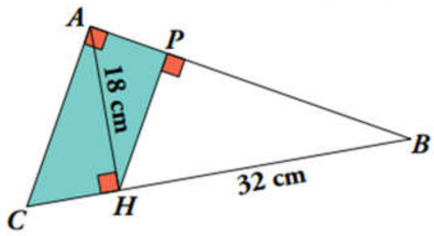
Departamento de Matemáticas	Nombre:		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO A**	Examen XI – 1ª Parte	
	Fecha:	29 de abril de 2024	Áreas, volúmenes y semejanza	

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.- Enuncia y demuestra el teorema del cateto. (2 puntos)

2.- En el triángulo ABC, rectángulo en A, conocemos $\overline{AH} = 18\ cm$ y $\overline{HB} = 32\ cm$. (1,5 puntos)



a) Calcula $\overline{CH}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

b) Aplica el teorema del cateto en el triángulo AHB para obtener $\overline{AP}$ y después calcula $\overline{PH}$.

c) Halla el área y el perímetro del trapecio APHC.

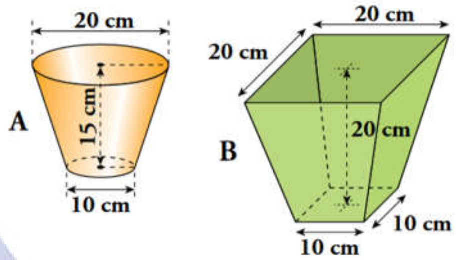
3.- Un cilindro y un cono tienen la misma superficie total, $96\pi\ cm^2$, y el mismo radio, 6 cm. ¿Cuál de los dos tendrá mayor volumen? (1,5 puntos)

Departamento de Matemáticas	Nombre:		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO A**	Examen XI – 2ª Parte	
	Fecha:	30 de abril de 2024	Áreas, volúmenes y semejanza	

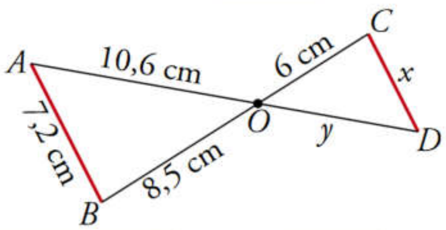
IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

4.- En un cine, las palomitas se vendían hasta ahora en recipientes del tipo A, por 3 €. El gerente está pensando en ofertar también otro formato, B, más grande. ¿Cuál crees que debería ser el precio del formato B? (2 puntos)



5.- Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD. (1 punto)

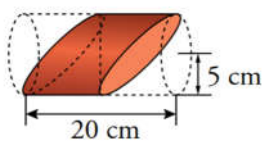


a) Razona por qué son semejantes los triángulos OAB y ODC.

b) Calcula razonadamente el valor de x e y.

6.- Un triángulo rectángulo de 60 cm^2 de área tiene un cateto que mide 8 cm. Calcula la altura sobre la hipotenusa y las proyecciones (m y n) de los catetos sobre ella. (2 puntos)

B1.- Cortamos una barra de mortadela con un cuchillo como ves en la figura para hacer bocadillos. Halla la superficie y el volumen del trozo que queda.



B2.- Obtén el teorema de Pitágoras utilizando solamente el teorema del cateto. ¿Se podría demostrar utilizando solo el teorema de la altura?

Departamento de Matemáticas	Nombre:	**S O L U C I O N E S**	3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO A**	Examen XI	
	Fecha:	29 de abril de 2024	Áreas, volúmenes y semejanza	

IES ABYLA (Ceuta)

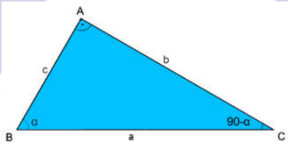
La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.- Enuncia y demuestra el teorema del cateto. (2 puntos)

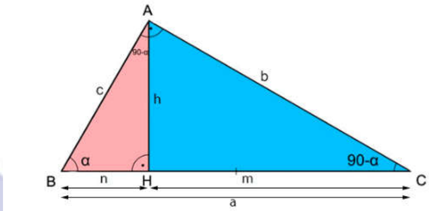
El Teorema de la altura dice: En todo **triángulo rectángulo**, el cuadrado de la altura (h) sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (n y m).

$$h^2 = m \cdot n$$

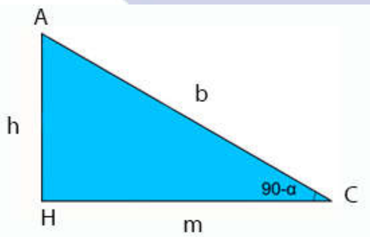
Para demostrarlo, nos ayudaremos de un triángulo rectángulo ABC apoyado sobre su hipotenusa,

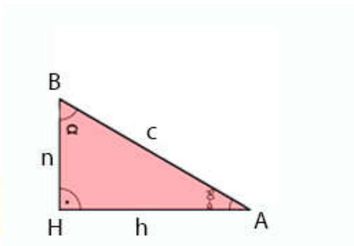


Si trazamos la altura, h, sobre su hipotenusa **a**, la parte en dos segmentos m y n que son las proyecciones sobre ella de los catetos b y c. Además, divide el triángulo rectángulo en otros dos también rectángulos: el HBA y el HAC.



