

	Nombre:			3ª Evaluación	Nota
	Curso:	4º ESO A	Examen XII		
	Fecha:	21 de mayo de 2024	Trigonometría		

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización de hasta 0,5 puntos

1.- Dado un ángulo α del cuarto cuadrante cuya $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2 + 0,5 puntos)

- a) Calcula el valor exacto de las restantes razones trigonométricas del ángulo α (las 5)
- b) Da el valor de un ángulo de otro cuadrante que tenga exactamente el mismo seno que α .

2.- De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide 8 m y que uno de sus catetos mide 5. Calcula todos sus ángulos y lados, además de su área. (2 + 0,5 puntos)

3.- Demuestra paso a paso y razonando las siguientes identidades trigonométricas: (1 + 1,5 puntos)

$$a) \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$$

$$b) \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

4.- Resuelve paso a paso y de forma razonada uno de los dos siguientes problemas: (2 + 0,5 puntos)

ONLY ONE !!! JUSTE UN !!!

- a) Desde la orilla de un río vemos un gran árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40° , y si se retroceden 4 m, se ve bajo un ángulo de 28° . Calcula, primero la altura del árbol y después la anchura del río.
- b) Para que una antena permanezca vertical se le han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados y alineados con su base. La distancia entre los anclajes es de 40 m y si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30° y 60° , respectivamente. Halla primero la altura de la antena y después las distancias que la separan de los anclajes.

BONUS.- Si sabemos que $\operatorname{sen} 25^\circ = 0,4226$; ¿cuáles son las razones trigonométricas de un ángulo cuya amplitud es 205° ?

 Departamento de Matemáticas	Nombre:			3ª Evaluación	Nota
	Curso:	4º ESO A	Examen XII		
	Fecha:	21 de mayo de 2024	Trigonometría		

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.- Dado un ángulo α del cuarto cuadrante cuya $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2 + 0,5 puntos)

a) Calcula el valor exacto de las restantes razones trigonométricas del ángulo α (las 5) (1,5 puntos)

Sabemos que la tangente de un ángulo viene dada por el cociente entre su seno y su coseno:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{cos} \alpha$$

Con esta relación entre ambas, y sustituyendo en la identidad fundamental de la trigonometría:

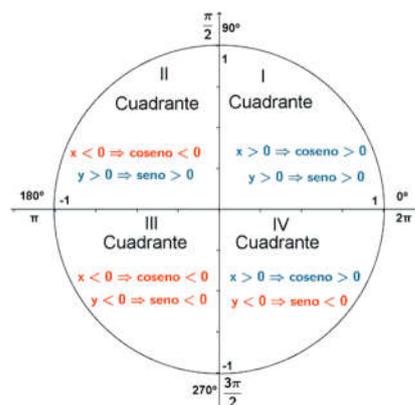
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{cos} \alpha\right)^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{1}{3} \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{4}{3} \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

Llegamos a:

$$\frac{4}{3} \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\text{De donde}} \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como estamos en el cuarto cuadrante, usando el criterio de signos de las razones trigonométricas, sabemos que el coseno es positivo, por tanto:

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Y ahora calculamos el seno:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \operatorname{cos}^2 \alpha \leftarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

Otra vez con el criterio de signos, el seno valdrá: $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2}$

Conocidas las razones trigonométricas principales, podemos calcular las inversas:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \operatorname{cot} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tan} \alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

Por tanto, las razones pedidas del ángulo α son:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tan} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = -2$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cot} \alpha = -\sqrt{3}$$

