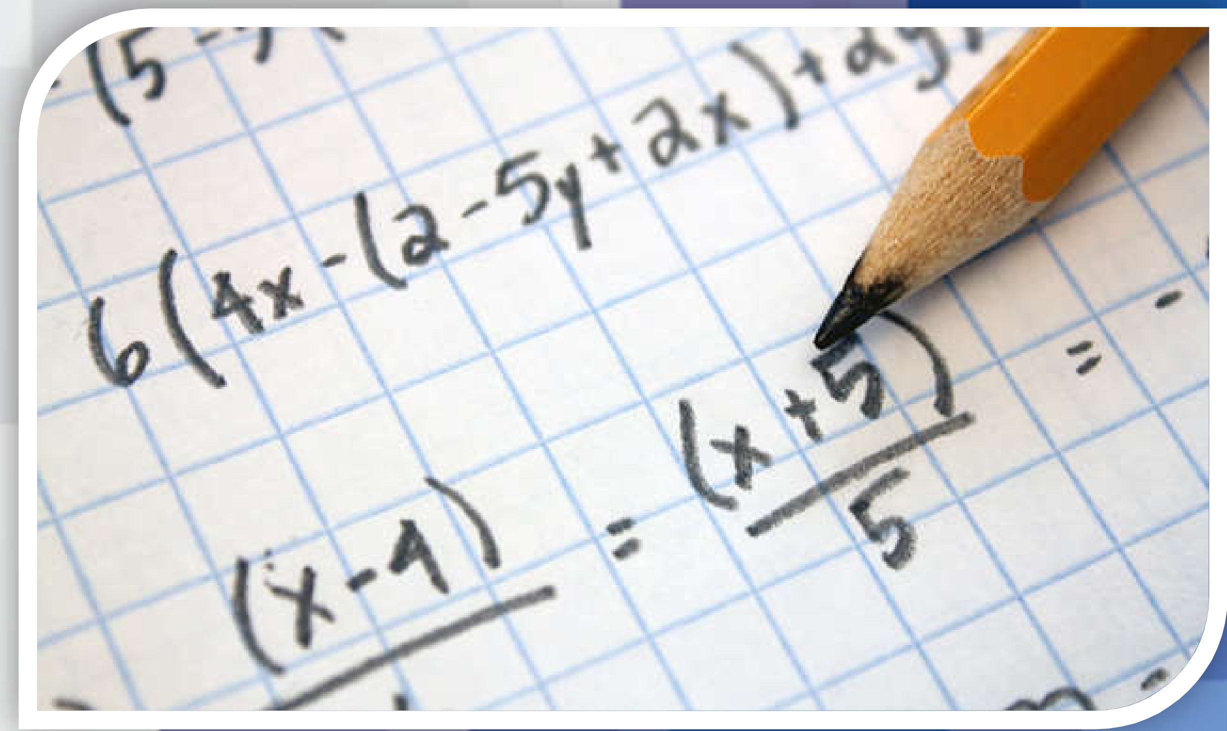
Unidad Didáctica 6

ECUACIONES

3º ESO



$ax+b=c$ $ax^2+bx+c=0$

En esta unidad vas a:

1. **Distinguir e identificar ecuaciones e identidades.**
2. **Plantear y resolver ecuaciones de primer y segundo grado.**
3. **Plantear y resolver otro tipo de ecuaciones como las bicuadradas y las factorizadas.**
4. **Resolver problemas con la ayuda de ecuaciones.**

SUMARIO

6.0.- Lectura comprensiva

Leonardo de Pisa (Fibonacci)
1170 - 1250

Después de **Al-Khwarizmi** (Al-Juarismi) surge un grupo de algebristas, primero en oriente y luego en España, cuyas obras pasan al Medievo a través de las versiones latinas hechas en la Escuela de Traductores de Toledo, fundada por el arzobispo Don Raimundo, poco después de la conquista de dicha ciudad por Alfonso VI. Este hecho facilitó el cruce de las culturas oriental y occidental tan beneficiosa para la atrasada Europa, que despertó del letargo en que estaba sumida desde que los bárbaros destruyeron la civilización grecorromana.

La difusión del álgebra en Europa trajo como consecuencia su democratización, y la historia nos enseña que cuantos más cultivadores tiene una disciplina científica, más ocasiones y motivos hay de inspiración. La fundamentación de las universidades, colegios y escuelas, y las expediciones de los cruzados contribuyeron a crear un clima favorable a la ciencia, que hizo posible los progresos de los siglos XVI y XVII. Durante la Edad media surgen algebristas tan notables como **Leonardo Fibonacci**, que trajo a Italia el álgebra de los árabes, **Jordano Namorario**, **Juan de Sacrobosco** y **Nicolás Chequet**, que fue el primero que utilizó el signo radical con índices.

Lee nuevamente el texto anterior y contesta el siguiente cuestionario:

1.- Las siguientes afirmaciones son verdaderas, con excepción de:

a) En España funcionó una institución dedicada a traducir textos matemáticos
b) A finales de la Edad Media se presentó un cruce de las culturas oriental y occidental que trajo grandes beneficios a Europa
c) Los bárbaros fueron los destructores de la cultura oriental
d) El álgebra de los árabes fue llevada por L. Fibonacci a Italia en la Edad Media.

2.- El enunciado que mejor expresa el contenido del texto es:

a) Europa despierta de su largo sueño.
b) Italia, cuna de grandes algebristas.
c) La escuela de Toledo y sus grandes aportes a la ciencia.
d) el cruce de culturas que trae como consecuencia el progreso del pueblo europeo.

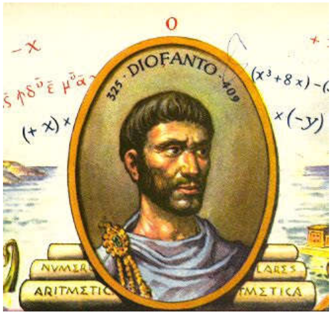
3.- La expresión "despertó del letargo" da a entender que Europa:

a) Padeció de la famosa epidemia del sueño
b) Había estado estancada durante un periodo de tiempo considerable.
c) Vivió mucho tiempo alejada de la cultura
d) Salió de su atraso debido a la intervención de los bárbaros.

4.- ¿Recuerdas quién era Al-Kharizmi?

6.01.- Introducción

Desde el siglo XVII A.C. los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya sabían resolver ecuaciones. En el siglo XVI A.C. los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales. Ya para entonces tenían un método para resolver ecuaciones de primer grado que se llamaba el "método de la falsa posición". No tenían notación simbólica, pero utilizaron el jeroglífico **hau** (que quiere decir montón o pila) para designar la incógnita.



