	Nombre:		3ª Evaluación	Nota
Departamento de Matemáticas	Curso:	**4º ESO A**	Examen XIII	
	Fecha:	10 de junio de 2024	Vectores y Rectas	

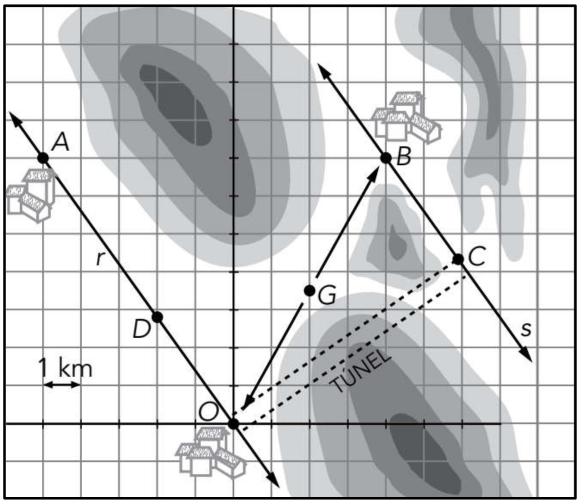
IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25 % de la nota.

En una zona de montaña, como puedes ver en el plano de la derecha, las autoridades quieren proyectar un nuevo sistema de carreteras. Pretenden construir dos tramos paralelos de autovía por los valles de la zona.

Los topógrafos han elaborado un mapa orográfico sobre unos ejes coordenados para facilitar los cálculos de los ingenieros.

Sofía está en el equipo de planificación y os enseña el mapa para que la ayudéis con los cálculos. El centro del sistema de coordenadas lo han puesto en una localidad cercana O.



Escala 1:1000

1. "Vamos a ver, chicos. Según el plano, ¿cuáles son las coordenadas de O y de A?, una vez que las hayáis calculado, ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de la carretera r?"

2. "Supongo que ahora os resultará más fácil decirme cuál es la ecuación general de la autovía **s** que pasa por B".

3. "Acaban de decirme que quieren construir un nuevo ramal entre O y B con una gasolinera, G, en su punto medio. Tenemos que calcular la ecuación continua de este nuevo ramal, las coordenadas de G y la distancia de la gasolinera hasta B (mirad la escala del plano)".

4. "Los ingenieros quieren construir un túnel que una las autovías **r** y **s**, y que sea perpendicular a ambas. Una de las entradas debe estar en O. ¿Qué ecuación tendrá?, ¿Cuánto será su pendiente?, ¿Qué coordenadas tendrá la otra salida del túnel, C?"

5. "He oído rumores de que en un futuro no muy lejano quieren construir una electro-gasolinera en la carretera **s** en el punto X, de forma que los puntos AOBX formen un paralelogramo. ¿En qué punto de la recta s estará la gasolinera? ¿Cuántas hectáreas de superficie tiene ese paralelogramo?"

Departamento de Matemáticas	Nombre:	**SOLUCIONES**		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO A**	Examen XIII		
	Fecha:	10 de junio de 2024	Vectores y Rectas		

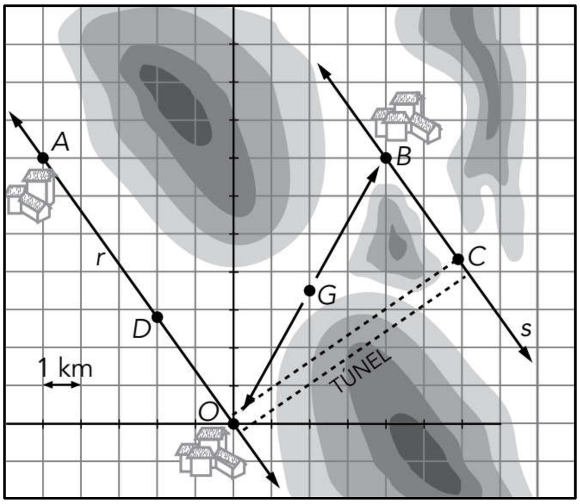
IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25 % de la nota.

En una zona de montaña, como puedes ver en el plano de la derecha, las autoridades quieren proyectar un nuevo sistema de carreteras. Pretenden construir dos tramos paralelos de autovía por los valles de la zona.

Los topógrafos han elaborado un mapa orográfico sobre unos ejes coordenados para facilitar los cálculos de los ingenieros.

Sofía está en el equipo de planificación y os enseña el mapa para que la ayudéis con los cálculos. El centro del sistema de coordenadas lo han puesto en una localidad cercana.