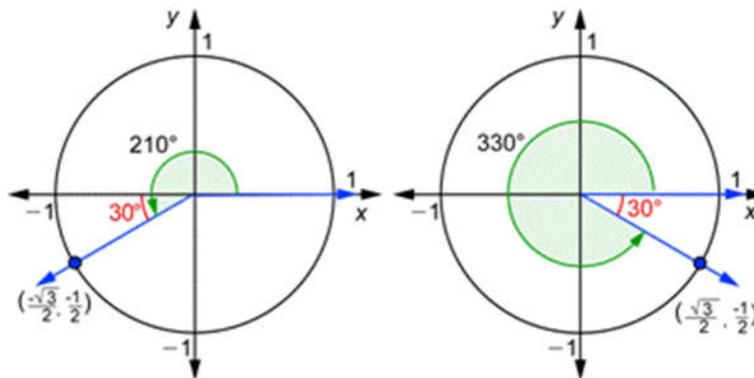
b) Da el valor de un ángulo de otro cuadrante que tenga exactamente el mismo seno que α . (0,5 puntos)

Sabemos que en el cuarto cuadrante el seno es negativo, $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$, así que, en el otro cuadrante donde tiene exactamente el mismo valor es en el tercero, donde también es negativo.

Así que el ángulo buscado estará en el tercer cuadrante.

El ángulo original del 4º cuadrante es de 330° porque el ángulo de seno $-\frac{1}{2}$ se corresponde con el ángulo de -30° que en realidad es el de 330° .

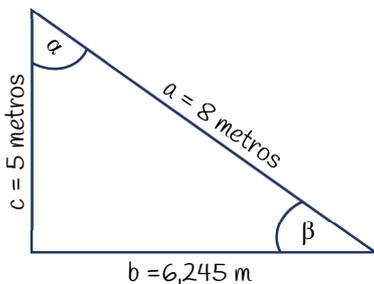
En el tercer cuadrante el ángulo será de $180 + 30 = 210^\circ$



Por tanto, el ángulo de otro cuadrante con el mismo seno es el ángulo de 210° o de $7\pi/6$.

El ángulo pedido es: $\beta = \frac{7}{6}\pi$

2.- De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide 8 m y que uno de sus catetos mide 5 m. Calcula todos sus ángulos y lados, además de su área. (2 + 0,5 puntos)



Como es un triángulo rectángulo y conocemos dos de sus lados, por el Teorema de Pitágoras, calculamos el cateto restante:

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} \rightarrow \\ \rightarrow b = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39} \rightarrow b = \sqrt{39}$$

Y conocidos los 3 lados, vamos a calcular ahora los ángulos α y β :

Para calcular el ángulo α , usaremos el coseno: $\rightarrow \cos \alpha = \frac{\text{Cateto Contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{8} \rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{8}$

Y conocido el coseno, calculamos el ángulo α mediante la función Arco:

$$\text{Si } \cos \alpha = \frac{5}{8} \rightarrow \alpha = \text{Arccos}\left(\frac{5}{8}\right) = 51^\circ 19' 4,13'' \rightarrow \alpha = 51^\circ 19' 4,13''$$

Como es rectángulo el ángulo A es recto, y el ángulo β será $90 - \alpha$.

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 51^\circ 19' 4,13'' = 38^\circ 40' 55,87'' \rightarrow \beta = 38^\circ 40' 55,87''$$

Y el área, la calculamos haciendo el semiproducto de la base por la altura:

$$A = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{39}}{2} \rightarrow A = 15,61 \text{ m}^2$$

Por tanto, $a=8$ m; $b=6,245$ m y $c=5$ m; $\alpha=51^\circ 19' 4,13''$; $\beta=38^\circ 40' 55,87''$ y $A=90^\circ$

3.- Demuestra paso a paso y razonando las siguientes identidades trigonométricas:

(1 + 1,5 puntos)

$$a) \cos^4 x - \sin^4 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$$

$$b) \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$ $\xrightarrow{\text{Desarrollamos la Id. Notable}} (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (1) =$
Id. fund. de la Trigonometría $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \rightarrow \text{C.q.d.}$$