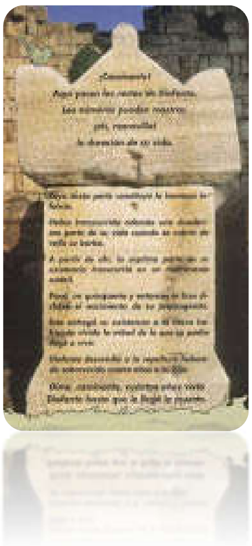
Alrededor del siglo I D.C. los matemáticos chinos escribieron el libro **Jiu zhang suan shu** (que significa El Arte del cálculo), en el que plantearon diversos métodos para resolver ecuaciones.

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a **Diofanto** (250 D.C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación era como hemos visto, mayor por la geometría.

En el siglo III el matemático griego **Diofanto de Alejandría** publicó su Aritmética en la cual, por primera vez en la historia de las matemáticas griegas, se trataron de una forma rigurosa las ecuaciones de primer grado. Introdujo un simbolismo algebraico muy elemental al designar la incógnita con un signo que es la primera sílaba de la palabra griega arithmos, que significa número. Los problemas de álgebra que propuso prepararon el terreno de lo que siglos más tarde sería "la teoría de ecuaciones". A pesar de lo rudimentario de su notación simbólica y de lo poco elegantes que eran los métodos que usaba, se le puede considerar como uno de los precursores del álgebra moderna.

El planteamiento de ecuaciones en matemáticas responde a la necesidad de expresar simbólicamente los problemas y los pensamientos.

Sobre la vida de Diofanto aparece en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal, propuesto por un discípulo suyo para explicar datos de la vida de este sabio griego.



Epitafio de Diofanto

¡Caminante!
Aquí yacen los restos de Diofanto.
Los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida,
cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
A partir de ahí, la séptima parte de existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito.
Éste entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.
Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte.

En 1557 el matemático inglés **Robert Recorde** inventó el símbolo de la igualdad, =.

En 1591 el matemático francés **François Viète** desarrolló una notación algebraica muy cómoda, representaba las incógnitas con vocales y las constantes con consonantes.

6.02.- Igualdades algebraicas. Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros y separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Cuando esta igualdad es cierta para cualquier valor de la incógnita recibe el nombre de **Identidad.**

$$\underbrace{\underbrace{3x+5}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{2x-4}_{\text{Segundo miembro}}}_{\text{ECUACIÓN}} \qquad \underbrace{(x+2)^2 = x^2+4x+4}_{\text{IDENTIDAD}}$$

Las **incógnitas,** representadas generalmente por letras, son las variables que se pretenden encontrar. En general utilizaremos la letra **x**, aunque también se suelen utilizar la **y** y la **z**.

Aunque creas que las ecuaciones son algo novedoso, llevas utilizándolas desde los primeros cursos de primaria. Si no te lo crees, observa:

$$\underbrace{3+\square=5}_{\text{En Primaria}} \qquad \to \qquad \underbrace{3+x=5}_{\text{En Secundaria}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$3+\boxed{2}=5 \qquad\qquad 3+2=5$$

En ambos casos se trata de buscar el número que sumado a tres da como resultado cinco.

Las ecuaciones permiten codificar relaciones en lenguaje algebraico y suponen una potentísima herramienta para resolver problemas, aunque antes, debes aprender a resolverlas.

Resolver una ecuación es encontrar el valor, o los valores, que debe tomar la incógnita (o incógnitas) para que la igualdad sea cierta. En el caso de que no exista ningún valor que verifique la igualdad, diremos que la ecuación no tiene solución.

Ecuaciones con infinitas soluciones y ecuaciones sin solución:

- En la ecuación $0 \cdot x = 0$, cualquier valor que tome **x** hace cierta la igualdad, por tanto:

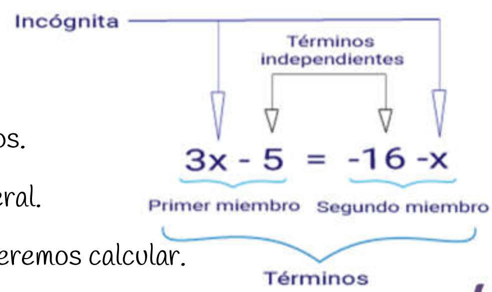
$$0 \cdot x = 0 \to \text{Tiene infinitas soluciones}$$

- En la ecuación $0 \cdot x = k$, con $k \neq 0$, no hay ningún valor de x, que haga cierta la igualdad.

$$0 \cdot x = k \to \text{No tiene solución}$$

6.2.1.- Elementos de una ecuación

Los elementos de una ecuación son:



- ✓ Miembro: Expresión algebraica que hay a ambos lados del =.
- ✓ Término: Cada uno de los sumandos que hay en los dos miembros.
  - Término Independiente: Es aquel que no tiene parte literal.
- ✓ Incógnita: Cada una de las letras de valor desconocido y que queremos calcular.
- ✓ Grado: Es el mayor de los grados de todos sus términos.

6.2.2.- Ecuaciones equivalentes

Diremos que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

Ejemplo

1.- Comprueba si las siguientes ecuaciones son equivalentes: a) 3x + 1 = 9 – x ; b) 4x = 8

$$a)\ 3x+1=9-x \rightarrow 3x+x=9-1 \rightarrow 4x=8 \rightarrow x=2$$

$$b)\ 4x=8 \rightarrow x=\frac{8}{4} \rightarrow x=2$$

Como podemos observar ambas ecuaciones tienen la misma solución, por tanto, son equivalentes.

6.2.3.- Transformación de ecuaciones

El método para resolver una ecuación consiste en ir transformándola, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes más sencillas hasta despejar la incógnita, **dejar sola la x.**

Para transformar una ecuación en otra equivalente más sencilla, utilizaremos dos recursos:

- Reducir sus miembros.
- Transponer los términos.

- **Reducir los términos** de una ecuación es agrupar las x con las x, y los números con los números:

Ejemplo

$$2x+3+5x=-9-4x+2x \xrightarrow[\text{Reducción de términos}]{} 7x+3=-9-2x$$

- **Trasponer los términos** de una ecuación es pasar todas las x a un miembro y todos los números al otro sabiendo:

  - Que lo que está **sumando** en un miembro, **pasa** al otro miembro de la ecuación **restando** (y viceversa)

Ejemplo

$$\underbrace{7x+3=-9-2x \xrightarrow[\text{Trasponemos}]{} 7x\underbrace{+2x}_{\text{cambia de signo}}=-9\underbrace{-3}_{\text{cambia de signo}}}_{} \xrightarrow[\text{Agrupamos}]{} 9x=-12$$

El 3 que suma en el primer miembro, pasa al segundo restando.
El –2x que está restando en el segundo miembro, pasa al primero sumando.

