Departamento de Matemáticas	Nombre:			3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO A**	Examen XII		
	Fecha:	20 de mayo de 2024	Semejanza y Trigonometría		

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.– Dado un ángulo agudo, α, cuyo seno es: $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{2}$

a) Dibuja una circunferencia goniométrica y representa en ella los ángulos α y (π−α).
b) Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo (π − α).
c) Indica su amplitud, tanto en radianes como en grados sexagesimales.

(0,5 + 1 + 1 puntos)

2.– Una escalera de 6 metros de longitud está apoyada sobre la pared del edificio A, y la toca a 4,5 metros de altura. Si bascula sobre su base, se apoya en la pared del edificio B a 3,20 metros de altura.

a) Realiza un dibujo de la situación.
b) Calcula los ángulos que forma la escalera al apoyarse tanto en el edificio A como en el edificio B.
c) Calcula la distancia entre los dos edificios.

(0,5 + 1 + 1 puntos)

3.– Demuestra justificadamente la siguiente identidad: $\dfrac{\cos \alpha - \sec \alpha}{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{cosec} \alpha} = tg^3 \alpha$

(2,5 puntos)

4.– Una antena de telecomunicaciones está sujeta al suelo con dos cables de acero que forman entre sí un ángulo de 90° y miden 7 y 9 m, respectivamente. Si la antena está ente los dos anclajes:

a) Realiza un dibujo de la situación incluyendo el dato de la altura de la antena.
b) ¿A qué distancia del poste de la antena están sujetos ambos cables del suelo?
c) Calcula cuánto cable de acero se ha utilizado.

(1 + 1 + 0,5 puntos)

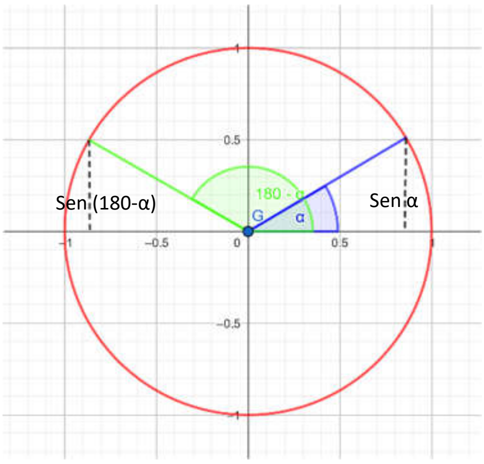
Departamento de Matemáticas	Nombre:	**S O L & I O N E S**		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO A**	Examen XII		
	Fecha:	20 de mayo de 2024	Semejanza y Trigonometría		

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.– Dado un ángulo agudo, α, cuyo seno es: $\text{sen } \alpha = \dfrac{1}{2}$

a) Dibuja una circunferencia goniométrica y representa en ella los ángulos α y (π–α).



Sabiendo que en la circunferencia goniométrica el radio es 1, es fácil representar un ángulo agudo cuyo seno sea 0,5. Este ángulo está en el primer cuadrante y lo dibujamos a una altura la mitad del radio puesto que el seno es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa y la hipotenusa se corresponde con el radio 1.

$$sen\ \alpha = \frac{Cat.Op}{Hipo} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$$

En ángulo (180–α) se corresponde con un ángulo del segundo cuadrante a la misma altura que el ángulo α.

b) Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo (π – α).

Mirando el dibujo, donde hemos representado los senos de α y en (180–α), podemos observar que las razones trigonométricas de α y de (180–α) son iguales en valor absoluto, por tanto, solo hemos de jugar con los signos. Cambian el coseno y la secante y la tangente y la cotangente.

Razones trigonométricas			
Ángulo α		**Ángulo 180-α**	
$\text{sen } \alpha = \dfrac{1}{2}$	$\text{Cosec } \alpha = 2$	$\text{sen } (180-\alpha) = \dfrac{1}{2}$	$\text{Cosec } (180-\alpha) = 2$
$\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{Sec } \alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cos (180-\alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\text{Sec } (180-\alpha) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
$\tan \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{Cotg } \alpha = \sqrt{3}$	$\tan (180-\alpha) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{Cotg } (180-\alpha) = -\sqrt{3}$

c) Indica su amplitud, tanto en radianes como en grados sexagesimales.