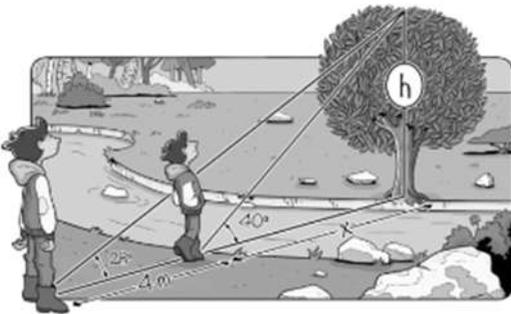
b) $\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} \stackrel{=}{\text{Sacamos factor común } \cos^2 x} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)} \stackrel{=}{\text{Subimos el } \cos^2 x}$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cancel{\cos x}}{\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cancel{\cos^2 x}}\right)} \stackrel{=}{\text{Simplificamos}} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cancel{\cos x}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} \stackrel{=}{\text{Cambiamos } \frac{\operatorname{sen}}{\cos} = \tan} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \text{C.q.d.}$$

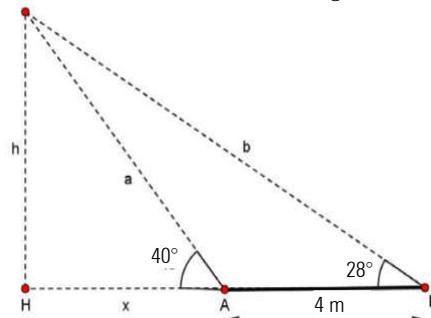
4.- Resuelve paso a paso y de forma razonada uno de los dos siguientes problemas:

(2 + 0,5 puntos)

a) Desde la orilla de un río vemos un gran árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40° , y si se retroceden 4 m, se ve bajo un ángulo de 28° . Calcula, primero la altura del árbol y después la anchura del río.



Si nos ayudamos de un croquis obtenemos el dibujo de la izquierda, donde hemos llamado h a la altura del árbol y x a la anchura del río.



La razón trigonométrica que relaciona los catetos opuestos y los catetos contiguos es la tangente, así que:

$$\text{En el triángulo pequeño: } \tan 40^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\text{Mientras que en el triángulo grande: } \tan 28^\circ = \frac{h}{x+4}$$

Con ambas ecuaciones, formamos un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \tan 40^\circ = \frac{h}{x} \\ \tan 28^\circ = \frac{h}{x+4} \end{cases}$$

Como nos piden calcular primero h , vamos a despejar x en la primera ecuación:

$$\text{De } \tan 40^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 40^\circ}$$

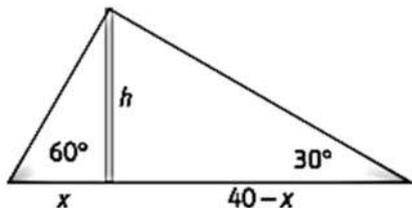
Para después sustituirla en la segunda:

$$\begin{aligned}
 \text{En } \tan 28^\circ &= \frac{h}{x+4} \rightarrow \tan 28^\circ = \frac{h}{\frac{h}{\tan 40^\circ} + 4} \xrightarrow{\text{Operando un poco}} \tan 28^\circ = \frac{h}{\frac{h}{\tan 40^\circ} + \frac{4 \cdot \tan 40^\circ}{\tan 40^\circ}} \rightarrow \\
 \tan 28^\circ &= \frac{h}{\frac{h + 4 \tan 40^\circ}{\tan 40^\circ}} \rightarrow \tan 28^\circ = \frac{h \cdot \tan 40^\circ}{h + 4 \tan 40^\circ} \xrightarrow{\text{Operando}} (h + 4 \tan 40^\circ) \tan 28^\circ = h \cdot \tan 40^\circ \rightarrow \\
 \rightarrow h \cdot \tan 28^\circ + 4 \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 28^\circ &= h \cdot \tan 40^\circ \xrightarrow{\text{Agrupando}} h \cdot \tan 40^\circ - h \cdot \tan 28^\circ = 4 \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 28^\circ \rightarrow \\
 \xrightarrow{\text{Sacamos factor común h}} h(\tan 40^\circ - \tan 28^\circ) &= 4 \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 28^\circ \xrightarrow{\text{Despejamos h}} h = \frac{4 \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 28^\circ}{\tan 40^\circ - \tan 28^\circ} = 5,806 \text{ m} \\
 \rightarrow h &= 5,806 \text{ m} \rightarrow \text{El árbol mide 5,81 metros}
 \end{aligned}$$