Escala 1:1000

1. "Vamos a ver, chicos. Según el plano, ¿cuáles son las coordenadas de O y de A?, una vez que las hayáis calculado, ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas de la carretera r?"

Si nos fijamos en el plano, las coordenadas de los puntos O y A son, O(0,0) y A(−5,7)

Además, nos piden las ecuaciones paramétricas de la recta r (carretera r), y sabemos que, para ello necesitamos un punto y un vector:

$$r:\begin{cases} P(p_x, p_y) \\ \vec{r}=(r_x, r_y) \end{cases} \xrightarrow{\text{Las ecuaciones Paramétricas de una recta, vienen dadas por:}} r:\begin{cases} x = p_x + \lambda \cdot r_x \\ y = p_y + \lambda \cdot r_y \end{cases}$$

Calculamos el vector director de la recta r con la ayuda de los puntos O y A.:

$$\vec{r} = \overline{OA} = A - O = (-5,7) \quad \rightarrow \quad \vec{r} = (-5,7)$$

Pues con el punto O(0,0) y con el vector $\vec{r}=(-5,7)$, ya podemos escribir las ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases} x = p_x + \lambda \cdot r_x \\ y = p_y + \lambda \cdot r_y \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x = 0 - 5\lambda \\ y = 0 + 7\lambda \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x = -5\lambda \\ y = 7\lambda \end{cases}$$

Por tanto: O(0,0), A(−5,7) y $r:\begin{cases} x = -5\lambda \\ y = 7\lambda \end{cases} \rightarrow r: 7x + 5y = 0$

2. "Supongo que ahora os resultará más fácil decirme cuál es la ecuación general de la autovía **s** que pasa por B".

Del enunciado sabemos que las rectas r y s son paralelas, así que, con el vector director de r y el punto B, puedo calcular dicha ecuación:

$$s:\begin{cases} B(4,7) \\ \vec{r}=(-5,7) \end{cases} \xrightarrow{\text{Escribimos la Ec General Ax+By+c=0 con el vector (-B,A)}} 7x + 5y + c = 0 \xrightarrow{\text{Calculamos C sustutuyendo el punto B(4,7) en la recta}} 7\cdot 4 + 5\cdot 7 + c = 0$$

De donde:

$$7\cdot 4+5\cdot 7+c=0 \quad \to \quad 28+35+c=0 \quad \to \quad c=-63$$

Por tanto, la recta s, tiene por ecuación general: $s: 7x+5y-63=0$

3. "Acaban de decirme que quieren construir un nuevo ramal entre O y B con una gasolinera, G, en su punto medio. Tenemos que calcular la ecuación continua de este nuevo ramal, las coordenadas de G y la distancia de la gasolinera hasta B (mirad la escala del plano)".

Sabemos que la ecuación continua de una recta viene dada por la expresión: $\dfrac{x-p_x}{v_x}=\dfrac{y-p_y}{v_y}$ donde

$P(P_x,P_y)$ es un punto de la recta y $\vec{v}=(v_x,v_y)$ su vector director.

Con los puntos O y B(4,7), podemos sacar un vector y con un punto y 1 vector podemos escribir la ecuación de la recta:

$$t:\begin{cases} B(4,7) \\ \vec{r}=(4,7) \end{cases} \xrightarrow{\text{Escribimos la Ec Continua}} \quad \frac{x-4}{4}=\frac{x-7}{7} \quad \text{O lo que es lo mismo:} \quad \text{recta OB: } \frac{x}{4}=\frac{x}{7}$$

Como el punto G está en el punto medio del segmento $\overline{OB}$, basta con calcularlo:

$$G(G_x,G_y)=\left(\frac{O_x+B_x}{2},\frac{O_y+B_y}{2}\right) \quad \to \quad (G_x,G_y)=\left(\frac{0+4}{2},\frac{0+7}{2}\right) \quad \to \quad G\left(2,\frac{7}{2}\right)$$

La distancia de la gasolinera G al punto B, es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{OB}$

$$\overrightarrow{OB}=B-O=(4,7) \quad \to \quad \overrightarrow{OB}=(4,7) \quad \to \quad \left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$

Así que la distancia de la gasolinera a B es de :

$$d_{G\to B}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{65} \quad \to \quad d_{G\to B}=4{,}03\ Km$$

Por tanto, la distancia de la gasolinera al punto B es de aproximadamente 4 km

4. "Los ingenieros quieren construir un túnel que una las autovías **r** y **s**, y que sea perpendicular a ambas. Una de las entradas debe estar en O. ¿Qué ecuación tendrá?, ¿Cuánto será su pendiente?, ¿Qué coordenadas tendrá la otra salida del túnel, C?"

