Unidad Didáctica 12

PROBABILIDAD

3º ESO

En esta unidad vas a:

1. **Diferenciar experimentos entre aleatorios y deterministas.**
2. **Conocer el espacio muestral.**
3. **Identificar los distintos tipos de sucesos.**
4. **Aprender a realizar operaciones con sucesos.**
5. **Calcular probabilidades de distintos sucesos.**
6. **Conocer la Regla de Laplace**
7. **Identificar sucesos independientes**
8. **Realizar diagramas en árbol**
9. **Resolver problemas de Probabilidad**

SUMARIO

12.00.- Lectura comprensiva

El astrónomo de Córdoba

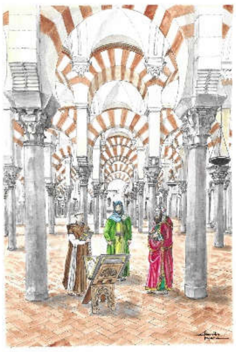
Hace más de mil años, en la ciudad de Córdoba, vivía un joven llamado Samir. Su padre trabajaba copiando libros en la gran biblioteca Califal y, desde pequeño, Samir había crecido rodeado de mapas, pergaminos y textos llenos de números extraños que parecían secretos.

A Samir le fascinaban las estrellas. Cada noche subía a la azotea de su casa, muy cerca de la Gran Mezquita, para observar el cielo. Mientras otros jóvenes dormían, él intentaba descubrir por qué algunas estrellas parecían moverse más rápido que otras. Su sueño era convertirse en astrónomo y trabajar algún día para el califa.

Una tarde, el maestro Ibrahim llegó a la escuela con una bolsa de cuero. Dentro había diez pequeñas piedras blancas y cinco negras.

—Hoy aprenderéis algo muy importante —dijo el maestro—: cómo predecir posibilidades.

Los alumnos se miraron confundidos. Uno de ellos preguntó:



—¿Se puede conocer el futuro?

El maestro sonrió.

—No exactamente. Pero las matemáticas pueden ayudarnos a saber qué es más probable.

Ibrahim metió las piedras en una vasija de barro y llamó a Samir.

—Sin mirar, saca una piedra.

Samir introdujo la mano lentamente y sacó una piedra blanca. Algunos compañeros aplaudieron.

—¿Ha sido suerte? —preguntó el maestro.

Todos respondieron que sí.

Entonces Ibrahim explicó que, como había más piedras blancas que negras, era más probable sacar una blanca. No era magia ni adivinación: era probabilidad.

Samir quedó impresionado y toda esa noche no dejó de pensar en ello. Comprendió que las matemáticas no solo servían para comerciar o construir edificios, sino también para entender mejor el mundo.

Durante las semanas siguientes, el maestro les enseñó problemas relacionados con mercaderes, viajes por el desierto y juegos de azar. Los comerciantes necesitaban calcular riesgos antes de cruzar largas rutas; los marineros querían saber las posibilidades de encontrar tormentas; incluso los médicos utilizaban observaciones para decidir tratamientos.

Un día, Ibrahim contó que muchos sabios del mundo islámico habían realizado grandes avances en matemáticas y astronomía. Gracias a ellos, ciudades como Córdoba, Bagdad y Damasco se habían convertido en centros de conocimiento admirados en todo el mundo.

Samir comenzó a estudiar con más esfuerzo que nunca. Pasaba horas haciendo cálculos a la luz de una lámpara de aceite. Sus amigos se burlaban de él porque prefería los libros antes que las carreras de caballos.

—Algún día descubriré algo importante —respondía él.

Años después, Samir llegó a trabajar en el observatorio de la ciudad. Allí ayudó a elaborar tablas astronómicas que permitían orientarse a viajeros y navegantes. Cada vez que observaba el cielo recordaba aquella sencilla lección de las piedras blancas y negras.

Porque comprendió que la probabilidad no consiste en adivinar el destino, sino en entender que, incluso en un universo lleno de incertidumbre, las matemáticas pueden iluminar el camino.