Y para calcular la anchura del río x , la calcularemos de: $\tan 40^\circ = \frac{h}{x}$, por tanto:

$$\tan 40^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 40^\circ} = \frac{5,8057}{\tan 40^\circ} \rightarrow x = 6,919 \text{ m} \rightarrow \text{La anchura del río es de 6,92 metros}$$

- b) Para que una antena permanezca vertical se le han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados y alineados con su base. La distancia entre los anclajes es de 40 m y si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30° y 60° , respectivamente. Halla primero la altura de la antena y después las distancias que la separan de los anclajes.



Si nos ayudamos de un croquis obtenemos el dibujo de la izquierda.

Donde hemos llamado h a la altura de la antena, x a la distancia de un anclaje a la antena y $40 - x$ al otro.

Como la razón trigonométrica que relaciona los catetos opuestos y los catetos contiguos es la tangente, tenemos que:

$$\text{En el triángulo de la izquierda: } \tan 60^\circ = \frac{h}{x} \text{ y en el triángulo de la derecha: } \tan 30^\circ = \frac{h}{40 - x}$$

$$\text{Con ambas ecuaciones, formamos un sistema de ecuaciones lineales: } \begin{cases} \tan 60^\circ = \frac{h}{x} \\ \tan 30^\circ = \frac{h}{40 - x} \end{cases}$$

Como nos piden calcular primero h , vamos a despejar x en la primera ecuación:

$$\text{De } \tan 60^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 60^\circ}$$

Para después sustituirla en la segunda:

$$\text{En } \tan 30^\circ = \frac{h}{40 - x} \rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h}{40 - \frac{h}{\tan 60^\circ}} \xrightarrow{\text{Operando un poco}} \tan 30^\circ = \frac{h}{\frac{40 \cdot \tan 60^\circ}{\tan 60^\circ} - \frac{h}{\tan 60^\circ}} \rightarrow$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{40 \cdot \tan 60^\circ - h} \rightarrow \tan 30^\circ = \frac{h \cdot \tan 60^\circ}{40 \cdot \tan 60^\circ - h} \xrightarrow{\text{Operando}} (40 \tan 60^\circ - h) \tan 30^\circ = h \cdot \tan 60^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow 40 \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ - h \cdot \tan 30^\circ = h \cdot \tan 60^\circ \xrightarrow{\text{Agrupando}} h \cdot \tan 60^\circ + h \cdot \tan 30^\circ = 40 \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{Sacamos factor com\u00fan h}} h \cdot (\tan 60^\circ + \tan 30^\circ) = 40 \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \xrightarrow{\text{Despejamos h}} h = \frac{40 \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ + \tan 30^\circ} = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