Como el túnel es perpendicular a las rectas r y s, la ecuación de dicho túnel será perpendicular a ambas y para ellos basta con cambiar las coordenadas y cambiarle el signo a una de ellas: $túnel: 5x-7y=0$ puesto que pasa por el origen O.

Como nos piden su pendiente, escribiré su ecuación en forma explícita:

$$y=\frac{5}{7}x \qquad \text{cuya pendiente es:} \qquad m=\frac{5}{7}$$

Para calcular las coordenadas de C basta con resolver el sistema formado por la recta s y el túnel:

$$\begin{cases} s: 7x+5y-63=0 \\ túnel: 5x-7y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Por reducción:}} \begin{cases} 7x+5y=63 \\ 5x-7y=0 \end{cases} \to \begin{cases} 49x+35y=441 \\ 25x-35y=0 \end{cases} \to \quad 74x=441$$

De donde despejando x:

$$x=\frac{441}{74}$$

Calculamos y mediante:

$$5x-7y=0 \quad \rightarrow \quad 5\cdot\frac{441}{74}-7y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{2205}{74}=7y \quad \rightarrow \quad y=\frac{315}{74}$$

Por tanto, las coordenadas del punto C son: $C\left(\frac{441}{74},\frac{315}{74}\right)$

5. "He oído rumores de que en un futuro no muy lejano quieren construir una electro-gasolinera en la carretera **s** en el punto X, de forma que los puntos AOBX formen un paralelogramo. ¿En qué punto de la recta **s** estará la gasolinera? ¿Cuántas hectáreas de superficie tiene ese paralelogramo?

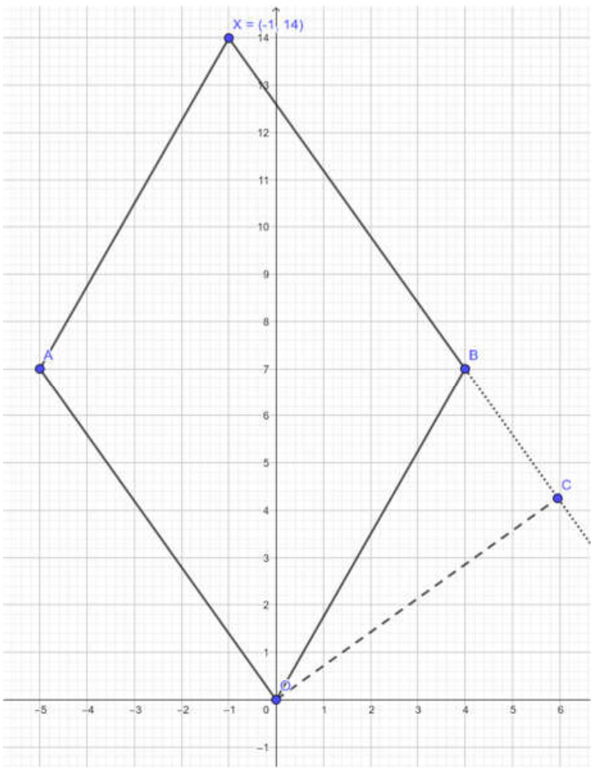
Como se forma un paralelogramo, tiene que ocurrir que los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{BX}$ sean iguales, por tanto, si llamamos al punto X(x,y) tenemos:

$$\overrightarrow{OA}=A-O=(-5,7) \qquad \overrightarrow{BX}=x-B=(x,y)-(4,7)=(x-4,y-7)$$

Y como son iguales:

$$(-5,7)=(x-4,y-7) \quad \rightarrow \quad \begin{cases}-5=x-4\\7=y-7\end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases}x=-1\\y=14\end{cases} \quad \rightarrow \quad X(-1,14)$$

Para calcular la superficie del paralelogramo, nos ayudaremos con un dibujo:



Sabemos que el área de un paralelogramo viene dada por el producto de su base por su altura, y, si nos fijamos, la base es el segmento OA y la altura el segmento OC.

Así que calculamos los módulos de los vectores:

$$\overrightarrow{OA}=(-5,7) \quad \rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$$

$$\overrightarrow{OC}=\left(\frac{441}{74},\frac{315}{74}\right) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\sqrt{\frac{293706}{5476}}=\frac{63}{74}\sqrt{74}$$

Y su área será:

$$A=base\ x\ altura=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{OC}\right\|=\sqrt{74}\cdot\frac{63}{74}\cdot\sqrt{74}=63\ km^2$$

Por tanto, el área del paralelogramo es de 6.300 Ha

	Nombre:		3ª Evaluación	Nota
Departamento de Matemáticas	Curso:	**4º ESO A**	Simulacro Examen XIII	
	Fecha:	10 de junio de 2024	Vectores y Rectas	

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25 % de la nota.