Lee nuevamente el texto anterior y contesta el siguiente cuestionario:

a) ¿Dónde vivía Samir?
b) ¿Qué trabajo tenía el padre de Samir?
c) ¿Qué le fascinaba al protagonista?
d) ¿Qué enseñó el maestro Ibrahim con las piedras?
e) ¿Por qué era más probable sacar una piedra blanca?
f) ¿Qué profesiones utilizaban la probabilidad en la historia?
g) ¿Qué ciudades aparecen como centros de conocimiento?
h) ¿Por qué se burlaban los amigos de Samir?
i) ¿Qué llegó a hacer Samir cuando fue adulto?
j) ¿Cuál es la idea principal del texto?

12.01.- Introducción

A cualquiera que preguntemos cuanto tiempo tardaríamos en recorrer los 350 kilómetros que separan las ciudades de Valencia y Barcelona, si nos desplazamos con velocidad constante de 100 km/h, nos contestará sin dudar que 3 horas y media. Pero, su actitud sería muy distinta si, previamente a su lanzamiento, le preguntamos por la cara que nos mostrará un dado. Se trata de dos fenómenos de naturaleza bien distinta;

- El primero pertenece a los que podemos denominar **deterministas**, aquellos en los que la relación causa-efecto aparece perfectamente determinada. En nuestro caso concreto, la conocida ecuación $e = v \cdot t$, describe dicha relación.

- El segundo pertenece a la categoría de los que denominamos **aleatorios**, que se caracterizan porque aun repitiendo el experimento que lo produce, en las mismas condiciones, el resultado variará de una repetición a otra dentro de un conjunto de posibles resultados.

La Teoría de la Probabilidad pretende emular el trabajo que los físicos y, en general, los científicos experimentales han llevado a cabo. Para entender esta afirmación observemos que la ecuación anterior, $e = v \cdot t$, es un resultado experimental que debemos ver como un modelo matemático que, haciendo abstracción del móvil concreto y del medio en el que se desplaza, describe la relación existente entre el espacio, el tiempo y la velocidad.

La Teoría de la Probabilidad nos permitirá la obtención de modelos aleatorios o estocásticos mediante los cuales podremos conocer, en términos de probabilidad, el comportamiento de los fenómenos aleatorios.

12.02.- Experimentos Aleatorios

Un experimento se llama aleatorio cuando se conocen todos los posibles resultados del mismo, pero no puede predecirse cuál de ellos se producirá en una experiencia correcta. Son ejemplos de experimentos aleatorios: lanzar una moneda al aire, extraer un naipe de la baraja, lanzar un dado, etc.

En un experimento Aleatorio: "Sabemos lo que puede ocurrir, pero no lo que va a ocurrir."

Un experimento es determinista si sabemos por adelantado el resultado que obtendremos.

Piensa y practica

1.- Indica si estos experimentos son aleatorios o deterministas:

a) Se extrae, sin mirar, una carta de una baraja española.
b) Se lanza un dado tetraédrico regular, cuyas caras están numeradas del 1 al 4, y anotamos el resultado de la cara oculta.
c) Se mide la longitud del perímetro de un cuadrado de 4 centímetros de lado.
d) Que se lancen dos monedas y salgan dos caras.
e) Que la noche siga al día.
f) Que el próximo 17 de octubre llueva.
g) Que el próximo 25 de diciembre sea Navidad.

12.03.- Espacio Muestral

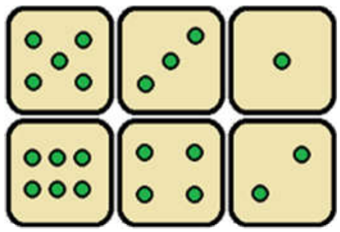
El espacio muestral es el conjunto de todos los resultados que se pueden obtener en un experimento aleatorio.

Si lanzamos una moneda al aire, caben dos posibilidades C y +.

El espacio muestral es E = {C,+}.

Al lanzar un dado caben seis posibilidades, 1,2,3,4,5 y 6, por tanto,

El espacio muestral es E = {1,2,3,4,5,6}



Piensa y practica

2.- Expresa el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.
a) Se lanza una moneda y se anota el resultado de la cara superior.
b) Se lanza un dado de quinielas, que tiene tres caras con un 1, dos caras con una X y una cara con un 2, se espera que se pose sobre una cara y se anota el resultado de la cara superior.
c) Se extrae, sin mirar, una bola de una urna que contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8, y se anota el número de la bola extraída.

3.- En una urna hay 5 bolas blancas y cuatro negras. Escribe el espacio muestral si sacamos 3 bolas.