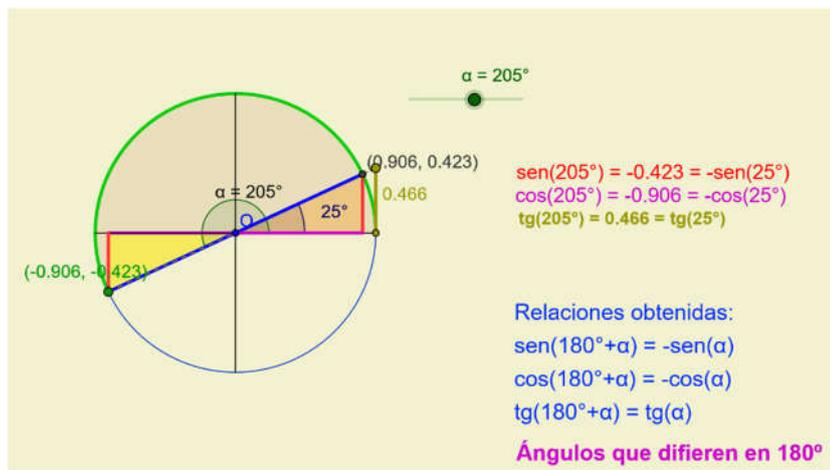
$$\rightarrow h = 17,32 \text{ m} \rightarrow \text{La antena mide } 17,32 \text{ metros}$$

Y para calcular las longitudes de la antena a los anclajes, lo haremos con: $\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$, por tanto:

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10 \rightarrow x = 10 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia a uno de los anclajes es 10 metros y la otra 30.

B. Si sabemos que $\text{sen } 25^\circ = 0,4226$; \u00bfcu\u00e1les son las razones trigonom\u00e9tricas de un \u00e1ngulo cuya amplitud es 205° ?



Como podemos observar en la figura, los valores del \u00e1ngulo de 25° y de 205° coinciden en valor absoluto, y solo tenemos que ajustar los signos con la ayuda de un dibujo:

$$\text{sen}(205^\circ) = -\text{sen}(25^\circ) = -0,4226$$

$$\text{cos}(205^\circ) = -\text{cos}(25^\circ) = -0,9063$$

$$\text{tan}(205^\circ) = \text{tan}(25^\circ) = 0,4663$$



	Nombre:			3ª Evaluación	Nota
	Curso:	4º ESO A	Examen XII		
	Fecha:	20 de mayo de 2024	Simulacro de Trigonometría		

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.- Dado un ángulo del segundo cuadrante cuyo $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, calcula las restantes razones trigonométricas (las 5) e indica la amplitud del ángulo α , tanto en radianes como en grados sexagesimales. (2 puntos)

2.- De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide 8 cm y que uno de sus ángulos es de 25° . Calcula todos sus ángulos y lados, además de su área. (2 puntos)

3.- Desde el centro de Granada se observa un avión bajo un ángulo de 29° con la horizontal, en ese mismo instante, y desde la ciudad de Jaén, se ve ese mismo avión bajo otro ángulo de 43° también con la horizontal. Sabiendo que el avión no se encuentra entre ambas ciudades, y que distan 80 kilómetros entre ellas. ¿A qué altura está el avión en ese momento? ¿A qué distancia se encuentra de cada ciudad? (2 puntos)

4.- Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: (2 puntos)

$$(\text{sen } x - \text{cos } x)^2 + (\text{sen } x + \text{cos } x)^2 = 2$$

5.- Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre su hipotenusa valen $m = 3,6$ centímetros y $n = 10$ cm, respectivamente. Resuelve el triángulo y calcula su área. (2 puntos)

 Departamento de Matemáticas	Nombre:	SOLUCIONES		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	4º ESO A	Examen XII		
	Fecha:	20 de mayo de 2024	Simulacro de Trigonometría		

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.- Dado un ángulo del segundo cuadrante cuyo $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, calcula las restantes razones trigonométricas e indica la amplitud del ángulo α , tanto en radianes como en grados sexagesimales. (2 puntos)

De la identidad fundamental de la trigonometría, como conocemos el seno, despejamos el coseno:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha \rightarrow \text{cos } \alpha = \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} \rightarrow \text{cos } \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

Operando:

$$\text{cos } \alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \rightarrow \text{cos } \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{25-9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} \rightarrow \text{cos } \alpha = -\frac{4}{5}$$

Cogemos la **solución negativa** por que estamos en el segundo cuadrante y en él, el coseno es negativo.