  - Que lo que está **multiplicando** en un miembro, **pasa** al otro miembro **dividiendo** (y viceversa)

Ejemplo

$$\underbrace{9\cdot x=-12 \rightarrow x=\frac{-12}{9}=-\frac{4}{3}}_{\text{El 9 que multiplica en el primer miembro, pasa dividiendo al segundo}} \qquad \underbrace{\frac{y}{4}=5 \rightarrow y=5\cdot 4=20}_{\text{El 4 que divide en el primer miembro, pasa multiplicando al segundo}}$$

De forma teórica:

- Si a los dos miembros de una ecuación se les **suma o resta** un mismo número o expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente a la dada originalmente.

$$3x+4=0 \xrightarrow[\text{Ecuación Equivalente}]{} 3x+4-4=0-4 \xrightarrow[\text{Ecuación Equivalente}]{} 3x=-4$$

- Si los dos miembros de una ecuación, se **multiplican o dividen** por un mismo número, distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

$$3x=-4 \xrightarrow[\text{Ecuación equivalente}]{} \frac{3x}{3}=\frac{-4}{3} \xrightarrow[\text{Ecuación equivalente}]{} x=-\frac{4}{3}$$

6.03.- Ecuaciones de primer grado

Decimos que una ecuación es de primer grado cuando, una vez trasformada, presenta un polinomio de grado 1 en alguno de sus miembros.

Ejemplo

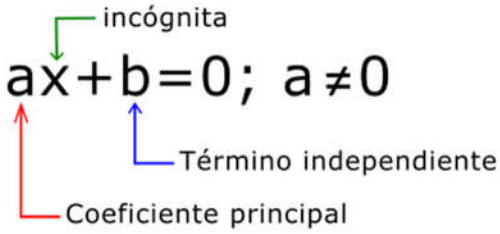
$$\overbrace{4x+5}^{\text{Polinomio de grado 1}}=0 \quad \text{Ecuación de primer grado}$$

$$\overbrace{3x^2+2x-7}^{\text{Polinomio de grado 2}}=0 \quad \text{Ecuación de segundo grado}$$

$$\overbrace{x^3-2x^2+4x-5}^{\text{Polinomio de grado 3}}=0 \quad \text{Ecuación de tercer grado}$$

....

De forma general, una ecuación de primer grado se representa como: $ax+b=0$ donde a es el coeficiente principal, b el término independiente y x es la incógnita.



La solución de dicha ecuación viene dada por:

$$\boxed{ax+b=0 \quad \rightarrow \quad ax=-b \quad \rightarrow \quad x=-\frac{b}{a}}$$

Ejemplo

2.- Resuelve la ecuación: 2x + 3·(2x − 1) = x + 67

$$2x+3(2x-1)=x+67 \xrightarrow[\text{Paréntesis}]{\text{Rompemos}} 2x+6x-3=x+67 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Agrupamos}} 8x-3=x+67 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Trasponemos}}$$

$$\xrightarrow[\text{términos}]{\text{Trasponemos}} 8x-x=67+3 \xrightarrow[\text{términos}]{\text{Agrupamos}} 7x=70 \xrightarrow[\text{la incógnita}]{\text{Despejamos}} x=\frac{70}{7}=10 \xrightarrow{\text{Solución}} x=10$$

Piensa y practica

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

$3x+1=6x-8$	$3(x-5)-2(x+4)=18$	$3[2x-(3x+1)]=x+1$
$13x-5(x+2)=4(2x-1)+7$	$11-5(3x+2)+7x=1-8x$	$3-2x(5-2x)=4x^2+x-30$

2.- ¿Verdadero o falso?

a) La ecuación $x^2+6x-x^2=7x-1$ es de segundo grado.

b) Los términos de una ecuación son los sumandos que forman los miembros.

c) Una ecuación puede tener más de dos miembros

d) Todas las ecuaciones de primer grado son equivalentes.

e) La ecuación $x+1=5$ es equivalente a la ecuación $x+2=6$.

6.3.1.- Ecuaciones de primer grado con denominadores

Cuando en los términos de una ecuación aparecen denominadores, la transformaremos en otra equivalente que no los tenga. Para ello, multiplicaremos los dos miembros de la ecuación por el *mínimo común múltiplo* de los denominadores.

Ejemplo

$$\frac{x}{3}-\frac{13-2x}{2}=\frac{1}{3} \rightarrow m.c.d.(3,2,6)=6 \rightarrow \frac{2x}{6}-\frac{3\cdot(13-2x)}{6}=\frac{2}{6} \rightarrow 2x-3\cdot(13-2x)=2$$

$$2x-38+6x=2 \rightarrow 8x-38=2 \rightarrow 8x=38+2 \rightarrow 8x=40 \rightarrow x=\frac{40}{8}=5$$

6.04.- Ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es una igualdad de expresiones algebraicas en la que después de agrupar se obtiene un polinomio de 2° grado en uno de sus miembros. En general se representará de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde **a** es el coeficiente del término de 2° grado, **b** el del término de primer grado y **c** el término independiente.

Las soluciones de este tipo de ecuaciones vienen dadas mediante la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{cases}$$

- Decimos que una **ecuación** de segundo grado es completa si los coeficientes a, b y c son números distintos de cero:

$$Si \ \ a, b, c \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Ec. Completa}$$

- Decimos que una **ecuación** es incompleta si alguno de los coeficientes a, b o c es nulo.

$$Si \ \ a \ ó \ b \ ó \ c = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Ec. Incompleta}$$

3.- Resuelve la siguiente ecuación: $x^2 + 5x - 6 = 0$

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} \end{cases} \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} \rightarrow x = \frac{-5 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+7}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-5-7}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

6.4.1.- Ecuaciones Incompletas

En el caso de que una ecuación de segundo grado sea incompleta, se puede resolver utilizando la fórmula de resolución general, pero es preferible, por celeridad y rapidez en los cálculos hacerlo de la siguiente manera:

- Si c=0, la ecuación será de la forma: $ax^2 + bx = 0$ y la resolveremos sacando factor común la x:

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x\cdot(ax + b) = 0 \underset{*}{\rightarrow} \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

*Recordar que si el producto de dos números es cero es porque alguno de ellos es cero.

- Si b=0, la ecuación será de la forma: $ax^2 + c = 0$ y la resolveremos despejando la x:

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \underset{**}{\rightarrow} x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

** Esta ecuación sólo tendrá solución si los signos de c y a son opuestos, en otro caso no tendrá solución porque no existe la raíz cuadrada negativa de un número.

