	Nombre:		EVAL II	Nota
	Curso:	**4º ESO B**	Examen XI	
	Fecha:	23 de mayo de 2025	**Trigonometría**	

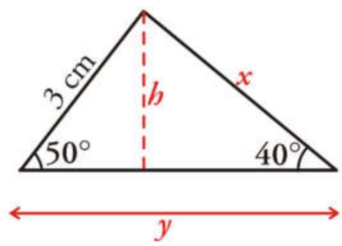
La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25% de la nota

01.- Sabiendo que la tangente de un ángulo agudo del segundo cuadrante es $\tan\beta = -\sqrt{3}$, calcula las otras restantes razones trigonométricas y expresa el ángulo β en radianes y en grados sexagesimales.

02.- Demuestra (explicando los pasos seguidos) la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{\text{sen}\,\Delta + \cot\Delta}{\tan\Delta + \text{cosec}\,\Delta} = \cos\Delta$$

03.- Halla los valores de x, y, h en el siguiente triángulo:



04.- Desde la calle, vemos el punto más alto del campanario de la iglesia de mi pueblo con un ángulo de 60°. Si nos retiramos 15 metros en línea recta, este ángulo pasa a ser de es de 50°. ¿Cuál es la altura de la iglesia?

05.- Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54°. Halla la medida del resto de los lados, de los ángulos del triángulo y de su área.

	Nombre:	SOLUCIONES		EVAL II
	Curso:	4º ESO B	Examen XI	
	Fecha:	23 de mayo de 2025	**Trigonometría**	

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25% de la nota

01.- Sabiendo que la tangente de un ángulo agudo del segundo cuadrante es $\tan\beta = -\sqrt{3}$, calcula las otras restantes razones trigonométricas y expresa el ángulo β en radianes y en grados sexagesimales.

Sabemos que la tangente de un ángulo viene dada por el cociente entre su seno y su coseno:

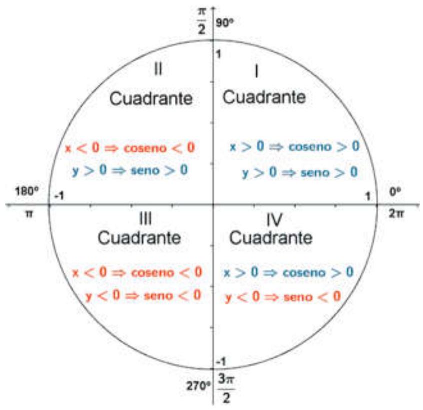
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad \rightarrow \quad \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \text{sen}\alpha = -\sqrt{3}\cdot\cos\alpha$$

Con esta relación entre ambas, y sustituyendo en la identidad fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \left(-\sqrt{3}\cdot\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad 3\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad 4\cos^2\alpha = 1$$

Llegamos a:

$$4\cos^2\alpha = 1 \quad \xrightarrow{\text{De donde}} \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$



Como estamos en el segundo cuadrante, usando el criterio de signos de las razones trigonométricas, sabemos que el coseno es negativo, por tanto:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

Y ahora calculamos el seno:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \leftarrow \quad \text{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Otra vez, usando el criterio de signos, el seno valdrá: $\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Conocidas las razones trigonométricas principales, podemos calcular las inversas:

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \cot\ \alpha = \frac{1}{\tan\ \alpha} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

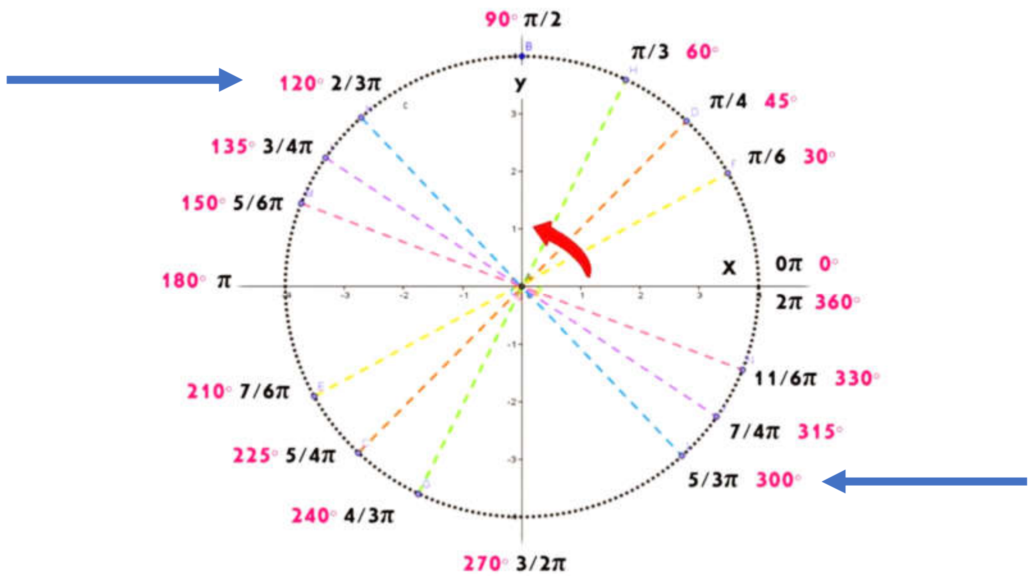
Por tanto, las razones pedidas del ángulo α son:

$\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\ \alpha = -\frac{1}{2}$	$\tan\ \alpha = -\sqrt{3}$
$\text{cosec}\ \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec\ \alpha = -2$	$\cot\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Para calcular el ángulo β, basta con hacer el arco tangente de $-\sqrt{3}$, por tanto:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -60^\circ \quad \to \quad \beta = 300^\circ \quad \to \quad \frac{\pi}{180} = \frac{\beta}{60} \quad \to \quad \beta = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

El ángulo de −60°, se corresponde con el ángulo de 300°, pero este está en el 4° cuadrante y nuestro ángulo β está en el segundo cuadrante, así que tenemos que buscar el ángulo equivalente en el segundo cuadrante. Para ello nos ayudaremos de la circunferencia goniométrica:



Se ve claramente que el ángulo de 300° se corresponde con el de 120° en el segundo cuadrante, por lo tanto:

$$\beta = 120^\circ \quad \to \quad \frac{2\pi}{360} = \frac{\beta}{120} \quad \to \quad \beta = \frac{2\cdot\pi\cdot 120}{360} \quad \to \quad \beta = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad}$$

02.- Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $\dfrac{\operatorname{sen}\Delta + \cot\Delta}{\tan\Delta + \operatorname{cosec}\Delta} = \cos\Delta$

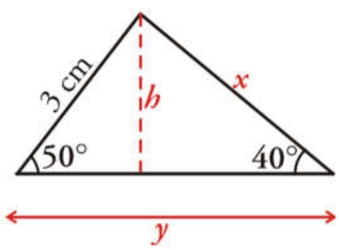
$$\frac{\operatorname{sen}\Delta + \cot\Delta}{\tan\Delta + \operatorname{cosec}\Delta} = \cos\Delta \xrightarrow{\text{Escribimos todas en función de seno y coseno}} \frac{\operatorname{sen}\Delta + \dfrac{\cos\Delta}{\operatorname{sen}\Delta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\Delta}{\cos\Delta} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\Delta}} = \cos\Delta \xrightarrow{\text{Reducimos a común denominador}} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2\Delta + \cos}{\operatorname{sen}\Delta}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\Delta + \cos}{\cos\Delta\cdot\operatorname{sen}\Delta}} = \cos\Delta$$

$$\xrightarrow{\text{Operamos}} \frac{\left(\operatorname{sen}^2\Delta + \cos\right)\cdot\left(\cos\Delta\cdot\operatorname{sen}\Delta\right)}{\left(\operatorname{sen}^2\Delta + \cos\right)\cdot\left(\operatorname{sen}\Delta\right)} = \cos\Delta \xrightarrow{\text{Simplificamos}} \frac{\cancel{\left(\operatorname{sen}^2\Delta + \cos\right)}\cdot\left(\cos\Delta\cdot\cancel{\operatorname{sen}\Delta}\right)}{\cancel{\left(\operatorname{sen}^2\Delta + \cos\right)}\cdot\left(\cancel{\operatorname{sen}\Delta}\right)} = \cos\Delta$$

$\to$ Llegamos a: $\cos\Delta = \cos\Delta$

Por tanto, queda demostrada la identidad.

03.- Halla los valores de x, y, h en el siguiente triángulo:



Como podemos observar, la altura parte el triángulo dado en otros dos triángulos rectángulos, y **si nos fijamos en el triángulo de la izquierda**, con ayuda del seno de 50, podemos calcular h:

$$\operatorname{sen} 50^\circ = \frac{h}{3} \xrightarrow{\text{de donde}} h = 3\cdot \operatorname{sen} 50^\circ \quad \to \quad h = 2{,}30\ \text{cm}$$

Fijándonos ahora en el triángulo de la derecha, con el seno de 40° podemos calcular el valor de x:

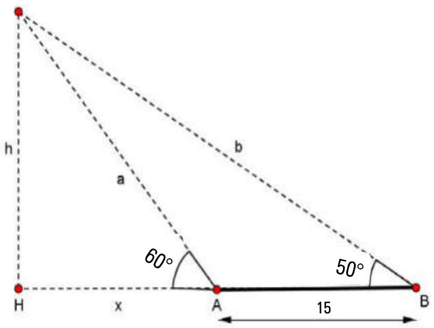
$$\text{sen } 40° = \frac{h}{x} \xrightarrow{\text{de donde}} x = \frac{h}{\text{sen } 40°} \rightarrow x = \frac{2{,}30}{\text{sen } 40°} \rightarrow x = 3{,}58 \text{ cm}$$