4.- Tenemos caramelos de fresa, naranja, limón y piña. Cogemos uno sin mirar y comprobamos su sabor.
a) ¿Es una experiencia aleatoria?
b) Escribe el espacio muestral.

12.04.- Sucesos

Se llama suceso (o evento) a cualquier subconjunto del espacio muestral E. Los sucesos se simbolizan por las letras A, B, C....

12.4.1.- Tipos de Sucesos

- **Sucesos Elementales:** Formados por un solo elemento del experimento.

  Por ejemplo, al lanzar una moneda, sucesos elementales son:

  Suceso A: Obtener cara, A={C},
  Suceso B: Obtener cruz, B={+}.

- **Suceso Compuesto:** Es un suceso formado por varios sucesos elementales.

  Por ejemplo, al lanzar un dado, un suceso compuesto sería:

  Suceso A: Obtener menos de 4, A={1,2,3}.

- **Suceso Seguro:** Es el suceso que siempre ocurre, está formado por todos los sucesos elementales. Coincide con el espacio muestral.

  Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, un suceso seguro sería:

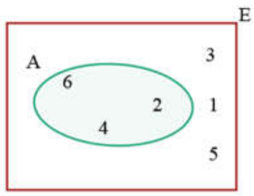
  Suceso Seguro: Obtener menos de 7, A={1,2,3,4,5,6} = E.

- **Suceso Imposible:** Es el suceso que nunca ocurre, se representa por ϕ. (Conjunto Vacío).

  Por ejemplo, al lanzar un dado un suceso imposible sería obtener más de 6.

  Suceso Imposible: Obtener más de 6

- **Suceso contrario u opuesto de A:** Es el que se verifica para todos los resultados que no verifican A. Se simboliza por $\overline{A}$, por A^c y a veces también por A'.



  Por ejemplo, al lanzar un dado, el suceso contrario de obtener número par A={2,4,6} es obtener número impar A^c={1,3,5}.

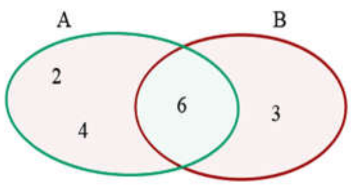
  Si A = {2,4,6}, el Suceso Contrario: A^c = {1,3,5}.

- **Sucesos incompatibles o excluyentes:** los sucesos A y B son incompatibles si su realización simultánea es imposible, es decir si no pueden ocurrir a la vez. En particular dos sucesos contrarios son incompatibles.

  Dos sucesos son incompatibles si no tienen elementos en común. $A \cap B = \phi$

- **Sucesos Compatibles:** Los sucesos A y B son compatibles si su realización simultánea es posible.

  Dos sucesos son compatibles si tienen elementos en común. $A \cap B \neq \phi$



Por ejemplo, los sucesos A, Obtener número par, A={2,4,6} y B, obtener múltiplo de 3, B={3,6} son sucesos compatibles, porque tienen un elemento en común, el 6.

Piensa y practica

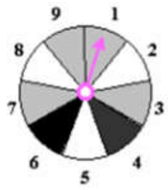
5.- En el experimento de lanzar un dado al aire, determina un suceso seguro y uno imposible.

6.- Con una baraja de cartas española, se realiza el experimento de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales que componen estos sucesos:

a) Sacar Oros   b) Sacar un 5   c) Sacar figura   d) Sacar bastos

7.- Lanzamos tres veces una moneda.
a) Completa en tu cuaderno el espacio muestral
b) Describe los siguientes sucesos: A = "la primera vez salió cara"   B = "hay al menos dos caras"
c) Describe los sucesos contrarios de A y de B.

8.- Se gira la aguja de la ruleta y observamos el número del sector dónde se para.



a) Describe el espacio muestral.
b) ¿Cuántos sucesos elementales forman cada uno de los siguientes sucesos?
B = "blanco"   G = "gris"   N = "negro"
c) Describe los sucesos contrarios de B, G y N.
d) ¿Cuál es el suceso seguro? Indica un suceso imposible.

9.- Lanzamos dos dados al aire y anotamos los n.° de sus caras superiores. Hallar:
a) El espacio muestral
b) El suceso A="la suma de los números obtenidos es 7"
c) El suceso B="ambos números son iguales"
d) El suceso C="el producto de los números es mayor o igual que 20".

