$M_{BC}=\left(\frac{b_x+c_x}{2},\frac{b_y+c_y}{2}\right)=\left(\frac{-2+3}{2},\frac{3-2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \rightarrow M_{BC}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Conocido el punto medio M_{BC}, la altura será la distancia entre el punto A y el M_{BC}:

$$h=\|\vec{AM}\|$$

Calculamos primero $\vec{AM}$: $\rightarrow \vec{AM}=M-A=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-(4,4)=\left(\frac{-7}{2},\frac{-7}{2}\right)$

Y su módulo:

$$\|\vec{AM}\|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{49}{4}}=\sqrt{\frac{98}{4}}=\frac{7\sqrt{2}}{2} \rightarrow \|\vec{AM}\|=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Así que, el área será:

$$A_\Delta=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\overline{BC}\cdot h}{2}=\frac{5\sqrt{2}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{70}{4}=\frac{35}{2}=17{,}5\ u.a.$$

Así que, el área es de 17,5 unidades de área.

Dadas las rectas $r:\{3x-5y+15=0$ y $s:\{$pasa por $(-2,3)$ y $(8,3)$

7) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

Para estudiar la posición relativa nos ayudaremos de los vectores directores de las rectas, así que los calculamos:

- El vector director de la recta r es: $\vec{r}=(5,3)$
- El vector director de la recta s es: $\vec{s}=B-A=(8+2,3-3)=(10,0)$

Podemos observar que los vectores no son proporcionales

$$\frac{r_x}{s_x}\neq\frac{r_y}{s_y} \quad\rightarrow\quad \frac{5}{10}\neq\frac{3}{0} \quad\rightarrow\quad \vec{r}\neq k\cdot\vec{s}$$

Por tanto, las rectas son secantes.

$$\text{Y como } r_x\cdot s_x+r_y\cdot s_y\neq 0 \quad\rightarrow\quad 5\cdot 10+3\cdot 0=50\neq 0$$

Las rectas no son perpendiculares.

Por tanto, las rectas son secantes no perpendiculares.

8) Escribe la ecuación explícita de la recta perpendicular a r que pasa por el origen de coordenadas.

El vector director de la recta r es: $\vec{r}=(5,3)$, por tanto, el vector director de una recta S, perpendicular a r, será: $\vec{s}=(-3,5)$.

Sabemos que la ecuación explícita de la recta es de la forma, **y = m·x + b**, donde:

- **m es la pendiente** o inclinación de la recta con respecto al eje x y que viene dada por el cociente $m=-\frac{s_y}{s_x}=\frac{5}{3}$
- **b es la ordenada en el origen**, que en nuestro caso es 0 porque la recta pasa por el origen de coordenadas.

Según todo esto, la ecuación explícita de la recta s es: $s:\left\{y=-\frac{5}{3}x\right.$

Departamento de Matemáticas	Nombre:		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO B**	Simulacro Examen Final	
	Fecha:	11 de junio de 2023	Cada apartado vale 1 punto	

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

Sabemos que un ángulo del tercer cuadrante verifica que $sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Calcula el valor exacto de las otras razones trigonométricas.

2) Da el valor (en radianes) de un ángulo de otro cuadrante que tenga exactamente el mismo coseno que α.

Situada en un llano se encuentra una torre. Desde un punto se observa la parte más alta con un ángulo de 10° con la horizontal, y si nos aproximamos a la torre 50 metros observamos que el ángulo es ahora de 25°.

3) ¿Qué altura tiene la torre?

4) ¿A qué distancia de la torre nos encontramos?

Dados los puntos A(-2,1), B(3,2) y C(4,-3) halla:

5) Las coordenadas del punto D, simétrico de B respecto de M.

6) Comprueba que el polígono ABDC es un cuadrado.

Escribe la ecuación general de las rectas siguientes:

7) Paralela a la recta s: $2x+3y-9=0$ y que pasa por (4,5)

8) Perpendicular a la recta r: $x-2y-3=0$ y que pasa por (7,1)

La recta r: x + 2y −9 = 0 es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto A (2, 1).

9) Halla la ecuación explícita de la recta que contiene al segmento.