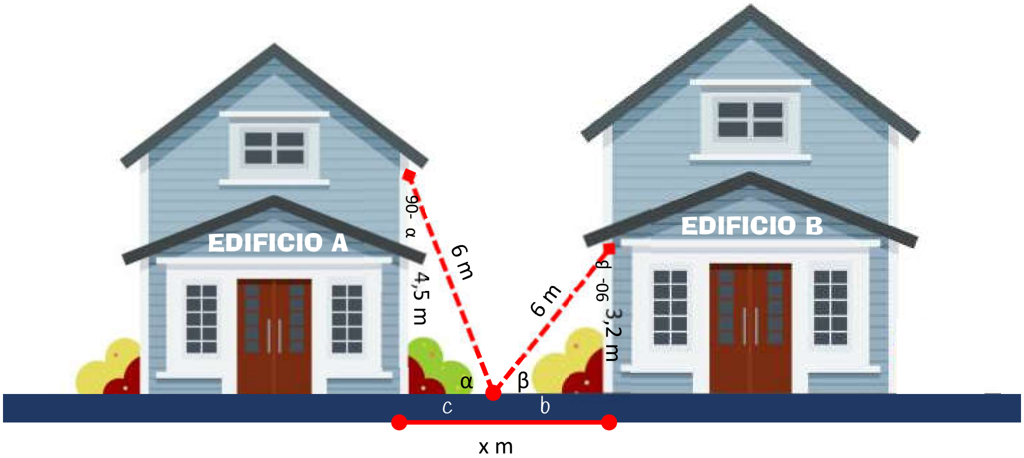
$$\text{Si sen } \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{Utilizamos el arco, para conocida la razón trogonométrica, calcular el ángulo}} \alpha = \text{Arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{Por tanto:}} \alpha = \frac{\pi}{6} \qquad \alpha = 30^\circ$$

Y el ángulo (π–α) será:

$$(180-\alpha) = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} \rightarrow \beta = \frac{5\pi}{6} \qquad \beta = 150^\circ$$

2.- Una escalera de 6 metros de longitud está apoyada sobre la pared del edificio A, y la toca a 4,5 metros de altura. Si bascula sobre su base, se apoya en la pared del edificio B a 3,20 metros de altura.

a) Realiza un dibujo de la situación.



b) Calcula los ángulos que forma la escalera al apoyarse tanto en el edificio A como en el edificio B.

Para calcular los ángulos α y β usaremos la relación trigonométrica que relaciona el cateto opuesto con la hipotenusa y haremos su arco:

$$sen\ \alpha = \frac{4,5}{6} \quad \rightarrow \quad \alpha = Arcsen\left(\frac{3}{4}\right) \quad \rightarrow \quad \alpha = 48°\ 35'\ 25,36''$$

$$sen\ \beta = \frac{3,2}{6} \quad \rightarrow \quad \beta = Arcsen\left(\frac{8}{15}\right) \quad \rightarrow \quad \beta = 32°\ 13'\ 51,43''$$

Por tanto, aproximadamente, los ángulos que forma la escalera CON EL SUELO son de 48° y de 32°.

Pero si lo que queremos calcular son los ángulos que forma la escalera con las paredes de ambos edificios, bastaría con calcular sus complementarios:

$$\begin{cases} \text{Angulo con el Edificio A} = 90 - \alpha = 90 - 48°\ 35'\ 25,36'' = 41°\ 24'\ 34,64'' \\ \text{Angulo con el Edificio B} = 90 - \beta = 90 - 32°\ 13'\ 51,43'' = 57°\ 46'\ 8,57'' \end{cases}$$

Por tanto, aproximadamente los ángulos que forma la escalera CON LOS EDIFICIOS son de 41° y de 58°.

c) Calcula la distancia entre los dos edificios.