1.- Dados los puntos A(-2,1), B(3,2) y C(4,-3) halla: (2 puntos)

a) Las coordenadas del punto medio M del segmento $\overline{AC}$.

b) Las coordenadas del punto D, simétrico de B respecto de M.

c) Comprueba que el polígono ABDC es un cuadrado.

d) Halla las coordenadas del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC} - 5 \cdot \overrightarrow{BC}$

2.- Escribe la ecuación general de las rectas siguientes: (2 puntos)

a) Paralela a la recta s: $2x + 3y - 9 = 0$ y que pasa por (4,5)

b) Perpendicular a la recta r: $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por (7,1)

c) Paralela al eje X y que pasa por el punto P(5,-2)

d) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

3.- Las rectas r y s se cortan en el punto A(-1, 3), y son perpendiculares. La ecuación de la recta r viene dada por r: x + ay – 5 =0. Obtén el valor de a y la ecuación explícita de la recta s. (1,5 puntos)

4.- Dados los puntos A(1,-2), B(0,2) y C(-2,0) calcula: (2 puntos)

a) Ecuación de la recta que pasa por B y C.

b) Ecuación de la altura que parte de A.

c) El área del triángulo ABC.

d) Determina si se trata de un triángulo rectángulo.

5.- La recta x + 2y -9 = 0 es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto A (2, 1). Halla las coordenadas del otro extremo. (1,5 puntos)

6.- Si A(3,1), B(5,7) y C(6,4) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, encuentra el cuarto vértice D. **BONUS:** Escribe la ecuación general de la diagonal BD y comprueba que dicha recta contiene el punto medio del segmento AC. (1 + 1 puntos)

Departamento de Matemáticas	Nombre:	**S O L U C I O N E S**		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO A**	Examen XIII		
	Fecha:	10 de junio de 2024	Simulacro de Vectores y Rectas		

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta el 25 % de la nota.

1.– Dados los puntos A(−2,1), B(3,2) y C(4,−3) halla: (2 puntos)

a) Las coordenadas del punto medio M del segmento $\overline{AC}$.

Las coordenadas del punto medio de un segmento $\overline{AC}$, vienen dadas por: $M_{AC}=\left(\frac{a_x+c_x}{2},\frac{a_y+c_y}{2}\right)$, por tanto:

$$M_{AC}=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{1-3}{2}\right)=(1,-1) \quad\rightarrow\quad M_{AC}=(1,-1)$$

b) Las coordenadas del punto D, simétrico de B respecto de M.

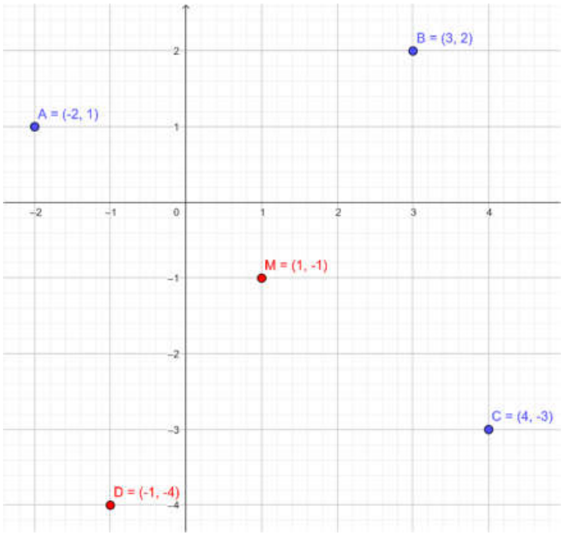
Si D es simétrico de B, respecto de M, esto quiere decir que M es el punto medio del segmento $\overline{DB}$, así que:

$$M_{DB}=\left(\frac{d_x+b_x}{2},\frac{d_y+b_y}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} M_x=\frac{d_x+b_x}{2} & \rightarrow \quad d_x=2\cdot M_x-b_x \quad\rightarrow\quad d_x=-1 \\ M_y=\frac{d_y+b_y}{2} & \rightarrow \quad d_y=2\cdot M_y-b_y \quad\rightarrow\quad d_y=-4 \end{cases}$$

Por tanto, el punto D=(−1,−4)

c) Comprueba que el polígono ABDC es un cuadrado.