12.05.- Operaciones con Sucesos

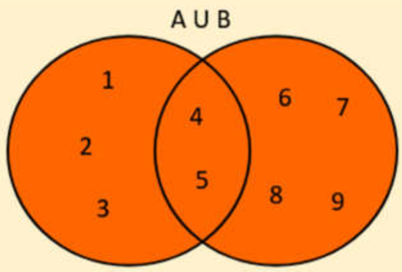
- La **unión** de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando uno al menos de los sucesos A y B se realiza. Se simboliza por $A \cup B$. (Ocurre A o B) (Todos los elementos de A y de B)

- La **intersección** de los sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando A y B se realizan de forma simultánea. Se simboliza por $A \cap B$. (Ocurren A y B) (Los elementos comunes de A y de B)

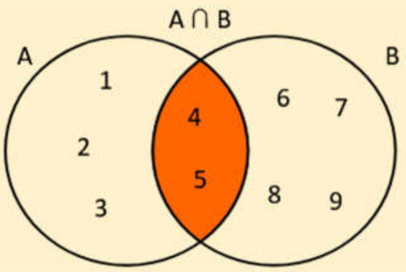
Ejemplo

1.- Dados los sucesos A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {4, 5, 6, 7, 8, 9}, calcula la unión y la intersección de ambos, utilizando los diagramas de Venn.

UNIÓN	INTERSECCIÓN
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$A \cap B = \{4, 5\}$



La unión son todos los elementos de A y de B (sin repetir)

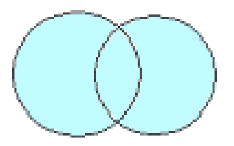
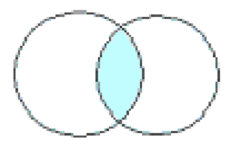
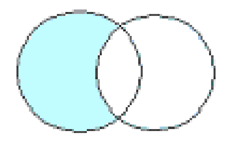
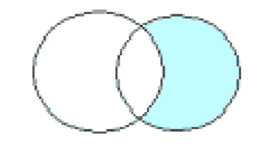
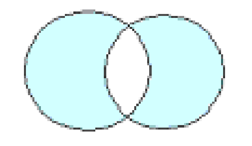


La intersección son los elementos que tienen en común A y B

Si no tenéis mala memoria, las operaciones con sucesos os recordarán mucho a las operaciones con Intervalos.

Para representar las relaciones lógicas entre dos o más sucesos, se utilizan los diagramas de Venn, que son organizadores gráficos que utilizan círculos superpuestos y permiten visualizar de forma sencilla qué elementos o características tienen en común (intersección) y en cuáles difieren.

Operaciones con Sucesos mediante diagramas de Venn

				
Unión	Intersección	Diferencia	Diferencia	Diferencia Simétrica
$A\cup B$	$A\cap B$	$A-B$	$B-A$	$A\cup B-A\cap B$

Algunas de las propiedades más importantes de sucesos son las llamadas **Leyes de Morgan:**

- El caso **contrario de la unión** es la intersección de los contrarios: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
- El caso **contrario de la intersección**, es la unión de los contrarios: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Ejemplo

2.- En un experimento aleatorio, lanzamos un dado:

a) Si A es el suceso "Obtener un número par", y B el suceso "Obtener un múltiplo de tres". Calcula la unión y la intersección de ambos sucesos. ¿Son A y B son sucesos compatibles o son incompatibles?

Si los sucesos A y B son; A = {2,4,6}: B= {3,6}, entonces:

$$A\cup B=\text{Ocurre A o ocurre B}\quad\rightarrow\quad A\cup B=\underbrace{\{2,3,4,6\}}_{\substack{\text{Los elementos}\\ \text{de A y B (todos}\\ \text{sin repetir)}}}\qquad y\qquad A\cap B=\text{Ocurren A y B}\quad\rightarrow\quad A\cap B=\underbrace{\{3\}}_{\substack{\text{Elementos}\\ \text{comunes}\\ \text{de A y B}}}$$

Como la intersección no es vacía, $A\cap B\neq\phi$ entonces A y B son sucesos compatibles.

b) Si A es el suceso "Obtener un número par", B el suceso "Obtener un múltiplo de 3" y C el suceso "Obtener un múltiplo de 5". ¿Qué sucesos son compatibles?