Como la tangente de un ángulo es el cociente entre el seno y el coseno y conocemos ambos, podemos calcularla:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \rightarrow \text{tg } \alpha = -\frac{3}{4} \text{ (1 punto)}$$

Las funciones trigonométricas inversas son:

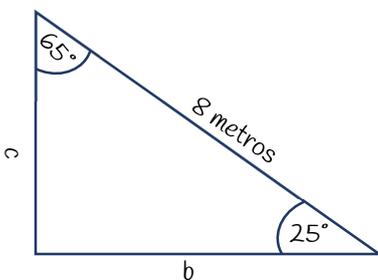
$$\text{sec } \alpha = \frac{1}{\text{cos } \alpha} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4} \rightarrow \text{sec } \alpha = -\frac{5}{4} \quad \text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \rightarrow \text{cosec } \alpha = \frac{5}{3}$$

Y por último la cotangente: $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} \rightarrow \text{cotg } \alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \rightarrow \text{cotg } \alpha = -\frac{4}{3} \text{ (0,5 puntos)}$

Si $\text{cos } \alpha = -4/5$, entonces $\alpha = \text{Arcsen}(-4/5) = 143^\circ 7' 48,37'' = 2,5 \text{ rad.}$ (0,5 puntos)

Así, $\text{Sen } \alpha = 3/5$; $\text{Cos } \alpha = -4/5$; $\text{Tg } \alpha = -3/4$; $\text{Cosec } \alpha = 5/3$; $\text{Sec } \alpha = -5/4$ y $\text{Cotg } \alpha = -4/3$ y $\alpha = 143^\circ 7' 48,37'' = 2,5 \text{ rad.}$

2.- De un triángulo rectángulo se sabe que la hipotenusa mide 8 cm y que uno de sus ángulos es de 25° . Calcula todos sus ángulos y lados, además de su área. (2 puntos)



Si uno de los ángulos mide 25° , como se trata de un triángulo rectángulo, el otro ángulo mide $90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

Y ahora, conocidos los tres ángulos, solo falta a conocer los lados. (0,5 puntos)

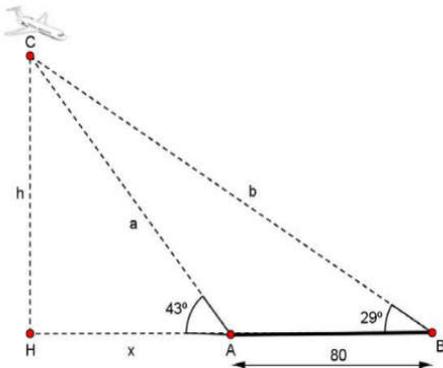
Para ello, utilizaremos las razones trigonométricas del ángulo de 25° :

$$\begin{aligned} \text{sen } 25^\circ &= \frac{c}{8} \rightarrow c = 8 \cdot \text{sen } 25^\circ \rightarrow c = 3,38 \text{ m} \\ \text{cos } 25^\circ &= \frac{b}{8} \rightarrow b = 8 \cdot \text{cos } 25^\circ \rightarrow b = 7,25 \text{ m} \end{aligned} \text{ (1 punto)}$$

Para calcular el área, utilizaremos: $A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{7,25 \cdot 3,38}{2} = 12,253 \text{ m}^2$ (0,5 puntos)

Por tanto, $C = 25^\circ$, $B = 65^\circ$, $c = 3,38 \text{ m}$, $b = 7,25 \text{ m}$ y el área es de $12,253 \text{ m}^2$.

3.- Desde el centro de Granada se observa un avión bajo un ángulo de 29° con la horizontal, en ese mismo instante, y desde la ciudad de Jaén, se ve ese mismo avión bajo otro ángulo de 43° también con la horizontal. Sabiendo que el avión no se encuentra entre ambas ciudades, y que distan 80 kilómetros entre ellas. ¿A qué altura está el avión en ese momento? ¿A qué distancia se encuentra de cada ciudad? (2 puntos)



Tenemos dos triángulos rectángulos: el AHC y el BHC.