Pues si nos fijamos en los triángulos HAB y en el HAC, podemos observar que son semejantes:



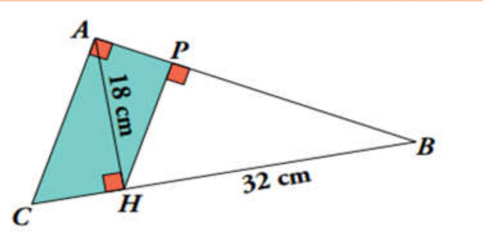


Y por tanto, aplicando la semejanza de triángulos, llegamos a:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \quad \rightarrow \quad h \cdot h = m \cdot n \quad \rightarrow \quad h^2 = m \cdot n$$

Por tanto, queda demostrado el Teorema de la Altura.

2.- En el triángulo ABC, rectángulo en A, conocemos $\overline{AH} = 18\ cm$ y $\overline{HB} = 32\ cm$. (1,5 puntos)



a) Calcula $\overline{CH}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

b) Aplica el teorema del cateto en el triángulo AHB para obtener $\overline{AP}$ y después calcula $\overline{PH}$.

c) Halla el área y el perímetro del trapecio APHC.

a) Para calcular el segmento $\overline{CH}$, que se corresponde con n, utilizaremos el teorema de la altura:

$$h^2 = m \cdot n \quad \rightarrow \quad n = \frac{h^2}{m} = \frac{18^2}{32} = \frac{81}{8} \quad \rightarrow \quad \overline{CH} = 10{,}125\ cm$$

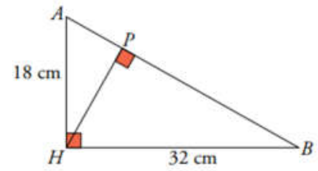
Para calcular el segmento $\overline{AC}$, que se corresponde con el cateto c, utilizaremos el teorema del cateto:

$$c^2 = a\cdot n \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a\cdot n} = \sqrt{\frac{81}{8}\cdot\frac{337}{8}} = \sqrt{\frac{27297}{64}} = \frac{9}{8}\sqrt{337} \quad \rightarrow \quad \overline{AC} = 20{,}652\ cm$$

Por último, para calcular el segmento $\overline{AB}$, que se corresponde con el cateto b, utilizaremos el teorema de Pitágoras en el triángulo AHB:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{18^2 + 32^2} = \sqrt{1348} = 2\sqrt{337} \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = 36{,}715\ cm$$

b) Si en el triángulo AHB aplicamos el teorema del cateto:



$$\overline{AH}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AP} \quad \rightarrow \quad \overline{AP} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}} = \frac{18^2}{\sqrt{1348}} \quad \rightarrow \quad \overline{AP} = 8{,}825\ cm$$

Para calcular el segmento $\overline{HP}$ podemos usar el teorema de Pitágoras en el triángulo AHP:

$$\overline{AH}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{AP}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{HP}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{AP}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{HP} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{18^2 - 8{,}82^2} = 15{,}688\ cm$$

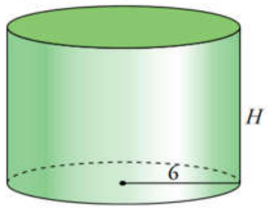
c) El perímetro de APHC será:

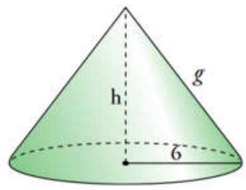
$$P_{APHC} = \overline{CH} + \overline{HP} + \overline{AP} + \overline{AC} = 10{,}125 + 15{,}688 + 8{,}825 + 20{,}652 = 55{,}29\ cm$$

Y el área del trapecio APHC:

$$A_{APHC} = \frac{\overline{PH} + \overline{AC}}{2}\cdot\overline{AP} = \frac{15{,}688 + 20{,}652}{2}\cdot 8{,}825 = 160{,}35\ cm^2$$

3.- Un cilindro y un cono tienen la misma superficie total, $96\pi\ cm^2$, y el mismo radio, 6 cm. ¿Cuál de los dos tendrá mayor volumen? (1,5 puntos)





Para calcular el volumen de ambas figuras, vamos primero a calcular las alturas H y h de ambas figuras con el dato de sus áreas:

Área del cilindro: Es igual a la suma de las dos bases + el área lateral.

$$A_{Cil} = 2\left(A_{Base}\right) + A_{Lat} = 2\left(\pi R^2\right) + 2\pi RH = 2\left(\pi 6^2\right) + 2\pi 6H = 72\pi + 12\pi H$$

De aquí, como conocemos el área total, podemos calcular H:

$$A_{Cil} = 96\pi \quad \rightarrow \quad 96\pi = 72\pi + 12\pi H \quad \rightarrow \quad 24\pi = 12\pi H \quad \rightarrow \quad H = \frac{24\pi}{12\pi} = 2\ cm$$

Así que, la altura del cilindro es de 2 cm.