Para ello, calcularemos la intersección (elementos en común) de A y B, de A y C y de B y C.

Los sucesos A, B y C son: A = {2,4,6}, B = {3,6} y C = {5}

$$A\cap B=\{6\}\qquad A\cap C=\{\phi\}\qquad B\cap C=\{\phi\}$$

Los únicos sucesos compatibles son el A y el B porque su intersección no es vacía, $A\cap B\neq\phi$.

3.- Consideramos la experiencia "lanzar un dado". A partir de los sucesos: A = {1, 2, 3, 4}, B = {1, 3, 5}, C = {2, 4}

a) Obtén los conjuntos A ∪ B, A ∩ B, A', B'.

La unión, son todos los elementos de A y de B, la intersección, son los elementos que tienen en común, el contrario de A, son todos los elementos que no están en A y el de B lo es mismo:

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}\qquad A\cap B=\{3\}\qquad A'=A^C=\overline{A}=\{5,6\}\qquad B'=B^c=\overline{B}=\{2,4,6\}$$

b) Obtén los conjuntos (A ∪ B)', (A ∩ B)', A' ∪ B', A' ∩ B', y comprueba que se cumplen las leyes de Morgan.

Si $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}\quad\rightarrow\quad\overline{A\cup B}=\{6\}$ Además, Si $A\cap B=\{1,3\}\quad\rightarrow\quad\overline{A\cap B}=\{2,4,5,6\}$

Si $A=\{1,2,3,4\}\quad\rightarrow\quad\overline{A}=\{5,6\}$ además, Si $B=\{1,3,5\}\quad\rightarrow\quad\overline{B}=\{2,4,6\}$

Las leyes de Morgan dicen que: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ y $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, veamos si se verifican:

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,4,5,6\}=\overline{A\cap B}\qquad y\qquad\overline{A}\cap\overline{B}=\{6\}=\overline{A\cup B}$$

Por tanto, vemos que se verifican las Leyes de Morgan.

c) Calcula B ∪ C y B ∩ C, y razona los resultados.

$$B\cup C=\{1,2,3,4,5\}\qquad B\cap C=\{\phi\}$$

Vemos que La intersección de ambos es vacía, y por tanto B y C son sucesos incompatibles.

Piensa y practica

10.- Sean A, B, C sucesos de un espacio muestral E. Utilizando estos sucesos expresa:
a) Los tres sucesos suceden simultáneamente. A∩B∩C
b) Ocurren A o B pero no C. A∪B∩C'
c) Ocurre alguno de los tres sucesos. A∪B∪C
d) No ocurre ninguno de los sucesos. (A∩B∩C)'

11.- Tenemos una urna con 9 bolas enumeradas del 1 al 9. Sacamos una bola, miramos el número y la devolvemos. Sean los sucesos: A = "Salir número primo" B = "Salir impar" y C = "Salir múltiplo de 3". Calcula:

a) $A \cap B$ b) $B \cap C$ c) $(A \cup B) \cap C$ d) $A \cap \overline{B}$ e) $B - C$ f) $\overline{A \cup B}$

12.06.- Probabilidad

La **probabilidad, P,** de un suceso A, es un número comprendido entre 0 y 1 que indica la posibilidad de que este ocurra y se representa por P(A) y se leerá **probabilidad del suceso A**, o simplemente probabilidad de A. Cuanto mayor sea la probabilidad, más fácil será que ocurra el suceso A.

De la definición de probabilidad se deducen las **siguientes propiedades:**

- Las probabilidades de dos sucesos contrarios suman uno: $P(A)+P(\bar{A})=1 \Rightarrow P(A)=1-P(\bar{A})$
- Si P(A)=1, decimos que A es un suceso seguro. A siempre ocurre.
- Si P(A)=0, A es un suceso imposible, o la probabilidad del suceso imposible es cero: $P(\phi)=0$
- Para cualquier suceso A, $0 \le P(A) \le 1$
- Si los sucesos A y B son **incompatibles**, entonces: $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$
- Si los sucesos A y B son **compatibles**: $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

  De donde: $P(A \cap B)=P(A)+P(B)-P(A \cup B)$
- Para dos sucesos cualesquiera A y B ocurre siempre que:

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B) \quad y \quad P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$$

$$P(\text{alguno})=1-P(\text{ninguno})$$

Ejemplo

4.- Sean A y B dos sucesos tales que: P(A)=0,3, P(B')=0,4 y P(A∪B)=0,65. Calcula P(A'), P(B) y P(A∩B)

Sabiendo que las probabilidades de dos sucesos contratarlos suman 1, podemos calcular una en función de la otra:

$$P(A')=P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,3=0,7 \quad \rightarrow \quad P[\bar{A}]=0,7$$

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-0,4=0,6 \quad \rightarrow \quad P[B]=0,6$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,3+0,6-0,65=0,25 \quad \rightarrow \quad P(A\cap B)=0,25$$

5.- Dadas las siguientes probabilidades: P[A]=0,4; P[B]=0,7 y P[A' ∪ B'] = 0,8.
Calcula a) P[(A ∩ B)'], b) P[A ∩ B] y c) P[A ∪ B].

Con ayuda de algunas de las fórmulas anteriores:

$$P[(A\cap B)']=P[\overline{A\cap B}]=1-P[A\cap B]=P[\bar{A}\cup\bar{B}]=0,8 \quad \rightarrow \quad P[\overline{A\cap B}]=0,8$$

$$P[A\cap B]=1-P[\overline{A\cap B}]=1-0,8=0,2 \quad \rightarrow \quad P[A\cap B]=0,2$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,4+0,7-0,2=0,9 \quad \rightarrow \quad P(A\cup B)=0,9$$

Piensa y practica

12.- Sabiendo que P[M ∪ N] = 0,6, que P[M ∩ N] = 0,1 y que P[M'] = 0,7. Calcula P[M], P[N], P[N'], P[M' ∩ N']. 0,3; 0,4; 0,5 y 0,4

13.- Si los sucesos A y B son incompatibles, con P(A)=1/2 y P(B)=1/3, calcula P(AUB). 5/6

12.07.- Regla de Laplace

En una experiencia aleatoria en que todos los casos posibles son igualmente probables, la probabilidad de un suceso A es:

$$P(A)=\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

¡¡¡ Atención ¡!!! Para poder aplicar la regla de Laplace es imprescindible que **todos los casos posibles sean igualmente probables**. Esto, que suele suceder en los juegos de azar sencillos no es siempre cierto, ni mucho menos.

Ejemplo

6.- Se lanza 100 veces un dado, obteniendo los siguientes resultados:

	1	2	3	4	5
N° de veces	12	9	15	22	16

a) Calcula la probabilidad de cada suceso elemental:

Mediante la Regla de Laplace, se tendrá: $P(1)=\frac{12}{100}$ $P(2)=\frac{9}{100}$ $P(3)=\frac{15}{100}$ $P(4)=\frac{22}{100}$ $P(5)=\frac{16}{100}$ $P(6)=\frac{26}{100}$

b) Calcula la probabilidad de obtener número impar:

La probabilidad del suceso A "obtener número impar" es:

$$P(\text{Impar})=P(1,3,5)=P(1)+P(3)+P(5)=\frac{12}{100}+\frac{15}{100}+\frac{16}{100}=\frac{43}{100}$$

7.- En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída:

a) Sea un número de una sola cifra:

Que sea 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, por tanto: $P(A)=\frac{\text{N° de casos favorables}}{\text{N° de casos posibles}}$ $\rightarrow$ $P(A)=\frac{9}{49}=0{,}184$

P (1 cifra) = 0,184

b) Sea un múltiplo de 7:

Que sea 7, 14, 21, 28, 35, 42 o 49, por tanto: $P(A)=\frac{\text{N° de casos favorables}}{\text{N° de casos posibles}}$ $\rightarrow$ $P(A)=\frac{7}{49}=\frac{1}{7}=0{,}143$

P (múltiplo de 7) = 0,143

Piensa y practica

14.- Una urna contiene bolas de distintos colores: 3 amarillas, 5 rojas y 6 verdes. Si se extrae una bola al azar:
a) Determina el espacio muestral.
b) Halla la probabilidad de cada uno de los sucesos: "bola amarilla", "bola roja" o "bola verde". 3/14, 5/14, 3/7
c) ¿Son equiprobables los sucesos anteriores? No