Ejemplo

4.- Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas:

$$a)\ x^2+5x=0 \quad\rightarrow\quad x(x+5)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ x+5=0 \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-5 \end{cases}$$

$$b)\ x^2-9=0 \quad\rightarrow\quad x^2=9 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{9} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{cases}$$

Piensa y practica

3.- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2° grado: Sol: a) 0 y 12; b) −4 y 3; c) −2/3 y 5

$$a)(x+13)^2=(x+12)^2+(x-5)^2 \qquad b)(x+4)^3-(x-3)^3=343 \qquad c)\frac{x+3}{2x-1}-\frac{5x-1}{4x+7}=0$$

4.- ¿Verdadero o falso?

a) La ecuación $x^2 + 6x - x^2 = 7x - 1$ es de segundo grado.

b) Los términos de una ecuación son los sumandos que forman los miembros.

6.05.- Otras Ecuaciones

Además de las ecuaciones de primer y segundo grado, trabajadas en cursos anteriores, existen otras muchas de las que vamos a estudiar las ecuaciones bicuadradas y las ecuaciones factorizadas.

6.5.1.- Ecuaciones bicuadradas

Son ecuaciones de cuarto grado que se resuelven de forma similar a las ecuaciones de segundo grado, pero haciendo antes un cambio de variable. Son de la forma:

$$ax^4+bx^2+c=0$$

Se resuelven haciendo el cambio de variable, $x^2=z$,transformándolas en una ecuación de segundo grado.

$$az^2+bz+c=0$$

Ejemplo

5.- Resuelve la siguiente ecuación bicuadrada: $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Lo primero es hacer un cambio de variable para convertirla en una ecuación de segundo grado: $z=x^2$

$$x^4-5x^2-36=0 \quad \underset{z=x^2}{\xrightarrow{\text{Cambio de Variable}}} \quad z^2-5z-36=0$$

Hecho esto, resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$z^2-5z-36=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=-36 \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} z=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ z=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-36)}}{2\cdot 1} \end{cases} \quad\rightarrow\quad z=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{2} \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad z=\frac{5\pm\sqrt{169}}{2} \quad\rightarrow\quad z=\frac{5\pm 13}{2} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} z_1=\dfrac{5+13}{2}=\dfrac{18}{2}=9 \\ z_2=\dfrac{5-13}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4 \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} z_1=9 \\ z_2=-4 \end{cases}$$

Resuelta la ecuación en z, deshacemos el cambio de variable y calculamos x.

$$\text{Si } z=x^2 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{z} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \\ x=\pm\sqrt{-8}=\text{No sol} \end{cases} \quad\rightarrow\quad x_1=-3 \qquad x_2=+3$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $x^4-5x^2-36=0$ son $x_1=-3$ $\quad x_2=+3$

Piensa y practica

5.- Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas: Sol: a) –4, –3, 3 y 4; b) –1/2 y 1/2; c) –5, –2, 2 y 5

a) $x^4-25x^2+144=0$ b) $4x^4+19x^2-5=0$ c) $\dfrac{x^2\left(x^2-9\right)}{20}+1=x^2-4$

6.5.2.- Ecuaciones con producto de factores, ecuaciones factorizadas

Llamamos ecuaciones factorizadas a aquellas ecuaciones polinómicas, en las que en el primer miembro aparece el producto de diferentes factores. Son de la forma:

$$(ax+b)\cdot(bx+c)\cdots\cdots\cdots(cx+d)=0$$

Y se resuelven igualando a cero cada uno de los factores, puesto que el producto de varios factores es cero, si alguno de ellos es cero.

Ejemplo

6.- Resuelve la siguiente ecuación con factores: $(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x^2-9)=0$

Sabemos que cuando el producto de dos o más números es cero, es porque alguno de esos números es cero. En nuestro caso, y de forma similar, si el producto de dos o más factores es nulo, tiene que ser porque alguno de ellos será cero.

$$(x-1)\cdot(x+3)\cdot\left(x^2-9\right)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x-1=0 \\ x+3=0 \\ x^2-9=0 \end{cases}$$

Igualamos a cero cada uno de ellos, obteniendo ecuaciones de menor grado y más fáciles de resolver:

$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow x_1=1 \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow x_2=-3 \\ x^2-9=0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm\sqrt{9} \rightarrow x_3=-3 \text{ y } x_4=+3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación $(x-1)\cdot(x+3)\cdot\left(x^2-9\right)=0$ son $x_1=1$ $x_2=-3$ $x_3=3$

Piensa y practica

6.- Resuelve las siguientes ecuaciones factorizadas: Sol: a) –2 y 2; b) –1 y 2

a) $\left(3x^2-12\right)\cdot\left(x^2-x+2\right)\cdot\left(x^2+1\right)=0$ b) $(x+1)\cdot(x-2)\cdot\left(x^2+3x+4\right)=0$

6.06.- Resolución de problemas con ecuaciones

Las ecuaciones permiten resolver una gran cantidad de problemas, presentados generalmente de manera verbal. Tal como lo decía *Newton*, el paso fundamental en la solución de esta clase de problemas está en la adecuada interpretación del enunciado a través de una ecuación.

Este proceso recibe el nombre de ***modelación del problema***.

Para resolver un problema referente a números o de relaciones entre cantidades, basta con traducir dicho problema del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, o sea, a una ecuación.

Isaac Newton

A continuación, se presenta una secuencia de pasos, que permite en general, enfrentar de manera ordenada la resolución de un problema.

1) Lectura y comprensión del enunciado.
2) Asignar la incógnita o incógnitas.
3) Establecer relaciones entre las variables del problema.
4) Plantear la ecuación ayudándonos del lenguaje algebraico.
5) Resolver la ecuación con precisión.
6) Analizar la solución de la ecuación en el problema y verificar la solución o soluciones.
7) Dar la respuesta al problema planteado

Piensa y practica

7.- ¿Qué enunciado asocias a cada ecuación?

a) La tercera parte de un número es igual a su cuarta parte más 20 unidades.

b) La edad de Andrés es el triple que la de su hermana, y entre los dos suman 20 años.

c) Un rectángulo es 3 metros más largo que ancho, y su perímetro mide 30 metros.

d) He pagado 30 € por 3 blocs de dibujo y una caja de acuarelas. Pero la caja costaba el doble que un bloc.

e) Un ciclista ha recorrido la distancia desde A hasta B a la velocidad de 15 km/h y un peatón, a 5 km/h, ha tardado una hora más.

f) Un grillo avanza, en cada salto, un metro menos que un saltamontes. Pero el grillo, en 15 saltos, llega igual de lejos que el saltamontes en 5.

$x+\frac{x}{3}=20$ $\quad 2x+2(x+3)=30$ $\quad 15(x-1)=5x$ $\quad \frac{x}{3}=\frac{x}{4}+20$ $\quad 3x+2x=30$ $\quad 15x=5(x+1)$

6.6.1.- Ejemplos de problemas resueltos mediante ecuaciones de primer grado

Veamos algunos ejemplos de problemas resueltos mediante ecuaciones:

1.- Si al triple de un número le restas 8, obtienes 25. ¿De qué número se trata?