Conocida su altura, ya podemos calcular su **volumen**, multiplicando el área de la base por la altura:

$$V_{Cil} = A_{Base}\cdot H = \pi\cdot R^2\cdot H = \pi\cdot 6^2\cdot 2 = 72\pi\ cm^3$$

Y su volumen es de $72\pi\ cm^3$.

Área del cono: Es igual a la suma del área de la base + el área lateral:

$$A_{Cono} = A_{Base} + A_{Lat} = \pi R^2 + \pi RH = \pi R\left(R + g\right)$$

De aquí, como conocemos el área total, podemos calcular g:

$$A_{Cil} = 96\pi \quad \rightarrow \quad 96\cancel{\pi} = \cancel{\pi}6\left(6+g\right) \quad \rightarrow \quad 96 = 36 + 6g \quad \rightarrow \quad 60 = 6g \quad \rightarrow \quad g = \frac{60}{6} = 10\ cm$$

Y con la generatriz, g, ya podemos calcular la altura, h, mediante la aplicación del Teorema de Pitágoras al cono:

$$g^2 = h^2 + R^2 \quad \rightarrow \quad h^2 = g^2 - R^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{g^2 - R^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8\ cm$$

Así que, la altura del cono es de 8 cm.

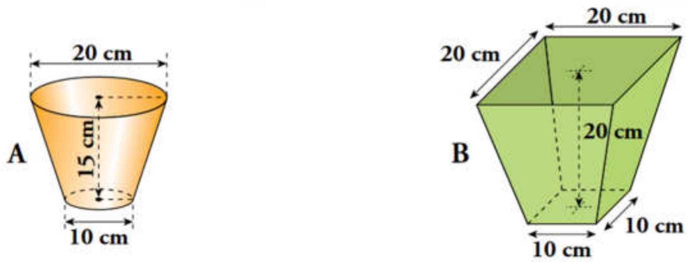
Conocida su altura, ya podemos calcular su volumen, haciendo la tercera parte del producto del área de la base por la altura:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi\ cm^3$$

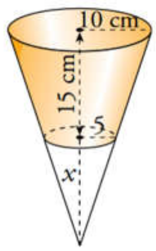
Por lo tanto, su volumen es de 96π cm^3.

Así que, de los dos, el de mayor volumen es el cono.

4.- En un cine, las palomitas se vendían hasta ahora en recipientes del tipo A, por 3 €. El gerente está pensando en ofertar también otro formato, B, más grande. ¿Cuál crees que debería ser el precio del formato B? (2 puntos)



Vamos a calcular primero el volumen del tronco de cono, y para ello, prolongamos la generatriz y formamos un cono. El volumen del tronco de cono será la diferencia entre el cono grande y el pequeño:



Para calcular la altura del cono pequeño, x, en el dibujo, utilizaremos la semejanza de triángulos, puesto que, en la figura, podemos observar que, dos de los lados de los triángulos están sobre la misma recta y los otros son paralelos:

$$\frac{10}{5} = \frac{15+x}{x} \quad \rightarrow \quad 10x = 5(15+x) \quad \rightarrow \quad 10x = 75 + 5x \quad \rightarrow \quad 5x = 75 \quad \rightarrow \quad x = 15\ cm$$

Con esto ya podemos calcular los volúmenes de los conos grande y pequeño:

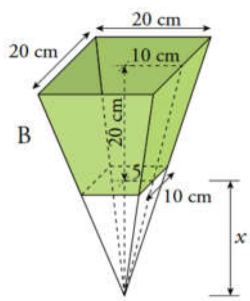
$$V_{Cono\ Grande} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2 \cdot H = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 10^2 \cdot 30 = 1000\pi\ cm^3$$

$$V_{Cono\ Pequeño} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 5^2 \cdot 15 = 125\pi\ cm^3$$

Y el volumen del tronco de cono será la diferencia entre ambos:

$$V_{Tronco\ de\ Cono} = V_{Cono\ Grande} - V_{Cono\ Pequeño} = 1000\pi - 125\pi = 875\pi\ cm^3$$

Para calcular el volumen del tronco de pirámide, procederemos de forma similar.



Para calcular la altura de la pirámide pequeña, x, en el dibujo, utilizaremos la semejanza de triángulos, puesto que, en la figura, podemos observar que, dos de los lados de los triángulos están sobre la misma recta y los otros son paralelos:

$$\frac{10}{5} = \frac{20+x}{x} \quad \rightarrow \quad 10x = 5(20+x) \quad \rightarrow \quad 10x = 100 + 5x \quad \rightarrow \quad x = 20\ cm$$

Con esto ya podemos calcular los volúmenes de las pirámides grande y pequeña:

$$V_{\text{Pirámide Grande}} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 40 = \frac{16.000}{3} \ cm^3$$

$$V_{\text{Pirámide Pequeña}} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 20 = \frac{2000}{3} \ cm^3$$