10) Calcula el punto de intersección entre las rectas r y s, y averigua las coordenadas del otro extremo del segmento

Departamento de Matemáticas	Nombre:	**SOLUCIONES**		3ª Evaluación	11
	Curso:	**4º ESO B**	Simulacro Examen Final		
	Fecha:	11 de junio de 2023	Cada apartado vale 1 punto		

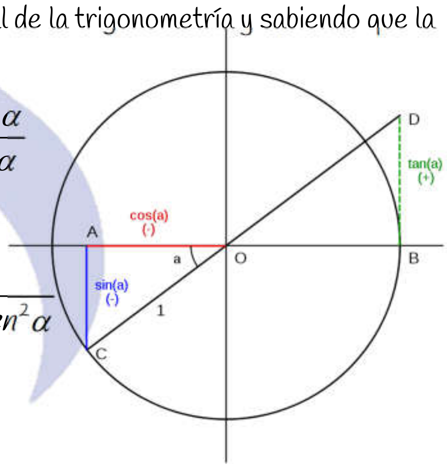
IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

Sabemos que un ángulo del tercer cuadrante verifica que $sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Calcula el valor exacto de las otras razones trigonométricas.

Calcularemos las otras razones trigonométricas usando la identidad fundamental de la trigonometría y sabiendo que la tangente de un ángulo es el cociente entre su seno y su coseno:



$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad tg\alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$$

Cono nos dan el seno, de la Ec. Fundamental de la trigonometría despejaremos el coseno:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

$$\rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Como nos encontramos en el tercer cuadrante, tanto el seno como el coseno son negativos, mientras que la tangente es positiva.

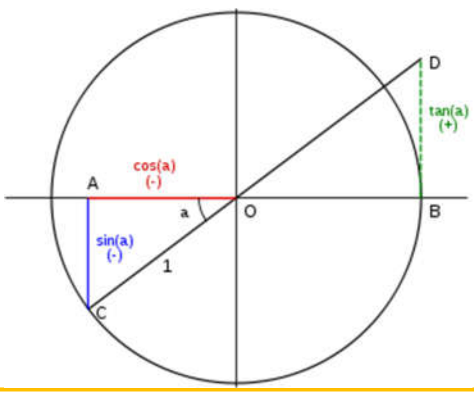
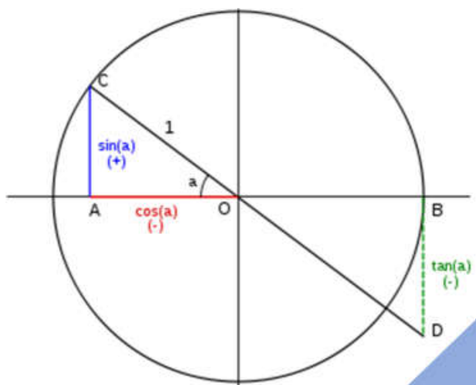
Por tanto: $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ y la tangente: $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Las razones trigonométricas inversas serían la secante, inversa del coseno, la cosecante, inversa del seno y la cotangente, inversa de la tangente.

Resumiendo: Cosα = –1/2 y tg **α=√3**

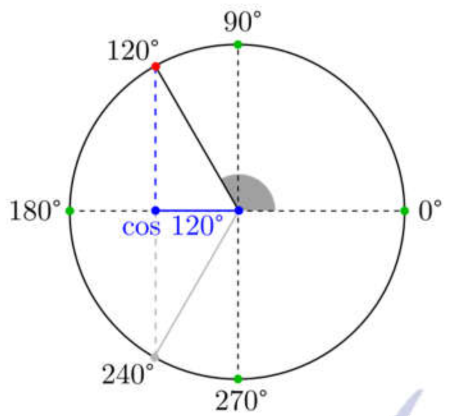
2) Da el valor (en radianes) de un ángulo de otro cuadrante que tenga exactamente el mismo coseno que α.

De los cuatro cuadrantes, el único en el que el coseno tiene exactamente el mismo valor que en el tercero, es en el segundo.

Tercer cuadrante	Segundo Cuadrante
	

Sabemos que en el primer cuadrante, el único ángulo α que tiene $\begin{cases} sen\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ es el ángulo **α= 60°**

Pues en el segundo cuadrante, el ángulo de 60 se correspondería con el de 180° – 60° = 120°



Por simetría, y observando la circunferencia goniométrica de la izquierda, puede deducirse que el coseno de 120° es exactamente igual al coseno de 240°.

Si calculamos con la calculadora el arcoseno de –1/2 obtenemos:

$$\underbrace{Arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°}_{\text{En grados sexagesimales (Modo Deg)}} \qquad \underbrace{Arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}}_{\text{En Radianes (Modo Rad)}}$$

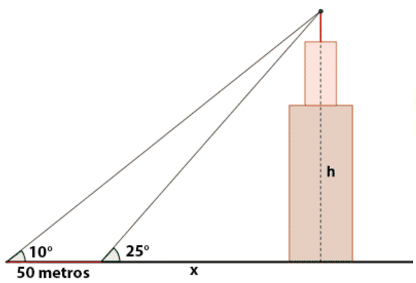
Dependiendo del modo en que pongamos nuestra calculadora, podemos obtener el resultado directamente en radianes o en grados sexagesimales.