Si representamos todos los puntos calculados en un gráfico, obtenemos:



Para que un polígono sea cuadrado han de ocurrir dos cosas: que sus lados midan todos lo mismo y que sus ángulos sean rectos (lados perpendiculares).

Calculamos los vectores que unen puntos consecutivos:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(5,1) \qquad \overrightarrow{BC}=C-B=(1,-5)$$
$$\overrightarrow{CD}=D-C=(5,1) \qquad \overrightarrow{DA}=A-D=(1,-5)$$

Y vemos que son paralelos dos a dos, que todos tienen el mismo módulo:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26} \qquad \left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$$
$$\overrightarrow{CD}=D-C=(5,1) \qquad \overrightarrow{DA}=A-D=(1,-5)$$

Además, vemos fácilmente también que son perpendiculares dos a dos porque el producto de sus componentes es nulo:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=5\cdot1-1\cdot5=0$$

Así que claramente se trata de un cuadrado.

d) Halla las coordenadas del vector $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}-5\cdot\overrightarrow{BC}$

Para calcular el vector $\vec{v}$, basta con cambiar cada vector por sus componentes y realizar la operación:

$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}-5\cdot\overrightarrow{BC}=(5,1)+2\cdot(6,-4)-5\cdot(1,-5)=(5+12-5,1-8+25)=(12,18) \quad\rightarrow\quad \vec{v}=(12,18)$$

2.- Escribe la ecuación general de las rectas siguientes: (2 puntos)

a) Paralela a la recta s: $2x+3y-9=0$ y que pasa por (4,5)

Si es paralela a la recta s, tiene el mismo vector director, así que la ecuación de la nueva recta sería:

$$2x+3y+k=0$$

Nos falta conocer k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto (4,5), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2\cdot4+3\cdot5+k=0 \quad\rightarrow\quad 8+15+k=0 \quad\rightarrow\quad k=-23$$

Por lo tanto, la recta pedida es: 2x + 3y – 23 = 0

b) Perpendicular a la recta r: $x-2y-3=0$ y que pasa por (7,1)

Si es perpendicular tiene como vector director el vector (1,–2) y por tanto su ecuación vendrá dada por:

$$2x+y+k=0$$

Nos falta conocer k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto (7,1), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2\cdot7+1\cdot1+k=0 \quad\rightarrow\quad 14+1+k=0 \quad\rightarrow\quad k=-15$$

Por lo tanto, la recta pedida es: 2x + y – 15 = 0

c) Paralela al eje X y que pasa por el punto P(5,–2)

Si es paralela al eje, tiene pendiente m=0 así que la ecuación en forma explícita sería:

$$y=0x+b$$

Nos falta conocer b, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto P (5,–2), así que los sustituimos y calculamos b:

$$y=0x+b \quad\rightarrow\quad -2=0\cdot5+b \quad\rightarrow\quad b=-2$$

Por lo tanto, la recta pedida es: y = – 2

d) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

Las ecuaciones de ambas rectas son: $r: x-2y-3=0 \quad y \quad s: 2x+3y-9=0$

Sus vectores directores son: $\vec{r}=(2,1) \quad y \quad \vec{s}=(-3,2)$ que como podemos observar no son paralelos ni perpendiculares.

Por tanto, las rectas r y s son secantes.

3.- Las rectas r y s se cortan en el punto A(-1, 3), y son perpendiculares. La ecuación de la recta r viene dada por r: x + ay – 5 =0. Obtén el valor de a y la ecuación explícita de la recta s. (1,5 puntos)

Como ambas rectas son secantes en A, ambas pasan por A, así que sustituyendo el punto A en la recta r podemos calcular el valor del parámetro a:

$$r: x+ay-5=0 \quad \rightarrow \quad -1+3a-5=0 \quad \rightarrow \quad 3a=6 \quad \rightarrow \quad a=2$$

Así que, a=2.