Con todo esto, el volumen del tronco de pirámide será la diferencia entre ambos:

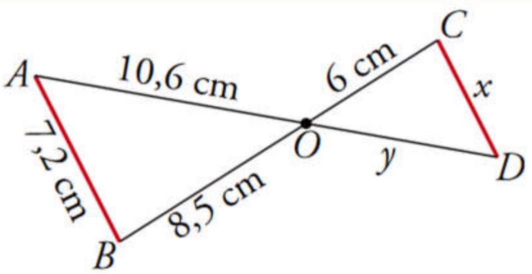
$$V_{\text{Tronco de Pirámide}} = V_{\text{Pirámide Grande}} - V_{\text{Pirámide Pequeña}} = \frac{16.000}{3} - \frac{2.000}{3} = \frac{14.000}{3} \ cm^3$$

Una vez conocidos los volúmenes de ambos recipientes de palomitas, para calcular el precio del más grande, del tronco de pirámide, haremos una regla de tres:

$$\frac{875\pi}{3€} = \frac{\frac{14000}{3}}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\frac{14000}{3} \cdot 3}{875\pi} = \frac{14000}{875\pi} = 5{,}09 \simeq 5$$

Así que, el precio del formato B será de 5 €

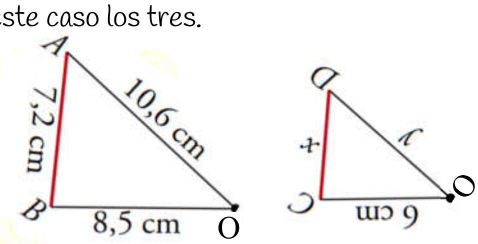
5.- Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD. (1 punto)



a) Razona por qué son semejantes los triángulos OAB y ODC.

Los triángulos OAB y ODC **son semejantes** porque cumplen el segundo de los criterios de semejanza, es decir, el hecho de que tengan un ángulo opuesto por el vértice $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ y un ángulo recto cada uno, implica que dos de sus ángulos sean iguales, en este caso los tres.

También son semejantes porque si giramos el triángulo COD 180° sobre su vértice O, conseguimos ponerlos en posición Tales.



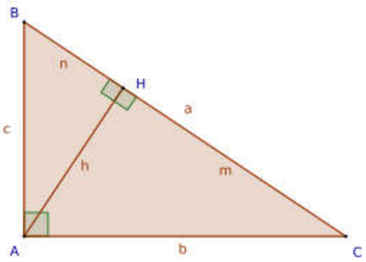
b) Calcula razonadamente el valor de x e y.

Al ser semejantes sus lados son proporcionales, y de esta forma podemos calcular fácilmente los valores de x e y, mediante una simple proporción o regla de 3:

$$\frac{x}{7{,}2} = \frac{6}{8{,}5} = \frac{y}{10{,}6} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{Si } \dfrac{x}{7{,}2} = \dfrac{6}{8{,}5} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{6 \cdot 7{,}2}{8{,}5} = 5{,}08 \ cm \\[2ex] \text{Si } \dfrac{6}{8{,}5} = \dfrac{y}{10{,}6} \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{6 \cdot 10{,}6}{8{,}5} = 7{,}48 \ cm \end{cases}$$

Por tanto, x=5,08 cm e y=7,48 cm

6.- Un triángulo rectángulo de 60 cm² de área tiene un cateto que mide 8 cm. Calcula la altura sobre la hipotenusa y las proyecciones (m y n) de los catetos sobre ella. (2 puntos)



Si el cateto c mide 8 cm, y el área mide 60 cm², podemos calcular el otro cateto simplemente con la ayuda del área y apoyándolo sobre uno de los catetos:

$$A=\frac{b\cdot c}{2}=\frac{b\cdot 8}{2}=4b \quad \rightarrow \quad b=\frac{A}{4}=\frac{60}{4}=15\ cm$$

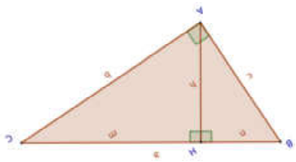
Si utilizamos Pitágoras, podemos calcular la hipotenusa a:

$$a^2=b^2+c^2 \quad \rightarrow \quad a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{15^2+8^2}=\sqrt{289}=17\ cm$$

Con todo esto, ya tenemos el valor de los catetos y de la hipotenusa.

Ahora con el cateto c y el teorema del cateto, podemos calcular su proyección sobre la hipotenusa n.

$$c^2=a\cdot n \quad \rightarrow \quad n=\frac{c^2}{a}=\frac{64}{17}=3,765\ cm$$



Y conocido n, podemos calcular m:

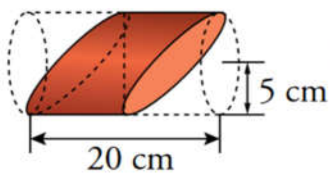
$$a=m+n \quad \rightarrow \quad m=a-n=17-\frac{64}{17}=\frac{225}{17}=13,235\ cm$$

Una vez conocidos m y n, y utilizando el teorema de la altura, podemos calcular h:

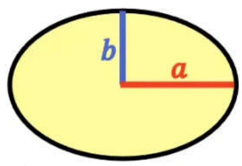
$$h^2=m\cdot n \quad \rightarrow \quad h=\sqrt{m\cdot n}=\sqrt{\frac{225}{17}\cdot\frac{64}{17}}=\frac{120}{17}=7,059\ cm$$

Por tanto: n=64/17, m=225/17 y h=120/17

B1.- Cortamos una barra de mortadela con un cuchillo como ves en la figura para hacer bocadillos. Halla la superficie y el volumen del trozo que queda.