Para calcular la distancia entre los dos edificios bastaría con calcular los catetos que faltan de ambos triángulos mediante el teorema de Pitágoras, por tanto:

$$c: \quad \rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6^2 - 4,5^2} = \frac{3\sqrt{7}}{7} m \quad \rightarrow \quad c = 3,97\ m$$

$$b: \quad \rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 3,2^2} = \frac{2\sqrt{161}}{5} m \quad \rightarrow \quad c = 5,08\ m$$

Por lo que la distancia entre los dos edificios es la suma de ambas; x=9,05 m

3.– Demuestra justificadamente la siguiente identidad: $\dfrac{\cos\alpha - \sec\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha} = tg^3\alpha$

Para demostrarla partiremos del término del primer miembro hasta llegar al segundo y empezaremos cambiando la secante y la cosecante por la inversa del coseno y del seno y actuaremos algebraicamente:

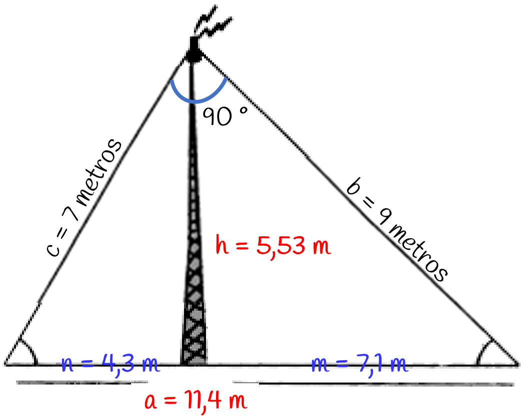
$$\frac{\cos\alpha - \sec\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha} = \frac{\cos\alpha - \dfrac{1}{\cos\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha - \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}} \overset{\text{Reducimos a común denominador}}{=} \frac{\dfrac{\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha}} \overset{\text{Cambiamos 1 por: } 1=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{=} \frac{\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} \rightarrow$$

$$\overset{\text{Agrupamos}}{=} \frac{\dfrac{\cancel{\cos^2\alpha} - \operatorname{sen}^2\alpha - \cancel{\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha} - \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{\dfrac{-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} : \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{\cos^3\alpha} = tg^3\alpha$$

Por tanto, queda demostrado que: $\dfrac{\cos\alpha - \sec\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha} = tg^3\alpha$

4.– Una antena de telecomunicaciones está sujeta al suelo con dos cables de acero que forman entre sí un ángulo de 90° y miden 7 y 9 m, respectivamente. Si la antena está ente los dos anclajes:

a) Realiza un dibujo de la situación incluyendo el dato de la altura de la antena.



Hacemos el dibujo con todos sus datos y calculamos la altura, pero antes mediante Pitágoras calculamos la base del triángulo.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} = 11{,}40\ m$$

Una vez conocida la base, mediante el teorema del cateto podemos calcular las proyecciones m y n de los catetos:

$$\begin{cases} c^2 = a \cdot n \quad \rightarrow \quad n = \dfrac{c^2}{a} = \dfrac{7^2}{11{,}4} = 4{,}3 \quad \rightarrow \quad n = 4{,}3\text{ m} \\ b^2 = a \cdot m \quad \rightarrow \quad m = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{9^2}{11{,}4} = 4{,}3 \quad \rightarrow \quad m = 7{,}1\text{ m} \end{cases}$$

Y por último, para calcular la altura de la antena utilizaremos el teorema de la altura:

$$h^2 = m \cdot n \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{m \cdot n} = \sqrt{7{,}1 \cdot 4{,}3} = \sqrt{30{,}53} = 5{,}53\ m$$

Por tanto, la altura de la entena es de 5,53 metros.

b) ¿A qué distancia del poste de la antena están sujetos ambos cables del suelo?

Los anclajes de los cables están a 4,3 metros uno y a 7,1 metros el otro del pie de la antena puesto que se corresponden con las proyecciones de los dos catetos y que ya hemos calculado con anterioridad.

n=4,3 m y m=7,1 m

c) Calcula cuánto cable de acero se ha utilizado.

Para calcular cuánto cable se ha necesitado, basta con sumar los dos trozos: $7 + 9 = 16$

Por tanto, se han utilizado 16 metros de cable de acero.