Como la recta r es $x+2y-5=0$, una recta perpendicular a ella sería:

$$2x-y+k=0$$

Nos falta conocer k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto (-1,3), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2\cdot(-1)-3+k=0 \quad \rightarrow \quad -2-3+k=0 \quad \rightarrow \quad k=5$$

Con esto, la recta pedida es en forma general es: 2x – y + 5 = 0 y en forma explícita sería: y = 2x + 5

Por tanto, el valor de a es 2 y la recta es y =2x+5

4.- Dados los puntos A(1,-2), B(0,2) y C(-2,0) calcula: (2 puntos)

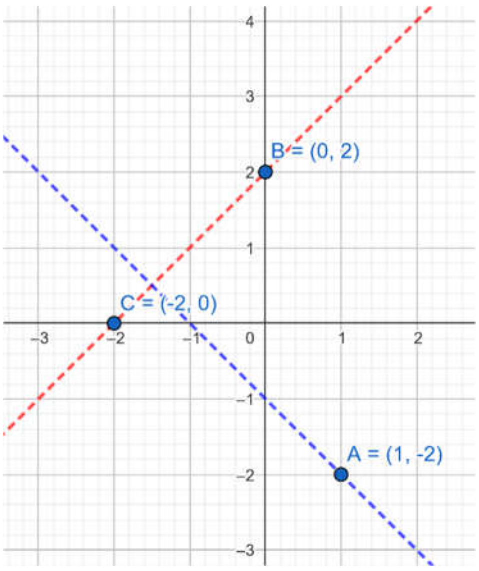
a) Ecuación de la recta que pasa por B y C.

Para la ecuación de una recta, se necesita un punto y un vector: $r:\begin{cases} P(p_x,p_y) \\ \vec{r}=(r_x,r_y) \end{cases}$ $\begin{cases} P(0,2) \\ \vec{r}=(-2,-2) \end{cases}$

Adem.as, sabemos que la ecuación continua de una recta viene dada por la expresión: $\frac{x-p_x}{v_x}=\frac{y-p_y}{v_y}$, así que bastaría con sustituir: $\frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{-2}$, que en forma general sería: $r_{BC}: 2x-2y+4=0$

Por lo tanto, la recta pedida es: x – y + 2 = 0

b) Ecuación de la altura que parte de A.



Vamos a representar la situación para ver que es lo que nos piden exactamente:

La altura es una recta perpendicular a la recta r_{BC}, por tanto, conociendo dicha recta, la perpendicular se obtiene cambiando la x por la y, y cambiándole el signo a una de ellas.

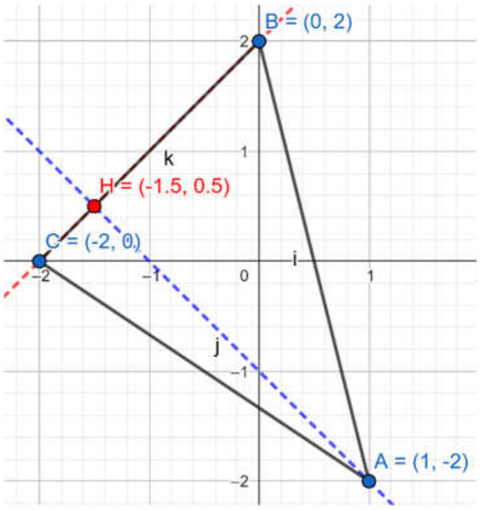
$$h: x+y+k=0$$

Ya solo faltaría calcular k, y lo calcularemos obligando a la recta a pasar por el punto A (1,-2), así que los sustituimos y calculamos k:

$$1\cdot(1)+1\cdot(-2)+k=0 \quad \rightarrow \quad 1-2+k=0 \quad \rightarrow \quad k=1$$

Con esto, la ecuación de la altura es: x + y + 1 = 0

c) El área del triángulo ABC.



Para calcular el área del triángulo, haremos el semiproducto de su base por su altura:

$$A = \frac{base \ x \ altura}{2}$$

La base es el módulo del vector $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-2,-2) \quad \rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Para calcular la altura, necesitamos calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AH}$, donde H es el punto de corte entre las rectas $h: x + y + 1 = 0$ y $r_{BC}: x - y + 2 = 0$, por tanto:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Por Reducción}} \quad 2x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad H = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Una vez conocido H, ya podemos calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AH}$:

$$\overrightarrow{AH} = H - A = \left(\frac{-5}{2}, \frac{5}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Y por último, el área es: $A = \dfrac{base \ x \ altura}{2} = \dfrac{2\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ u.a.

d) Determina si se trata de un triángulo rectángulo.