Si llamamos *x* al número, el triple de dicho número será: *3x* y por tanto la ecuación será:

$$3x-8=25$$

Si trasponemos el 8 al segundo miembro:

$$3x=25+8$$

Agrupando:

$$3x=33$$

Y despejando la incógnita *x*:

$$x=\frac{33}{3}=11$$

Número: x

Triple del número: 3x

Por tanto, el número pedido es el 11.

2.- Un kilo de manzanas cuesta 0,50 € más que uno de naranjas. Marta ha comprado tres kilos de naranjas y uno de manzanas por 5,30 €. ¿A cómo están las naranjas? ¿Y las manzanas?

Si el precio de las naranjas es x, el de las manzanas será *x+0,50*

Precio de naranjas: x
Precio manzanzas: x+0,50

La ecuación será: $\underbrace{(3\cdot x)}_{\text{Precio de 3 kilos de naranjas}}+\underbrace{(x+0,50)}_{\text{Precio del kilo de manzanas}}=\underbrace{5,30}_{\text{Total de la compra}}$

Si rompemos el paréntesis:

$$3x + x + 0{,}50 = 5{,}30$$

Si agrupamos las x y trasponemos el 0,50 al segundo miembro:

$$4x + 0{,}50 = 5{,}30 \quad \rightarrow \quad 4x = 5{,}30 - 0{,}50 \quad \rightarrow \quad 4x = 4{,}80$$

Si despejamos la *x*, pasando el 4 al segundo miembro (pasa dividiendo) y calculamos el valor de *x*:

$$4 \cdot x = 4{,}80 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4{,}80}{4} = 1{,}20$$

De aquí obtenemos que el precio del kilo de naranjas es 1,20 € y por tanto el de manzanas será:

$$Manzanas = x + 0{,}50 = 1{,}20 + 0{,}50 = 1{,}70 \text{ €}$$

Por lo que las manzanas cuestan 1,70 € el kilo y las naranjas 1,20 € el kilo.

3.– Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto. Entre los tres suman 98 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Si la edad de Rosa es x, su padre, Juan, tendrá 25 años más que ella, x+25, y su hijo Alberto, 26 años menos que ella, x–26. Si la suma de todos es 98, ya podemos escribir la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} Rosa \rightarrow x \\ Juan \rightarrow x + 25 \\ Alberto \rightarrow x - 26 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad edad_{Rosa} + edad_{Juan} + edad_{Alberto} = 98 \quad \rightarrow \quad x + x + 25 + x - 26 = 98$$

Agrupando las *x* y los números y dejando las *x* a la derecha y los números a la izquierda del igual:

$$x + x + 25 + x - 26 = 98 \quad \rightarrow \quad 3x - 1 = 98 \quad \rightarrow \quad 3x = 98 + 1 \quad \rightarrow \quad 3x = 99$$

Y despejando la x:

$$3x = 99 \quad \rightarrow \quad x = \frac{99}{3} = 33$$

Por tanto, la edad de Rosa es de 33 años, la de su padre, Juan, x+25=33+25=58 años, y la de su hijo Alberto, x–26=33–26=7 años.

Así que Rosa tiene 33 años, Juan 58 años y Alberto 7 años.

Siempre que resolvamos un problema mediante ecuaciones, podemos comprobar que el resultado es correcto, simplemente sustituyendo los resultados obtenidos.

En el ejemplo anterior, decía que la suma de sus edades era de 98 años, así que, vamos a comprobar si nuestros resultados son correctos:

$$edad_{Rosa} + edad_{Juan} + edad_{Alberto} = 98 \quad \rightarrow \quad 33 + 58 + 7 = 98$$

Por tanto, vemos que las edades obtenidas son correctas porque todas suman 98 y Juan es 25 años más viejo que Rosa y Alberto es 26 años más joven.

Piensa y practica
8.– Resuelve los siguientes problemas:
a) Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 219.
b) Dado un número, la suma de su mitad, su doble y su triple es 55. ¿Qué número es?
c) Juan tiene 21 años menos que Andrés y sabemos que la suma de sus edades es 47. ¿Qué edades tienen?
d) Si hemos recorrido 21 km, que son las tres séptimas partes del trayecto, ¿cuántos km quedan por recorrer?

6.6.2.- Problemas de Mezclas

Existen algunos tipos de problemas que es conveniente estudiar a parte. Los problemas de mezclas son excelentes candidatos para ser resueltos con ecuaciones. Estos problemas se dan en muchas situaciones, como, por ejemplo, cuando mezclamos artículos de distintos precios y en distintas cantidades, y queremos averiguar cuál debería ser el precio de dicha mezcla.

O cuando se combinan disoluciones en un laboratorio de química o cuando se añaden ingredientes a una receta de cocina. Las mezclas (y problemas de mezclas) se forman cuando diferentes tipos de elementos se combinan para crear un tercer objeto "mezclado".

Para resolver este tipo de problemas es muy conveniente ayudarse de una tabla similar a la siguiente en la que aparecerán las cosas que se mezclan, la mezcla en sí y la cantidad y el precio de cada una.

	Cantidad	Precio	Total
Cosa 1			
Cosa 2			
Mezcla			

Vamos a escribir una ecuación en la que aparecerán en un término la suma de los totales da cada una de las cosas a mezclar y en el otro el total de la mezcla.

$$\boxed{Total_{Cosa\,1} + Total_{Cosa\,2} = Total_{mezcla}}$$

En ella cada uno de los totales se calculará multiplicando la cantidad por el precio.

Veamos cómo utilizarla mediante algunos ejemplos:

4.- Al mezclar 30 kg de pintura con 50 kg de otra de calidad inferior, obtenemos una mezcla que se vende a 3,30 €/kg. Si el precio de la pintura de mayor calidad es el doble que el de la otra, ¿Cuál es el precio del kilo de cada una de las pinturas utilizadas?

Empezamos llamando x al precio de la pintura de calidad inferior. Con esto, el precio de la pintura de calidad superior será: $2x$

Si colocamos en la tabla lo que ya sabemos con los datos del problema y las incógnitas, la tabla quedará de la siguiente forma:

	Cantidad	Precio	Total
Pintura Cara	30	2x	
Pintura Barata	50	x	
Mezcla de pinturas		3,30	

Además, si mezclamos 30 kg con 50 kg, obtendremos 80 kg de mezcla. 30 kg+50 kg=80 kg

$$Cantidad_{mezcla} = Cantidad_1 + Cantidad_2$$

Calcularemos los totales de cada cosa, multiplicando la cantidad por el precio y completaremos la tabla:

	Cantidad	Precio	Total
Pintura Cara	30	2x	30·2x
Pintura Barata	50	x	50·x
Mezcla de pinturas	30+50=80	3,30	80·3,30=264

Ahora escribimos la ecuación:

$$Total_{Cosa\,1} + Total_{Cosa\,2} = Total_{mezcla}$$

Por tanto:

$$\begin{array}{ccccc} Total_{Pintura\,1} & + & Total_{Pintura\,2} & = & Total_{mezcla} \\ 30\cdot 2x & + & 50\cdot x & = & 264 \end{array}$$

La resolvemos:

$$30\cdot 2x+50\cdot x=264 \quad\rightarrow\quad 60x+50x=264 \quad\rightarrow\quad 110x=264 \quad\rightarrow\quad x=\frac{264}{110}=2,40$$

Con esto, la pintura de menor calidad cuesta 2,40 € y la de mayor calidad 2,40·2=4,80 €.