Conocida la x, con la ayuda del teorema de Pitágoras podemos calcular la y:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow y^2 = 3^2 + (3{,}58)^2 \rightarrow y = 4{,}67 \text{ cm}$$

Por tanto, h=2,30 cm; x=3,58 cm e y=4,67 cm

04.- Desde la calle, vemos el punto más alto del campanario de la iglesia de mi pueblo con un ángulo de 60°. Si nos retiramos 15 metros en línea recta, este ángulo pasa a ser de es de 50°. ¿Cuál es la altura de la iglesia?



Si nos ayudamos de un croquis obtenemos el dibujo de la izquierda, donde hemos llamado h a la altura de la iglesia y x a la distancia entre el observador y el pie de la iglesia.

La razón trigonométrica que relaciona los catetos opuestos y los catetos contiguos es la tangente, así que:

En el triángulo pequeño: $\tan 60° = \frac{h}{x}$

Mientras que en el triángulo grande: $\tan 50° = \frac{h}{x+15}$

Con ambas ecuaciones, formamos un sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} \tan 60° = \frac{h}{x} \\ \tan 50° = \frac{h}{x+15} \end{array}\right.$

Como nos piden calcular primero h, vamos a despejar x en la primera ecuación:

$$\text{De } \tan 60° = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 60°}$$

Para después sustituirla en la segunda:

$$\text{En } \tan 50° = \frac{h}{x+15} \rightarrow \tan 50° = \frac{h}{\frac{h}{\tan 60°} + 15} \xrightarrow{\text{Operando un poco}} \tan 50° = \frac{h}{\frac{h}{\tan 60°} + \frac{15 \cdot \tan 60°}{\tan 60°}} \rightarrow$$

$$\tan 50° = \frac{h}{\frac{h + 15 \tan 60°}{\tan 60°}} \rightarrow \tan 50° = \frac{h \cdot \tan 60°}{h + 15 \tan 60°} \xrightarrow{\text{Operando}} (h + 15 \tan 60°) \tan 50° = h \cdot \tan 60° \rightarrow$$

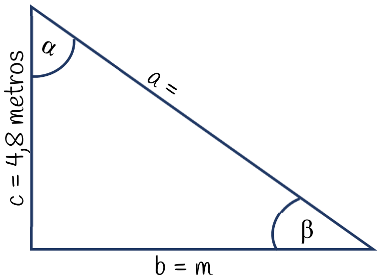
$$\rightarrow h \cdot \tan 50° + 15 \cdot \tan 60° \cdot \tan 50° = h \cdot \tan 60° \xrightarrow{\text{Agrupando}} h \cdot \tan 60° - h \cdot \tan 50° = 15 \cdot \tan 60° \cdot \tan 50° \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{Sacamos factor común h}} h \cdot (\tan 60° - \tan 50°) = 15 \cdot \tan 60° \cdot \tan 50° \xrightarrow{\text{Despejamos h}} h = \frac{15 \cdot \tan 60° \cdot \tan 50°}{\tan 60° - \tan 50°} = 5{,}806 \; m$$

$$\rightarrow h = 57{,}31 \; m$$

Por tanto, la alturade la iglesia es de 57,31 metros

05.- Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54°. Halla la medida del resto de los lados, de los ángulos del triángulo y de su área.



Como es un triángulo rectángulo y conocemos un ángulo y su cateto opuesto, podemos ayudarnos del seno para calcular la hipotenusa:

$$\text{sen}\,\beta = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad a = \frac{c}{\text{sen}\,\beta} = \frac{4{,}8}{\text{sen}\,54°}$$

$$\rightarrow \quad a = 5{,}93\ m$$

Una vez hecho esto, por el Teorema de Pitágoras, calculamos el cateto restante, b:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad b = \sqrt{5{,}93^2 - 4{,}8^2} = 3{,}49 \quad \rightarrow \quad b = 3{,}49\ m$$

Conocidos ya los 3 lados y un ángulo, calcularemos el otro sabiendo que son complementarios

$$\alpha = 90° - \beta = 90° - 54° = 36° \quad \rightarrow \quad \alpha = 36°$$

Así que, los lados son a=5,93; b= 3,49 y c=4,8 m y los ángulos 54° y 36°

Para calcular el área, lo haremos mediante el semiproducto de la base por la altura:

$$A = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{4{,}8 \cdot 3{,}49}{2} \quad \rightarrow \quad A = 8{,}38\ m^2$$

Y el área es de A=8,38 metros cuadrados.