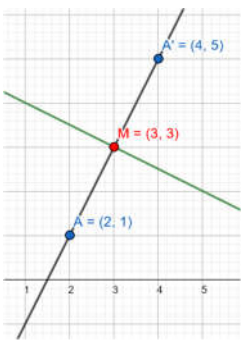
En el dibujo se ve claramente que no lo es, pero vamos a demostrarlo. Para que sea rectángulo ha de tener un ángulo recto, o lo que es lo mismo que el producto de las componentes de sus vectores ha de ser 0.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = C - B = (-2,-2) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (-3,2) \\ \overrightarrow{AB} = B - A = (-1,4) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC} \ y \ \overrightarrow{AC} & \rightarrow \quad (-2)\cdot(-3) + (-2)\cdot(2) = 6 - 4 = 2 \neq 0 \\ \overrightarrow{BC} \ y \ \overrightarrow{AB} & \rightarrow \quad (-2)\cdot(-1) + (-2)\cdot(4) = 2 - 8 = -6 \neq 0 \end{cases}$$

Por tanto, el triángulo no es rectángulo.

Otra forma de comprobarlo es utilizando el teorema de Pitágoras

5.– La recta r: x + 2y –9 = 0 es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto A (2, 1). Halla las coordenadas del otro extremo. (1,5 puntos)



Para calcular las coordenadas del otro extremo antes hemos de calcular la recta perpendicular a r que pasa por A:

La recta perpendicular viene dada por: $s: 2x - y + k = 0$

Para calcular k, obligamos a la recta s a pasar por el punto A (2, 1), así que los sustituimos y calculamos k:

$$2\cdot(2) - 1\cdot(1) + k = 0 \quad \rightarrow \quad 4 - 1 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -3$$

Así que la recta s tiene por ecuación: $s: 2x-y-3=0$

El punto de corte de ambas, será el punto medio del segmento, que llamaremos M:

$$\begin{cases} x+2y=9 \\ 2x-y=3 \end{cases} \xrightarrow[\text{multiplicando la 2ª ecuación por 2}]{\text{Por reducción}} \begin{cases} x+2y=9 \\ 4x-2y=6 \end{cases} \xrightarrow{\text{y sumando}} 5x=15 \rightarrow x=3 \quad e \quad y=2\cdot 3-3=3$$

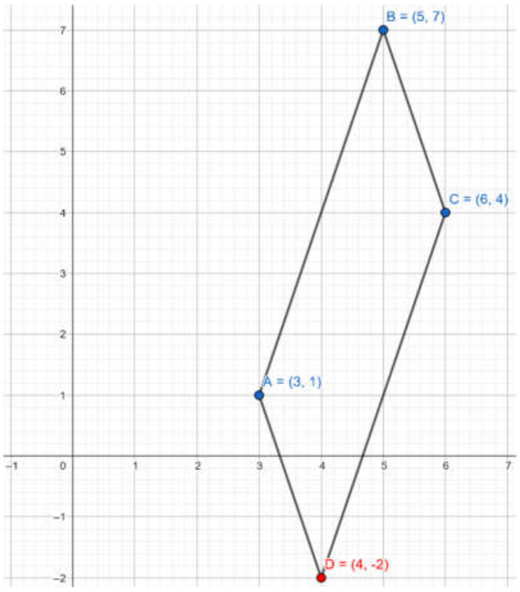
Así que las coordenadas de M son: M(3,3)

Y con ello ya podemos las coordenadas del punto A':

$$M=\left(\frac{a_x+a_x'}{2},\frac{a_y+a_y'}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} M_x=\frac{a_x+a_x'}{2} \rightarrow a_x'=2\cdot M_x-a_x \rightarrow a_x'=2\cdot 3-2=4 \\ M_y=\frac{a_y+a_y'}{2} \rightarrow a_y'=2\cdot M_y-a_y \rightarrow a_y'=2\cdot 3-1=5 \end{cases}$$

Así que, las coordenadas del otro punto son (4, 5)

6.- Si A(3,1), B(5,7) y C(6,4) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, encuentra el cuarto vértice D.



Como los vértices son consecutivos, y se trata de un paralelogramo, tiene que ocurrir que los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean iguales, por tanto, si al punto D le asignamos las coordenadas D(x,y), tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD}=D-A=(x-3,y-1) \\ \overrightarrow{BC}=C-B=(1,-3) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \rightarrow$$

$$(x-3,y-1)=(1,-3) \rightarrow \begin{cases} x-3=1 \rightarrow x=4 \\ y-1=-3 \rightarrow y=-2 \end{cases}$$

Por tanto, el cuarto vértice es el punto D(4,-2)

BONUS: Escribe la ecuación general de la diagonal BD y comprueba que dicha recta contiene el punto medio del segmento AC.