Observando la figura podemos apreciar que se ha gastado la mitad de la mortadela, así que queda la otra mitad. Además, vemos que se han formado dos elipses paralelas de las que conocemos uno de los semiejes b=2,5 cm, que coincide con el radio, y de las que vamos a calcular el otro mediante el teorema de Pitágoras.



$D=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2} \quad \rightarrow$ Por tanto, el otro semieje es de $a=\frac{D}{2}=5\sqrt{2}=7,07\ cm$

Para calcular el área de la figura, sumaremos el área de las dos elipses más la del área lateral, recordando que el área de una elipse viene dada por: $A=\pi\cdot a\cdot b$ y que su perímetro $P=\pi(a+b)$

$$\left.\begin{array}{l} A_{Bases}=2\cdot\pi\cdot a\cdot b=2\cdot\pi\cdot 2,5\cdot 5\sqrt{2}=25\pi\sqrt{2}=111,07\ cm^2 \\ A_{Lateral}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot r\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 5\cdot 20=100\pi=314,16\ cm^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad A_{Total}=A_{Bases}+A_{Lat}=425,23\ cm^2$$

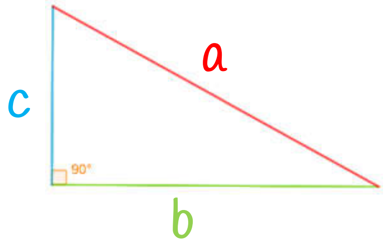
Y el volumen, será la mitad del volumen del cilindro:

$$V=\frac{1}{2}\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{1}{2}\pi\cdot 5^2\cdot 20=250\pi=784,4\ cm^3$$

Por tanto, el área es de 425,23 cm² y el volumen de 784,4 cm³

B2.- Obtén el teorema de Pitágoras utilizando solamente el teorema del cateto. ¿Se podría demostrar utilizando solo el teorema de la altura?

Sabemos que, en un triángulo rectángulo,



$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2} \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$$

"La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

Aunque geométricamente se puede expresar como

« El área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos »

أو **نظرية فيثاغورس** هي علاقةٌ أساسية في الهندسة الإقليدية بين أضلاع المثلث القائم. تنص النظرية على أن مساحة المربع الذي ضلعه الوتر (المقابل للزاوية القائمة) يساوي مجموع مساحتي مربعي الضلعين الآخرين

« Si un triangle est rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse (ou côté opposé à l'angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés »

« Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos »

« The area of the square whose side is the hypotenuse (the side opposite the right angle) is equal to the sum of the areas of the squares on the other two sides »

- Mediante el Teorema del cateto: $\begin{cases} b^2 = n \cdot a \\ c^2 = m \cdot a \end{cases} \xrightarrow{\text{Si sumamos ambas expresiones}} b^2 + c^2 = n \cdot a + m \cdot a \xrightarrow{\text{Si sacamos factor común a}}$

$$\rightarrow \quad b^2 + c^2 = a(n+m) \xrightarrow{\text{Pero sabemos que } m+n=a} b^2 + c^2 = a(a) \quad \rightarrow \quad b^2 + c^2 = a^2$$

y, siguiendo unos sencillos pasos, llegamos al Teorema de Pitágoras.

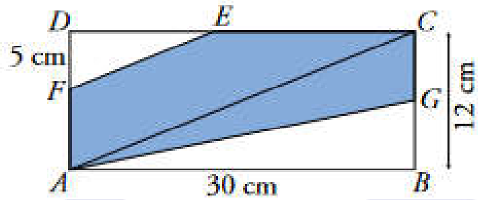
- Mediante el Teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n$ **no se puede demostrar** porque en esta expresión solo tenemos información de las proyecciones de los catetos m y n, peo no de los catetos, y por lo menos necesitamos uno.

Departamento de Matemáticas	Nombre:		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO A**	Simulacro Examen XI	
	Fecha:	29 de abril de 2024	Áreas, volúmenes y semejanza	

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

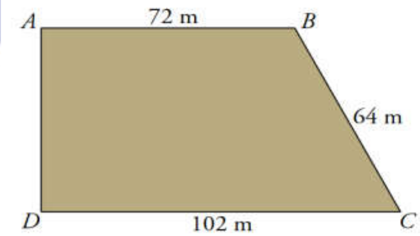
1.- Si el segmento DF mide 5 cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono FECGA? (1,5 puntos)



2.- Una parcela tiene forma de trapecio rectángulo con las dimensiones que se ven en la figura. (1,5 puntos)

a) Calcula su área.