✓ En el triángulo AHC se verifica que: $\operatorname{tg}(43^\circ) = \frac{h}{x}$

✓ En el triángulo BHC se verifica que: $\operatorname{tg}(29^\circ) = \frac{h}{x+80}$

Con estas dos ecuaciones podemos formar un sistema de

ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(43^\circ) = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg}(29^\circ) = \frac{h}{x+80} \end{cases} \quad (0,5 \text{ puntos})$$

Si despejamos h de la primera ecuación llegamos a: $\operatorname{tg}(43^\circ) = \frac{h}{x} \xrightarrow{\text{De donde}} h = x \cdot \operatorname{tg}(43^\circ) \quad (1)$

y si lo **sustituimos** en la segunda, llegamos a:

$$\operatorname{tg}(29^\circ) = \frac{h}{x+80} \rightarrow \operatorname{tg}(29^\circ) = \frac{x \cdot \operatorname{tg}(43^\circ)}{x+80}$$

Donde, si operamos, llegamos a:

$$(x+80)\operatorname{tg}(29^\circ) = x \cdot \operatorname{tg}(43^\circ) \rightarrow x \cdot \operatorname{tg}(29^\circ) + 80 \cdot \operatorname{tg}(29^\circ) = x \cdot \operatorname{tg}(43^\circ)$$

$$\rightarrow 80 \cdot \operatorname{tg}(29^\circ) = x \cdot \operatorname{tg}(43^\circ) - x \cdot \operatorname{tg}(29^\circ)$$

Y sacando factor común la x , podemos despejarla y calcularla:

$$80 \cdot \operatorname{tg}(29^\circ) = x \cdot \operatorname{tg}(43^\circ) - x \cdot \operatorname{tg}(29^\circ) \rightarrow 80 \cdot \operatorname{tg}(29^\circ) = x [\operatorname{tg}(43^\circ) - \operatorname{tg}(29^\circ)]$$

$$\rightarrow x = \frac{80 \cdot \operatorname{tg}(29^\circ)}{[\operatorname{tg}(43^\circ) - \operatorname{tg}(29^\circ)]} = 117,25 \text{ km}$$

Una vez conocida la x , podemos calcular la altura h de la expresión (1), así que;

$$h = x \cdot \operatorname{tg}(43^\circ) \rightarrow h = 117,25 \cdot \operatorname{tg}(43^\circ) = 109,34 \text{ km} \quad (1 \text{ punto})$$

Para calcular la distancia del avión a Granada (B) y a Jaén (A) podemos hacerlo usando el teorema de Pitágoras o utilizando las razones trigonométricas, vamos a hacerlo usando las razones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(29^\circ) = \frac{h}{b} \rightarrow b = \frac{h}{\operatorname{sen}(29^\circ)} = \frac{109,34}{\operatorname{sen}(29^\circ)} = 225,53 \text{ km}$$

(0,5 puntos)

$$\operatorname{sen}(43^\circ) = \frac{h}{a} \rightarrow a = \frac{h}{\operatorname{sen}(43^\circ)} = \frac{109,34}{\operatorname{sen}(43^\circ)} = 160,32 \text{ km}$$

Por tanto, el avión vuela a casi 110 km de altura y está a 225 km de Granada y a 160 km de Jaén.