Puesto que, en el segundo cuadrante, el ángulo de 60 se correspondería con el de 180° – 60° = 120°

Por tanto, el ángulo buscado es el de 120°, que en radianes se expresa como $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Situada en un llano se encuentra una torre. Desde un punto se observa la parte más alta con un ángulo de 10° con la horizontal, y si nos aproximamos a la torre 50 metros observamos que el ángulo es ahora de 25°.

3) ¿Qué altura tiene la torre?



Para calcular la altura de la torre, vamos a utilizar la tangente, que es la razón trigonométrica que relaciona el cateto opuesto con el cateto contiguo y con ella vamos a plantear un sistema de ecuaciones no lineales n el que las incógnitas serán x y h.

$$\begin{cases} 1)\ tg\ 10° = \dfrac{h}{x+50} \\ 2)\ tg\ 25° = \dfrac{h}{x} \end{cases}$$

Para resolverlo, despejamos x de la segunda ecuación y lo sustituiremos en la primera:

De la ecuación 2) despejamos x: $tg\ 25° = \dfrac{h}{x} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{h}{tg\ 25°}$

Y lo sustituimos en la 1) $tg\ 10° = \dfrac{h}{x+50} \quad \rightarrow \quad tg\ 10° = \dfrac{h}{\dfrac{h}{tg\ 25°}+50} \quad \rightarrow$ operando un poco:

$$tg\ 10° = \frac{h}{\dfrac{h}{tg\ 25°}+50} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{h}{tg\ 25°}+50\right) tg\ 10° = h \quad \rightarrow \quad \left(\frac{h}{tg\ 25°}+\frac{50 \cdot tg\ 25°}{tg\ 25°}\right) tg\ 10° = h$$

$$(h + 50 \cdot tg\ 25°) \cdot tg\ 10° = h \cdot tg\ 25° \quad \rightarrow \quad h \cdot tg 10° + 50 \cdot tg 25° \cdot tg 10° = h \cdot tg\ 25°$$

Despejando h, llegamos a:

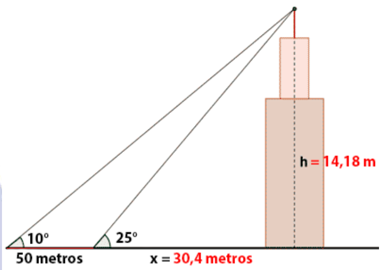
$$50 \cdot tg25° \cdot tg10° = h \cdot tg\ 25° - h \cdot tg10° \quad \rightarrow \quad 50 \cdot tg25° \cdot tg10° = h \cdot (tg\ 25° - tg10°) \quad \rightarrow \quad h = \frac{50 \cdot tg25° \cdot tg10°}{tg\ 25° - tg10°}$$

Y de aquí:

$$h = \frac{50 \cdot tg25° \cdot tg10°}{tg\ 25° - tg10°} = 14,18\ m$$

Así que, la altura de la torre es de 14,18 metros.

4) ¿A qué distancia de la torre nos encontramos?



En este punto nos piden el valor de x del dibujo, que calcularemos con $x = \frac{h}{tg\ 25°}$, por tanto, con sustituir lo obtenido en el apartado anterior, nos bastaría:

$$x = \frac{h}{tg\ 25°} = \frac{14,18}{tg\ 25°} = 30,4\ m$$

Así que estamos a 30,4 metros de la torre.

Dados los puntos A(−2,1), B(3,2) y C(4,−3) halla:

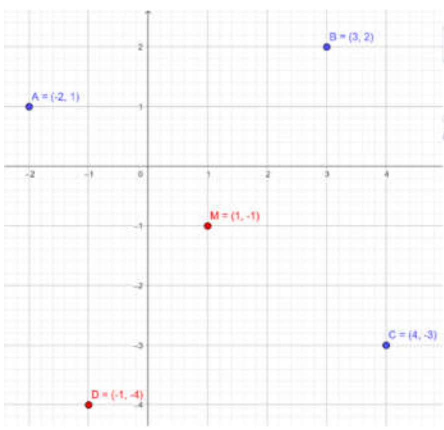
5) Las coordenadas del punto D, simétrico de B respecto de M.

Si D es simétrico de B, respecto de M, esto quiere decir que M es el punto medio del segmento $\overline{DB}$, así que:

$$M_{DB} = \left(\frac{d_x + b_x}{2}, \frac{d_y + b_y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} M_x = \frac{d_x + b_x}{2} & \rightarrow \quad d_x = 2 \cdot M_x - b_x \quad \rightarrow \quad d_x = -1 \\ M_y = \frac{d_y + b_y}{2} & \rightarrow \quad d_y = 2 \cdot M_y - b_y \quad \rightarrow \quad d_y = -4 \end{cases}$$

Por tanto, el punto D=(−1,−4)

6) Comprueba que el polígono ABDC es un cuadrado.