5.– María mezcla 5 kilos de chocolate blanco cuyo precio es de 3 euros el kilo con 7 kilos de chocolate noir, de 4 euros el kilo. ¿Cuál es el precio de la mezcla resultante?

Si llamamos x al precio de la mezcla y recogemos los datos en una tabla:

	Cantidad (kg)	Precio (€/kg)	Total
Chocolate Blanco	5	3	5·3=15
Chocolate Noir	7	4	7·4=28
Mezcla de Chocolates	5+7=12	x	12·x

Ya solo nos falta escribir la ecuación y resolverla:

$$\left.\begin{array}{ccccc} Total_1 & + & Total_2 & = & Total_{mezcla} \\ 15 & + & 28 & = & 12x \end{array}\right\} \rightarrow\quad 15+28=12x \quad\rightarrow\quad 43=12x \quad\rightarrow\quad x=\frac{43}{12}=3,58\ €$$

Por tanto, el precio de la mezcla de chocolates será de 3,58 € el kilogramo.

Piensa y practica

9.– Resuelve los siguientes problemas de mezclas:

a) Un joyero tiene dos lingotes de oro, con un 80% de pureza y el otro con un 95% de pureza. ¿Cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 kilos con un 86% de pureza?

b) ¿Cuántos kilos de nueces de Castilla que cuestan 0.80 € el kilo deben mezclarse con 8 kilos de nueces de la India que cuestan 1.25 € el kilo para crear una mezcla que cueste 1,00 € el kilo?

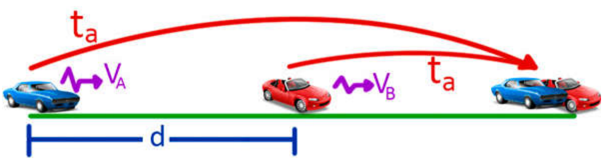
c) En cierta mina de plata hay dos galerías, de la primera se extraen 6 Tm. de mineral con una pureza del 75%, de la segunda se extraen 14 Tm. de una pureza del 65%. Todo en mineral extraído se coloca en una misma pila ¿Cuál es la pureza del mineral de la pila?

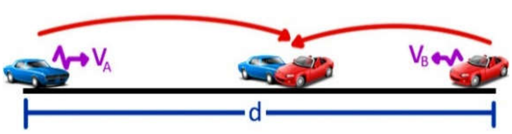
d) Se han vertido 3 litros de agua, a 15 °C, en una olla que contenía 6 litros de agua a 60 °C. ¿A qué temperatura está ahora el agua de la olla?

6.6.3.- Problemas de Móviles

Además de los problemas de mezclas, existen otro tipo de problemas que también es conveniente estudiar por separado, el de móviles o alcances. Se trata de problemas donde un móvil va en busca de otro y tenemos que calcular donde se encuentran.

Como ya sabrás por la asignatura de Física y Química, la velocidad, el espacio y el tiempo son tres magnitudes físicas relacionadas entre sí. Llamaremos v a la velocidad, s al espacio y t al tiempo.





Consideraremos que los móviles se mueven en línea recta y a velocidad constante en todo el trayecto que estén llevando a cabo (esto es lo que se llama movimiento rectilíneo y uniforme M.R.U.).

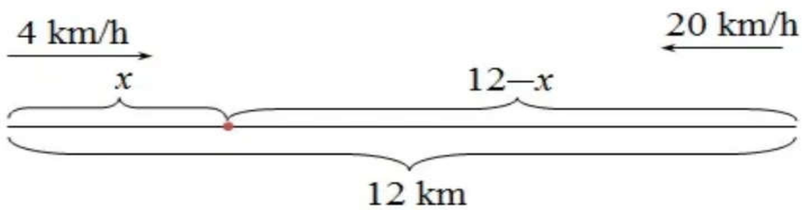
Velocidad	Tiempo	Espacio
La velocidad del móvil es la razón entre el espacio y el tiempo	*El tiempo empleado es la razón entre el espacio y la velocidad*	*El espacio recorrido es la velocidad multiplicada por el tiempo*
$v=\dfrac{s}{t}$	$t=\dfrac{s}{v}$	$s=v\cdot t$
Ejemplo:	**Ejemplo:**	**Ejemplo:**
Por ejemplo, si recorro 200 km. en 5 h. la velocidad es: $v=\frac{s}{t}=\frac{200\ km}{5\ h}=40\ \frac{km}{h}$	Por ejemplo, si se recorren 360 km. a 90 km/h., el tiempo empleado es: $t=\frac{s}{v}=\frac{360km}{90\ km/h}=4\ h$	Por ejemplo, si durante dos horas y media (2,5 h.), un móvil va a una velocidad de 80 km/h., el espacio recorrido es: $s=v\cdot t=80\ \frac{km}{h}\cdot 2{,}5h=200\ km$

Observa que:

- El espacio s y la velocidad v son magnitudes directamente proporcionales (a más velocidad, más espacio recorrido).
- El tiempo t y la velocidad v son magnitudes inversamente proporcionales (a más velocidad, menos tiempo se tarda en recorrer un determinado espacio).
- El espacio s y el tiempo t son magnitudes directamente proporcionales (a más espacio, más tiempo tardaremos en recorrerlo).

6.- Un caminante y un ciclista marchan por la misma vía. El caminante lleva una velocidad de 4 km/h. y el ciclista de 20 km/h. Si parten al mismo tiempo, desde puntos opuestos que distan entre sí 12 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse? ¿Qué espacio habrá recorrido cada uno?

Si hacemos un pequeño croquis con los datos del problema:



Donde hemos llamado x a la distancia recorrida por el caminante desde el punto de partida al punto de encuentro (marcado con un punto rojo). Entonces la distancia recorrida por el ciclista hasta el punto de encuentro será 12−x, pues la distancia original que separa a ambos era de 12 km. Además, ha pasado el mismo tiempo t cuando llegan al punto de encuentro pues ambos partieron al mismo tiempo. Entonces, como t=s/v, podemos establecer una proporción entre el espacio recorrido y la velocidad tanto del caminante como del ciclista:

$$\frac{x}{4}=\frac{12-x}{20}\ \rightarrow\ 20x=4(12-x)\ \rightarrow\ 20x=48-4x\ \rightarrow\ 20x+4x=48$$
$$\rightarrow\ 24x=48\ \rightarrow\ x=\frac{48}{24}=2$$

Esto quiere decir que el caminante habrá recorrido x=2 km., y el ciclista $12-x=12-2=10$ km.