Calculemos primero el punto medio del segmento AC:

$$M_{AC}=\left(\frac{a_x+c_x}{2},\frac{a_y+c_y}{2}\right) = \left(\frac{3+6}{2},\frac{1+4}{2}\right) \rightarrow M_{AC}=\left(\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Ahora calcularemos la recta BD, para ello, y como siempre, necesitaremos un punto y un vector:

$$r:\begin{cases} B(b_x,b_y) \\ \vec{r}=(r_x,r_y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B(5,7) \\ \overrightarrow{BD}=(-1,-9) \end{cases} \rightarrow \frac{x-5}{-1}=\frac{y-7}{-9} \rightarrow r: 9x-y-38=0$$

Y para comprobar que M pertenece a la recta, hemos de sustituirlo y verificar que se cumple la igualdad:

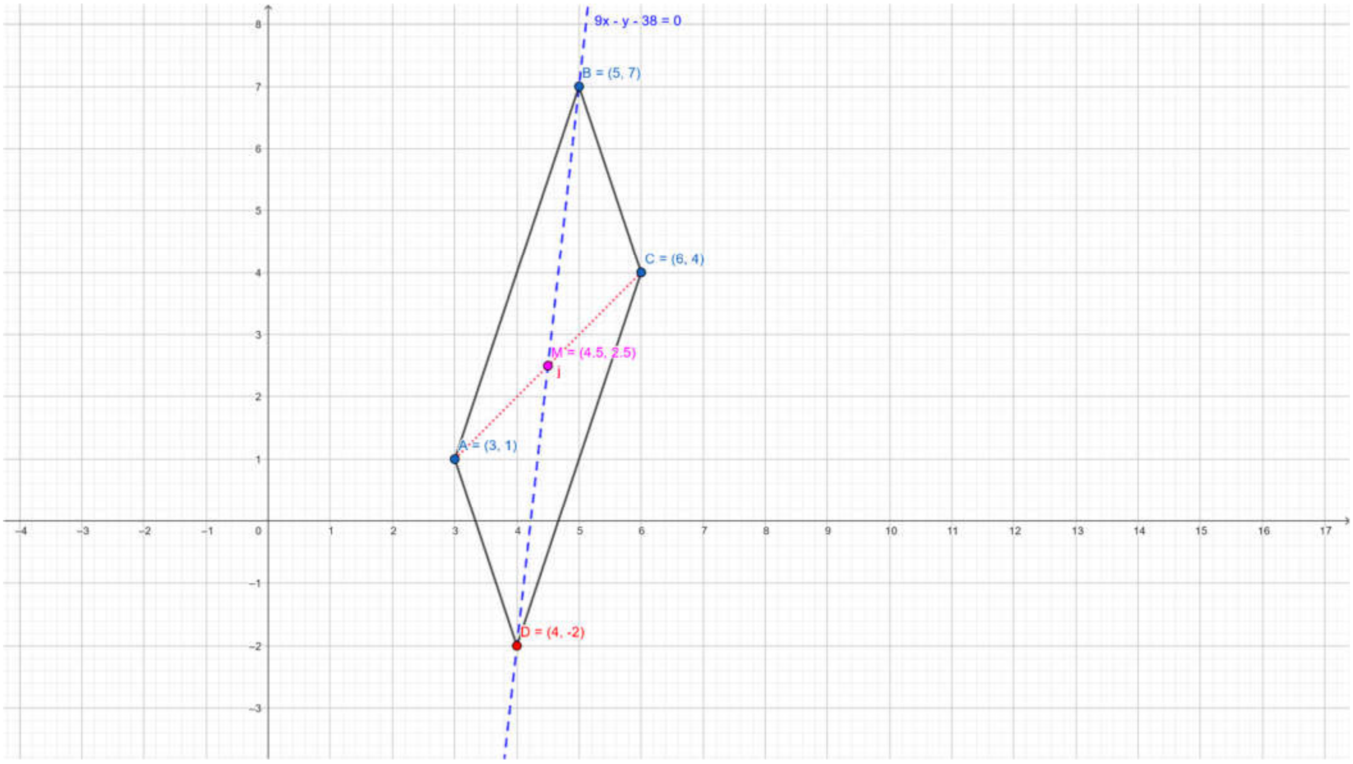
$$M\in r \leftrightarrow 9x-y-38=0 \rightarrow 9\cdot\left(\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{5}{2}\right)-38=0$$

Operando, llegamos a:

$$\frac{81}{2}-\frac{5}{2}-38=\frac{76}{2}-38=38-38=0$$

Por tanto, queda comprobado que el punto medio del segmento AC pertenece a la diagonal del paralelogramo que pasa por BD.

De forma gráfica podemos ver que la mediatriz de AC pertenece a la diagonal BD:



EID AL-ADHA MUBARAK