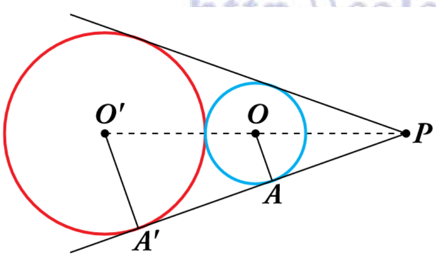
b) Se quiere hacer un pozo en el punto donde se cortan las prolongaciones de los lados AD y BC. ¿A qué distancia de A y de B estará el pozo?



3.- Enuncia y demuestra el teorema de la altura. (2 puntos)

4.- La base de una escultura tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 80 cm y 140 cm, y su altura, 150 cm. Halla su área y su volumen. (1,5 puntos)

5.- En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide a=7,5 cm, y uno de los segmentos en que la divide la altura correspondiente mide m=6 cm. Dibuja el triángulo rectángulo y halla la longitud de b, c, n y h. (2 puntos)



6.- Desde un punto P trazamos tangentes a dos circunferencias tangentes exteriores. Si el segmento OP mide 12 cm y el O'A' mide 5 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia menor? (1,5 puntos)

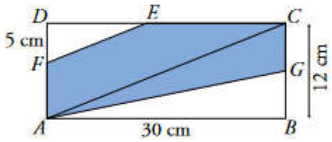
B.- Se tiene un triángulo rectángulo cuyos lados miden a = 10 cm, b = 8 cm y c = 6 cm. En la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, cambia el cuadrado por un semicírculo. Calcula el área de los tres semicírculos y comprueba si se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

Departamento de Matemáticas	Nombre:	SOLUCIONES		3ª Evaluación	Nota
	Curso:	**4º ESO A**	Simulacro Examen XI		
	Fecha:	29 de abril de 2024	Áreas, volúmenes y semejanza		

IES ABYLA (Ceuta)

La no explicación clara y concisa de cada uno de los ejercicios implica una penalización del 25% de la nota

1.– Si el segmento DF mide 5 cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono FECGA? (1,5 puntos)



$\overline{AC}^2 = 30^2 + 12^2 \rightarrow \overline{AC} \approx 32{,}31$ cm

Los triángulos FDE y ADC son semejantes. Por ello:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{5}{12} = \frac{\overline{FE}}{32{,}31} \rightarrow \overline{FE} \approx 13{,}46 \text{ cm}$$

En el triángulo FDE, $\overline{DE}^2 = \overline{FE}^2 - \overline{DF}^2 = 13{,}46^2 - 5^2 \rightarrow \overline{DE} \approx 12{,}5$ cm

$\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = 30 - 12{,}5 = 17{,}5$ cm

$\overline{CG} = 6$ cm

$\overline{AG}^2 = 30^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AG} \approx 30{,}59$ cm

$\overline{AF} = 7$ cm

Área del triángulo $FDE = \dfrac{12{,}5 \cdot 5}{2} = 31{,}25$ cm^2

Área del triángulo $ABG = \dfrac{30 \cdot 6}{2} = 90$ cm^2

Área del pentágono $\approx 30 \cdot 12 - 31{,}25 - 90 = 238{,}75$ cm^2

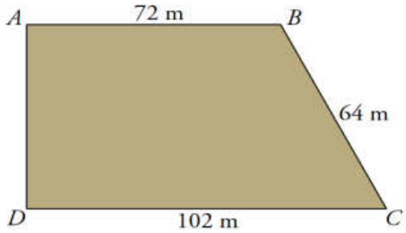
Perímetro del pentágono:

$$\overline{FE} + \overline{EC} + \overline{CG} + \overline{GA} + \overline{AF} \approx 13{,}46 + 17{,}5 + 6 + 30{,}59 + 7 = 74{,}55 \text{ cm}$$

2.– Una parcela tiene forma de trapecio rectángulo con las dimensiones que se ven en la figura. (1,5 puntos)

a) Calcula su área.

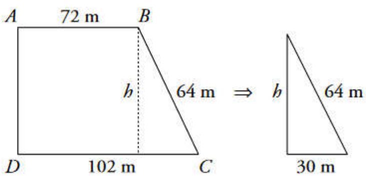
b) Se quiere hacer un pozo en el punto donde se cortan las prolongaciones de los lados AD y BC. ¿A qué distancia de A y de B estará el pozo?



a) Calcula su área.

b) Se quiere hacer un pozo en el punto donde se cortan las prolongaciones de los lados AD y BC. ¿A qué distancia de A y de B estará el pozo?