El tiempo empleado es $t=\frac{s}{v}=\frac{2km}{4\frac{km}{h}}=0{,}5\ horas$ (media hora).

Donde hemos empleado en la fórmula el espacio y velocidad del caminante, pero si se emplea la del ciclista el resultado es el mismo: $t=\frac{s}{v}=\frac{10km}{20\frac{km}{h}}=0,5\ horas$

Por tanto, tardarían 1/2 hora en encontrarse, el ciclista recorre 10 km y el caminante 2.

Piensa y practica

10.- Resuelve los siguientes problemas de móviles:

a) La velocidad de una canoa, en aguas en reposo, es de 12 km/h. Sabiendo que recorre 36 km aguas abajo y regresa al punto de partida en un tiempo de 8 horas, hallar la velocidad de la corriente del río.

b) Un piloto despega del aeropuerto de Madrid en una avioneta que vuela a 500 km/h. 20 minutos después sale en su persecución un reactor que vuela a 900 km/h. La avioneta intenta pasar la frontera con Francia. Sabiendo que de Madrid a la frontera hay unos 450 km, se pregunta si el reactor dará caza a la avioneta antes de llegar a la frontera.

6.6.4.- Ejemplos de problemas resueltos mediante ecuaciones de segundo grado

7.- ¿Qué número natural multiplicado por su siguiente da como resultado 12?

Si llamamos x al número, su siguiente será $x+1$.

$$\left.\begin{array}{l} Número \to x \\ Siguiente \to x+1 \end{array}\right\} \to x\cdot(x+1)=12 \to x^2+x=12 \to x^2+x-12=0 \to \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-12 \end{cases}$$

Si sustituimos los valores de a, b y c en la fórmula de resolución de ecuaciones de segundo grado:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \to \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=3 \\ x_2=\frac{-1-7}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \end{cases}$$

Vemos que tiene dos soluciones, los números −4 y el 3. Como el enunciado nos dice que es un número natural, desechamos el −4 y nos quedamos con el 3.

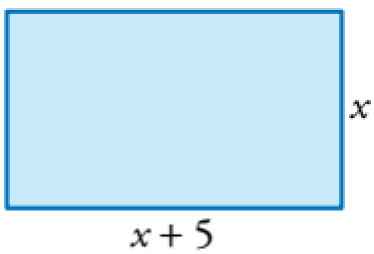
$$\left.\begin{array}{l} Número \to x=3 \\ Siguiente \to x+1=3+1=4 \end{array}\right\}$$

Por tanto, el número es natural pedido es el número 3.

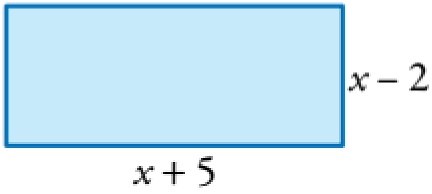
8.- La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será de 60 cm^2. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

Si llamamos x a la altura del rectángulo, la base medirá $x+5$ y por tanto sus dimensiones serán:

$$\begin{cases} Altura: x \\ Base: x+5 \end{cases}$$



Si disminuimos 2 cm la altura, obtendremos un nuevo rectángulo de dimensiones:



$$\begin{cases} Altura: x-2 \\ Base: x+5 \end{cases}$$

Como nos dicen que el área del segundo es de 60 cm², ya podemos escribir la ecuación correspondiente:

$$A = Base \cdot Altura = (x+5)\cdot(x-2) = 60 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x + 5x - 10 = 60$$

Si agrupamos llegamos a:

$$x^2 + 3x - 10 = 60 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x - 10 - 60 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3x - 70 = 0$$

Si la resolvemos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$x^2 + 3x - 70 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -70 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot(-70)}}{2\cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+280}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-3 \pm 17}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+17}{2} = \dfrac{14}{2} = 7 \\ x_2 = \dfrac{-3-17}{2} = \dfrac{-20}{2} = -10 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -10 \end{cases}$$

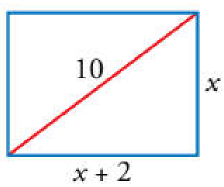
Obtenemos dos soluciones, pero como estamos trabajando con distancias hemos de desechar la solución negativa puesto que no existen distancias negativas. Por tanto, **x=7**.

Por tanto, las dimensiones del rectángulo original (el primero) serán: $\begin{cases} Altura: x = 7cm \\ Base: x+5 = 7+5 = 12cm \end{cases}$

Es posible comprobar que la solución es correcta ya que si multiplicamos las dimensiones del 2° rectángulo obtenemos el área que nos dicen en el enunciado: 12·5=60 cm²

9.– Calcula los lados de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm y cuya base mide 2 cm más que la altura.

Si dibujamos el rectángulo mencionado en el que la diagonal es 10 cm, la altura será *x*, y la base *x+2*.



Si aplicamos el teorema de Pitágoras tendremos que: $10^2 = x^2 + (x+2)^2$

Si desarrollamos la identidad notable y desarrollamos llegamos a:

$$10^2 = x^2 + (x+2)^2 \quad \rightarrow \quad 100 = x^2 + x^2 + 4x + 4 \quad \rightarrow \quad 100 = 2x^2 + 4x + 4 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + 4x - 96 = 0$$

Si dividimos todo por 2, obtenemos una ecuación equivalente que resolvemos:

$$2x^2+4x-96=0 \quad \text{equivalente} \quad x^2+2x-48=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-48)}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+192}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{-2\pm 14}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{-2+14}{2}=\frac{12}{2}=6 \\ x_2=\frac{-2-14}{2}=\frac{-16}{2}=-8\end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=6 \\ x_2=-8\end{cases}$$

Desechando la solución negativa, tenemos que la base será de 8 cm y la altura de 6 cm.

Piensa y practica
11.- Resuelve los siguientes problemas de ecuaciones de segundo grado:
a) Hallar un número de dos cifras sabiendo que la cifra de las decenas es igual al doble de la cifra de las unidades, y que si se multiplica dicho número por la suma de sus cifras se obtiene 63.
b) Hallar un número sabiendo que es igual al doble de su raíz cuadrada más 3.
c) La edad de un niño será dentro de tres años un cuadrado perfecto, y hace tres años que su edad era precisamente la raíz cuadrada de este cuadrado. ¿Qué edad tiene?