Si representamos todos los puntos calculados en un gráfico, obtenemos:

Para que un polígono sea cuadrado han de ocurrir dos cosas: que sus lados midan todos lo mismo y que sus ángulos sean rectos (lados perpendiculares).

Calculamos los vectores que unen puntos consecutivos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5,1) \qquad \overrightarrow{BC} = C - B = (1,-5)$$
$$\overrightarrow{CD} = D - C = (5,1) \qquad \overrightarrow{DA} = A - D = (1,-5)$$

Y vemos que son paralelos dos a dos, que todos tienen el mismo módulo:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \qquad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (5,1) \qquad \overrightarrow{DA} = A - D = (1,-5)$$

Además, vemos fácilmente también que son perpendiculares dos a dos porque el producto de sus componentes es nulo:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \cdot 1 - 1 \cdot 5 = 0$$

Así que claramente se trata de un cuadrado.

Escribe la ecuación general de las rectas siguientes:

7) Paralela a la recta s: $2x + 3y - 9 = 0$ y que pasa por (4,5)

Si es paralela a la recta s, tiene el mismo vector director, así que la ecuación de la nueva recta sería:

$$2x + 3y + k = 0$$

Nos falta conocer k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto (4,5), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + k = 0 \quad \rightarrow \quad 8 + 15 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -23$$

Por lo tanto, la recta pedida es: 2x + 3y – 23 = 0

8) Perpendicular a la recta r: $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por (7,1)

Si es perpendicular tiene como vector director el vector (1,-2) y por tanto su ecuación vendrá dada por:

$$2x + y + k = 0$$

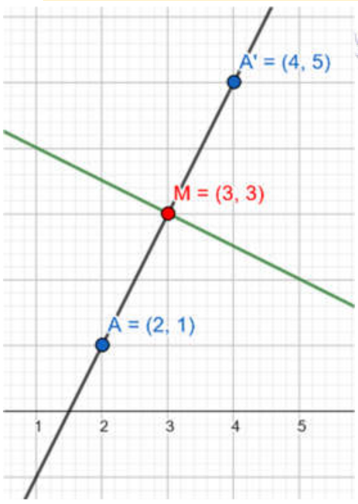
Nos falta conocer k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto (7,1), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2 \cdot 7 + 1 \cdot 1 + k = 0 \quad \rightarrow \quad 14 + 1 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -15$$

Por lo tanto, la recta pedida es: 2x + y – 15 = 0

La recta r: x + 2y –9 = 0 es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto A (2, 1).

9) Halla la ecuación explícita de la recta que contiene al segmento.



Para calcular las coordenadas del otro extremo antes hemos de calcular la recta perpendicular a r que pasa por A:

La recta perpendicular viene dada por: $s: 2x - y + k = 0$

Para calcular k, obligamos a la recta s a pasar por el punto A (2, 1), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2 \cdot (2) - 1 \cdot (1) + k = 0 \quad \rightarrow \quad 4 - 1 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -3$$

Así que la recta s tiene por ecuación: $s: 2x - y - 3 = 0$

El punto de corte de ambas, será el punto medio del segmento, que llamaremos M:

$$\begin{cases} x+2y=9 \\ 2x-y=3 \end{cases} \xrightarrow[\text{multiplicando la 2ª ecuación por 2}]{\text{Por reducción}} \begin{cases} x+2y=9 \\ 4x-2y=6 \end{cases} \xrightarrow{\text{y sumando}} 5x=15 \quad \rightarrow \quad x=3 \quad e \quad y=2\cdot 3-3=3$$

Así que las coordenadas de M son: M(3,3)

10) Calcula el punto de intersección entre las rectas r y s, y averigua las coordenadas del otro extremo del segmento

Si llamamos A' a las coordenadas del otro extremo y obligando a ser M el punto medio de ambos:

$$M=\left(\frac{a_x+a_x'}{2},\frac{a_y+a_y'}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} M_x=\dfrac{a_x+a_x'}{2} \rightarrow a_x'=2\cdot M_x-a_x \rightarrow a_x'=2\cdot 3-2=4 \\ M_y=\dfrac{a_y+a_y'}{2} \rightarrow a_y'=2\cdot M_y-a_y \rightarrow a_y'=2\cdot 3-1=5 \end{cases}$$

Así que, las coordenadas del otro punto son (4, 5)