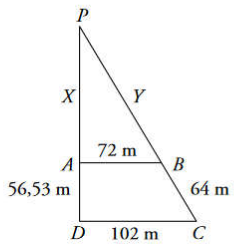
a)



$\Rightarrow h = \sqrt{64^2 - 30^2} = 56{,}53$ m

$$A = \frac{(72 + 102) \cdot 56{,}33}{2} = 4\,918{,}11 \text{ m}^2$$

b)



$$\frac{x}{72} = \frac{x + 56{,}53}{102} \rightarrow 102x = 72x + 4\,070{,}16 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{4\,070{,}16}{30} = 135{,}67 \text{ m}$$

$$\frac{y}{72} = \frac{y + 64}{102} \rightarrow 102y = 72y + 4\,608 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{4\,608}{30} = 153{,}6 \text{ m}$$

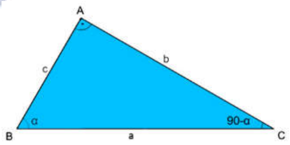
El pozo estará a 135,67 m de A y a 153,6 m de B.

3.- Enuncia y demuestra el teorema de la altura. (2 puntos)

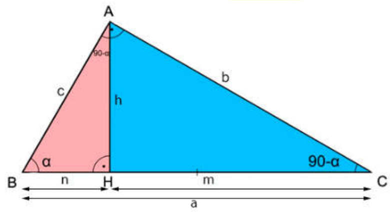
El Teorema de la altura dice: En todo **triángulo rectángulo**, el cuadrado de la altura (h) sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (n y m).

$$\mathbf{h^2 = m \cdot n}$$

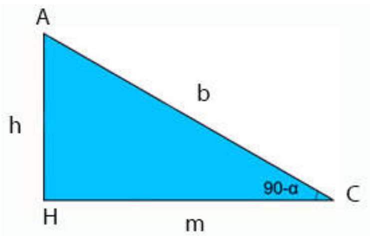
Para demostrarlo, nos ayudaremos de un triángulo rectángulo ABC apoyado sobre su hipotenusa,

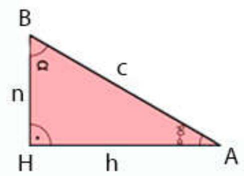


Si trazamos la altura, h, sobre su hipotenusa **a**, la parte en dos segmentos m y n que son las proyecciones sobre ella de los catetos b y c. Además divide el triángulo rectángulo en otros dos también rectángulos: el HBA y el HAC.



Pues si nos fijamos en los triángulos HAB y en el HAC, podemos observar que son semejantes:



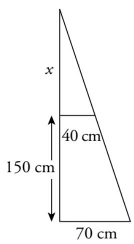


Y por tanto, aplicando la semejanza de triángulos, llegamos a:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \quad \rightarrow \quad h \cdot h = m \cdot n \quad \rightarrow \quad h^2 = m \cdot n$$

Por tanto, queda demostrado el Teorema de la Altura.

4.- La base de una escultura tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 80 cm y 140 cm, y su altura, 150 cm. Halla su área y su volumen. (1,5 puntos)



Calculamos la altura de la pirámide:

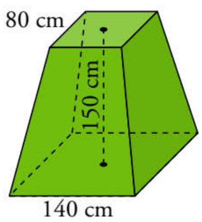
$$\frac{x + 150}{x} = \frac{70}{40} \rightarrow 40x + 6\,000 = 70x \rightarrow 30x = 6\,000 \rightarrow$$

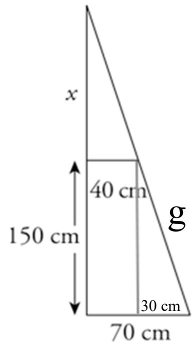
$$\rightarrow x = 200 \text{ cm}$$

Altura = 200 + 150 = 350 cm

Volumen tronco = $V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}}$

$$V = \frac{1}{3}\, 140^2 \cdot 350 - \frac{1}{3}\, 8^2 \cdot 200 = 1\,860\,000 \text{ cm}^3 = 1\,860 \text{ dm}^3$$





El área será la suma de todas las áreas, las dos bases mas los 4 trapecios. Así que lo primero será calcular la altura del trapecio mediante Pitágoras:

$$g^2 = 150^2 + 30^2 \quad \rightarrow \quad g = \sqrt{23400} = 30\sqrt{26}\ cm$$

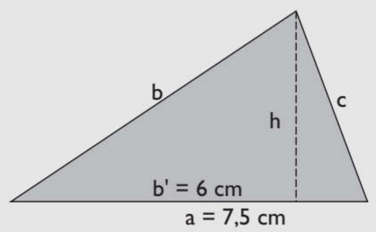
Así que el área será:

$$A = A_C + A_c + 4A_T = 140^2 + 80^2 + 4\cdot\frac{80+140}{2}\cdot 30\sqrt{26} =$$
$$= 19.600 + 6.400 + 67.307{,}06 = 93.307{,}06\ cm^2$$

Por tanto, el área es 9,33 m² y el volumen es 1,86 m³

5.– En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide a=7,5 cm, y uno de los segmentos en que la divide la altura correspondiente mide m=6 cm. Dibuja el triángulo rectángulo y halla la longitud de b, c, n y h. (2 puntos)

Solución:



$h^2 = b' \cdot c'$

$b' = 6$ cm

$c' = a - b' = 7{,}5 - 6 = 1{,}5$ cm

$h^2 = 6 \cdot 1{,}5 = 9$

$h = 3$ cm

Ya tenemos m=6, n=1,5 que los hemos calculado restando.