6.6.5.- Ejemplos de problemas de grifos

Otro caso interesante de problemas que es conveniente de estudiar a parte, es el del problema de grifos.

En el enunciado de este tipo de problemas se presentan siempre una serie de "sujetos" que realizan labores que se pueden acumular (grifos que llenan un depósito; máquinas que realizan un mismo trabajo; obreros que realizan una obra, etc ...).

Los datos e incógnitas siempre se refieren a los tiempos que cada uno por separado o todos juntos realizan dicha labor. El "truco" para plantear el problema radica en considerar la parte de la labor que realiza, en cada unidad de tiempo, cada "sujeto" y todos juntos; la parte que realizan todos juntos es la suma de la parte de labor que realiza cada uno de los sujetos.

Supongamos que tenemos dos grifos para llenar un depósito:

El grifo 1 tarda t_1 horas en llenarlo, en una hora habrá llenado: $1 / t_1$

El grifo 2 tarda t_2 horas en llenarlo, en una hora habrá llenado: $1 / t_2$

Si el depósito tiene un desagüe:

El desagüe tarda t_3 horas en vaciarlo, en una hora vaciará: $1 / t_3$

Si todos juntos tardan en llenarlo X horas, en una hora llenarán: 1/T

10.- Un depósito dispone de dos grifos; el primero lo llena en dos horas y el segundo lo llena en cuatro horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarlos los dos grifos juntos?

Si llamamos x al tiempo que se tarda en llenar el depósito, entonces:

Grifo	*Tarda en llenar el depósito*	*Llena en una hora*
Grifo 1	2 horas	la mitad $\frac{1}{2}$
Grifo 2	4 horas	La cuarta parte $\frac{1}{4}$
Los dos grifos juntos	X horas	$\frac{1}{x}$

Dado que el agua que vierten los dos grifos juntos es la suma del agua vertida por cada uno de ellos, tendremos que en una hora:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

La cantidad vertida por los dos es la suma de lo que ha vertido cada uno, y si resolvemos la ecuación:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}=\frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad 3x=4 \quad \rightarrow \quad x=\frac{4}{3}$$

Así que los dos grifos tardarán 1,33 h que en minutos son: 1 hora y 20 minutos.

11.- Un grifo llena un tanque en dos horas. Otro grifo lo vacía en tres horas. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse?

Si llamamos x a las horas que tarda en llenarse, en una hora se llenará: $\frac{1}{x}$

- ✓ Si un grifo lo llena en dos horas, en una hora llenará: $\frac{1}{2}$, la mitad del depósito.
- ✓ Si el otro grifo lo vacía en 3 horas, en una hora vaciará: $\frac{1}{3}$, la tercera parte.

Quiere decir que en una hora el depósito se llenará: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Con esto, igualando las dos expresiones de lo que se llenará en una hora: $\frac{1}{x}=\frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad x=6$

Por tanto, el depósito tardará 6 horas en llenarse.

12.- Se poseen dos cirios de igual altura que se encienden simultáneamente. ¿Al cabo de cuánto tiempo la altura del primero será el doble del segundo, si se sabe que se consumen, el primero en 6 horas y el segundo en 4 horas?

Si llamamos x al tiempo que pasa hasta que la altura del primero sea el doble que la del segundo.

- Si el primero se consume en 6 horas, en 1 hora se consumirá: 1/6, y en x horas lo hará x/6.
- Si el segundo se consume en 4 horas, en 1 hora se consumirá: 1/4, y en x horas lo hará x/4.

Cuando pasen x horas, la altura del primero (1–x/6) será igual que el doble de la altura del segundo (1–x/4):

$$\left(1-\frac{x}{6}\right)=2\left(1-\frac{x}{4}\right) \quad \rightarrow \quad 1-\frac{x}{6}=2-\frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad x=3$$

Por tanto, han de pasar 3 horas.

Piensa y practica
12.- Resuelve los siguientes problemas de grifos:
a) Un depósito puede ser llenado por dos grifos A y B, el grifo A lo llena en diez horas, mientras que B lo hace en nueve horas más que empleando los dos grifos A y B juntos. ¿En cuánto tiempo se llena el depósito utilizando solo el grifo B?

b) Un taller tarda en hacer un trabajo 8 días, otro taller B, tarda en hacer ese mismo trabajo 12 días, y un tercer taller C, tarda 24 días. ¿Cuántos días tardarían en hacer ese mismo trabajo, si trabajarán los tres talleres juntos?

c) Un caño A puede llenar un pozo vacío en 3 horas; otro caño B ubicado en el fondo del pozo puede vaciarlo en 6 horas. Estando vacío el pozo, se abren los dos caños a la vez. ¿En qué tiempo llenan el pozo hasta las 2/3 partes?

d) Cuando dos bombas diferentes actúan a la vez, tardan en vaciar un pozo 15 horas. Si actuara solo la menor, tardaría en vaciarlo 16 horas más que si actuara solo la mayor. ¿Cuánto tardaría la mayor?

6.07.- Autoevaluación

1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $1-\frac{x}{5}=x+\frac{2}{5}$

b) $x+\frac{1}{2}=\frac{5x}{8}-\frac{3}{4}$

c) $\frac{2x}{3}-4\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{15}$

2.- Resuelve estas ecuaciones de segundo grado:

a) $3x+2)^2+3(1-3x)x=2(x-11)$

b) $(2x-3)^2+(x-2)^2=3(x+1)+5x(x-1)$

c) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(2x-1)^2}{16}=\frac{35}{16}$

d) $\frac{(2x-1)\cdot(2x+1)}{3}+\frac{(x-2)^2}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$

e) $x+\frac{3x+1}{2}-\frac{x-2}{3}=x^2-2$

3.- Determinar k de modo que las dos raíces de la ecuación $x^2 - kx + 36 = 0$ sean iguales.

4.- Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

5.- Un coche sale de A hacia B separadas 315 km a una velocidad de 105 Km/h y a la misma hora sale de B hacia A un camión. Si se cruzan a las 11:45, ¿a qué velocidad circulaba el camión?

6.- Si aumentamos el lado de un cuadrado en 2 m, su superficie aumenta en 16 m^2. Calcula lo que medía inicialmente el lado del cuadrado.

7.- Un hortelano ha plantado 1/3 de la superficie de su huerta de acelgas y 3/10 de zanahorias. Si aún le quedan 110 m^2 libres, ¿cuál es la superficie total de la huerta?

8.- Dos caños A y B llenan juntos una piscina en dos horas, A lo hace por sí solo en tres horas menos que B. ¿Cuántas horas tarda a cada uno?

9.- ¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74% de alcohol se debe mezclar con 5 litros de otro que tiene un 90%, si se desea obtener una mezcla al 84% de alcohol?

10.- Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida en centímetros tres números enteros consecutivos. Halla dichos números.