4.- Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $(\sen x - \cos x)^2 + (\sen x + \cos x)^2 = 2$

Si desarrollamos ambas identidades notables:

$$(\sen x - \cos x)^2 + (\sen x + \cos x)^2 = 2 \rightarrow \sen^2 x + \cos^2 x - 2 \cdot \sen x \cdot \cos x + \sen^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sen x \cdot \cos x = 2$$

Y agrupamos términos, vemos que los dobles productos se anulan:

$$\sen^2 x + \cos^2 x - \cancel{2 \cdot \sen x \cdot \cos x} + \sen^2 x + \cos^2 x + \cancel{2 \cdot \sen x \cdot \cos x} = 2 \rightarrow 2\sen^2 x + 2\cos^2 x = 2$$

Por tanto, sacando factor común 2 en la expresión anterior llegamos a:

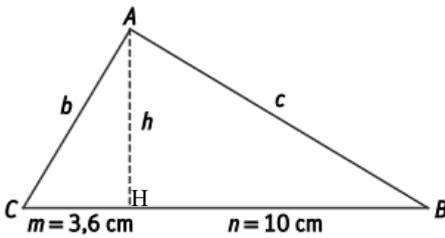
$$2\sen^2 x + 2\cos^2 x = 2 \rightarrow 2(\sen^2 x + \cos^2 x) = 2$$

Y sabiendo que la identidad fundamental de la trigonometría afirma que: $\sen^2 x + \cos^2 x = 1$ llegamos a:

$$2(\sen^2 x + \cos^2 x) = 2 \rightarrow 2(1) = 2 \rightarrow 2 = 2 \quad \text{que es una identidad.}$$

Por tanto, queda demostrada la identidad trigonométrica propuesta.

5.- Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre su hipotenusa valen $m = 3,6$ cm y $n = 10$ cm, respectivamente. Resuelve el triángulo y calcula su área. (2 puntos)



Si hacemos un croquis con los datos del problema, obtenemos la figura de la izquierda.

Para obtener la hipotenusa del triángulo, bastaría con sumar las dos proyecciones m y n , por tanto:

$$a = m + n = 10 + 3,6 = 13,6 \rightarrow a = 13,6 \text{ cm}$$

Como conocemos m y n , podemos calcular la altura h aplicando el **teorema de la altura**, que decía que en un triángulo rectángulo la altura al cuadrado era igual al producto de las proyecciones de los dos catetos sobre ella, por tanto:

$$h^2 = m \cdot n \rightarrow h = \sqrt{m \cdot n} = \sqrt{3,6 \cdot 10} = \sqrt{36} = 6 \rightarrow h = 6 \text{ cm}$$

Para calcular el ángulo B , nos podemos fijar en el triángulo AHB y utilizar la tangente puesto que conocemos el cateto opuesto h y el cateto contiguo n , así que

$$\operatorname{tg} B = \frac{h}{n} \rightarrow B = \operatorname{Arctg}\left(\frac{h}{n}\right) = \operatorname{Arctg}\left(\frac{6}{10}\right) = 30^\circ 57' 49,52'' \rightarrow B = 31^\circ$$

Conocido B , podemos calcular C :

$$C = 90^\circ - B = 90^\circ - 30^\circ 57' 49,52'' = 59^\circ 2' 10,48'' \rightarrow C = 59^\circ$$

El cateto c lo podemos calcular aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo AHB:

$$c^2 = n^2 + h^2 \rightarrow c = \sqrt{n^2 + h^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34} = 11,66 \rightarrow c = 11,66 \text{ cm}$$

Y el cateto b , por ejemplo, mediante el seno de C en el triángulo AHC:

$$\operatorname{sen} C = \frac{h}{b} \rightarrow b = \frac{h}{\operatorname{sen} C} = \frac{6}{\operatorname{sen}(59^\circ)} = 6,9998 \rightarrow b = 7 \text{ cm}$$

Y para terminar, su área será:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{13,6 \cdot 6}{2} = 40,8 \rightarrow \text{Área} = 40,8 \text{ cm}^2$$

Por tanto, $a = 13,6$ cm; $b = 7$ cm; $c = 11,66$ cm; $A = 90^\circ$, $B = 31^\circ$, $C = 59^\circ$ y el Área = $40,8 \text{ cm}^2$.