La altura la hemos calculado con el teorema de la altura:

$$h^2 = m\cdot n \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{m\cdot n} = \sqrt{1{,}5\cdot 6} = \sqrt{9} = 3$$

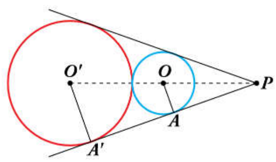
La altura mide 3 cm.

Solo nos faltan b y c que lo haremos con el teorema del cateto:

$$b^2 = m\cdot a \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{m\cdot a} = \sqrt{7{,}5\cdot 6} = 3\sqrt{5} = 6{,}7$$

$$c^2 = n\cdot a \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{n\cdot a} = \sqrt{7{,}5\cdot 1{,}5} = \frac{3\sqrt{5}}{2} = 3{,}35$$

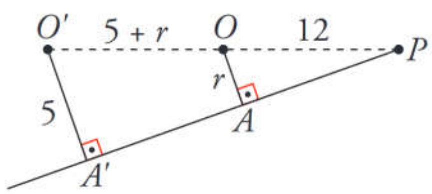
Por tanto, b=6,7 cm; c=3,35 cm; n=1,5 cm y m=6 cm



6.– Desde un punto P trazamos tangentes a dos circunferencias tangentes exteriores. Si el segmento OP mide 12 cm y el O'A' mide 5 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia menor? (1,5 puntos)

Si nos fijamos en la figura, los triángulos OAP y O'A'P' son semejantes por estar en posición Tales, ya que los segmentos OA y O'A' son paralelos, además los triángulos tienen un lado común y por último comparten un ángulo.

Si extraemos de la figura dichos triángulos semejantes, podemos observar que el segmento OO' mide exactamente la suma de los dos radios de ambas circunferencias, es decir; OO'=OA+O'A', si llamamos **r** a la medida OA, podemos escribir el segmento OO' como **5+r**.



Así que con todos estos datos y utilizando la semejanza de triángulos, tenemos que: $\dfrac{12}{r} = \dfrac{12+5+r}{5}$

Operando un poco, llegamos a una ecuación de segundo grado:

$$\frac{12}{r}=\frac{12+5+r}{5} \rightarrow \frac{12}{r}=\frac{17+r}{5} \rightarrow 12\cdot 5=(17+r)\cdot r \rightarrow r^2+17r-60=0$$

Que por factorización mediante la Regla de Ruffini nos da: $(r-3)\cdot(r+20)=0$ y cuyas soluciones son:

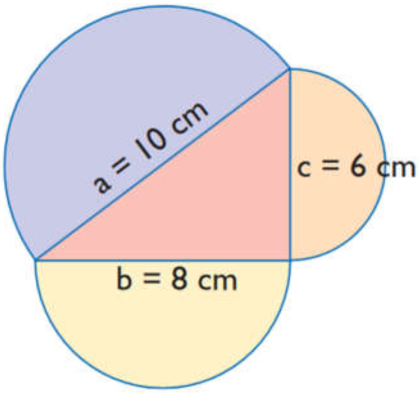
$$\left.\begin{array}{r|rrr} & 1 & 17 & -60 \\ 3 & & 3 & 60 \\ \hline & 1 & 20 & \underline{|0} \\ -20 & & -20 & \\ \hline & 1 & \underline{|0} & \end{array}\right\} \rightarrow (r-3)\cdot(r+20)=0 \rightarrow \begin{cases} r-3=0 & \rightarrow \quad r=3 \\ r+20=0 & \rightarrow \quad r=-20 \end{cases}$$

Desechamos la solución r=-20 puesto que r es una distancia y no puede ser negativa.

Y con esto nos queda que, el radio de la circunferencia pequeña mide 3 cm. OA=3 cm.

B.- Se tiene un triángulo rectángulo cuyos lados miden a = 10 cm, b = 8 cm y c = 6 cm. En la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, cambia el cuadrado por un semicírculo. Calcula el área de los tres semicírculos y comprueba si se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras.

La interpretación geométrica adaptada a este caso diría que el área del semicírculo de la hipotenusa tiene que ser igual a la suma de las áreas de los semicírculos de los catetos:



Área del semicírculo de radio a = 10 cm

$A_1 = \pi \cdot 10^2/2 = 157{,}08 \text{ cm}^2$

Área del semicírculo de radio b = 8 cm

$A_2 = \pi \cdot 8^2/2 = 100{,}53 \text{ cm}^2$

Área del semicírculo de radio c = 6 cm

$A_3 = \pi \cdot 6^2/2 = 56{,}55 \text{ cm}^2$

$A_2 + A_3 = 100{,}53 + 56{,}55 = 157{,}08 \text{ cm}^2$

Por tanto, vemos que se sigue verificando la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, ya que la suma de las áreas da el mismo resultado.