15.- En una bolsa se han metido las 16 fichas de un parchís (4 amarillas, 4 verdes, 4 azules y 4 rojas). Si se extrae una ficha y se mira el color:
a) ¿Cuál es el espacio muestral de los resultados?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja? ¿Y de que no sea roja? ¼ y 3/4
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea verde o azul? 1/2

16.- En una bolsa hay bolas iguales de distintos colores: 3 blancas, 4 negras y 5 rojas. Si se extrae una bola y se mira el color, halla la probabilidad de que: ¼, 1/3, 5/12, 7/12

Sea blanca   Sea negra   Sea roja   No sea negra

12.08.- Sucesos Independientes

Dos sucesos A y B son **independientes**, si el resultado de uno no influye en el resultado del otro. Matemáticamente dos sucesos son independientes:

$$P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$$

Ejemplo

8.- Se consideran dos sucesos A y B asociados a un mismo experimento aleatorio. Si P(A)=0,8, P(B)=0,7 y P(AUB)=0,94. a) ¿Son A y B sucesos independientes?; b) Calcula P(A'UB')

Sabemos que dos sucesos son independientes si ocurre que: $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$

En nuestro caso, ocurre:

$$P(A)\cdot P(B)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56 \quad\rightarrow\quad P(A)\cdot P(B)=0{,}56$$

Y por otro lado:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}8+0{,}7-0{,}94=0{,}56 \quad\rightarrow\quad P(A\cap B)=0{,}56$$

Por tanto, como $P(A)\cdot P(B)=0{,}56=P(A\cap B)$, los sucesos son independientes.

Piensa y practica

17.- Se consideran dos sucesos A y B asociados a un mismo experimento aleatorio. Si P(A)=0,9, P(B)=0,5 y P(AUB)=0,95. a) ¿Son A y B sucesos independientes?; b) Calcula P(A'UB') Sí; 0,44

18.- Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que: P(A')=0,2; P(B)=0,25 y P(AUB)=0,85. ¿Son los sucesos A y B independientes? Sí

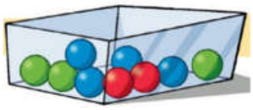
12.09.- Experimentos Simples.

Un experimento es simple cuando se realiza una única acción, es decir, si no podemos descomponerlo en situaciones más simples. Por ejemplo, lanzar una moneda, estimar el tiempo que tardará el autobús que estamos esperando o extraer una bola de una bolsa opaca.

- Si se lanza al aire una moneda, puede salir cara (C) o cruz (+), por tanto, la probabilidad de obtener cara es la misma que de cruz.

$$\left.\begin{matrix} E=\{C,+\} \\ A=\{C\} \end{matrix}\right\} \rightarrow P(C)=\frac{1}{2} \rightarrow P(Cara)=\frac{1}{2}$$

- Si en una urna hay 2 bolas rojas, 3 verdes y 4 azules. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola sea de color rojo?



$$\left.\begin{matrix} E=\{2R,3V,4A\} \\ A=\{R\} \end{matrix}\right\} \rightarrow P(R)=\frac{2}{2+3+4}=\frac{2}{9} \rightarrow P(Roja)=\frac{2}{9}$$

- Un dado de quinielas tiene tres caras tienen el símbolo 1 (victoria local), dos caras tienen el símbolo X (empate) y una cara tiene el símbolo 2 (victoria visitante). Pues si lanzamos un dado de este tipo, calcula la probabilidad de sacar x.

$$\left.\begin{matrix} E=\{1,1,1,x,x,2\} \\ A=\{x\} \end{matrix}\right\} \rightarrow P(x)=\frac{2}{3+2+1}=\frac{2}{6} \rightarrow P(empate)=\frac{1}{3}$$

Ejemplo

9.- Se lanza al aire un dado con forma de octaedro y con las caras numeradas de 1 a l 8. ¿Cuál es la probabilidad de obtener múltiplo de 3?

Tenemos que el espacio muestral del dado es: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8}

Y el suceso a estudiar A, es que el resultado obtenido sea múltiplo de 3: A= {3, 6}

La probabilidad, utilizando la fórmula de Laplace es: $P(\dot{3})=\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \rightarrow P(\dot{3})=\frac{1}{4}$

Por tanto, la probabilidad de obtener múltiplo de 3 es de 1/4.

12.10.- Experimentos Compuestos. Diagramas en árbol.

Un experimento compuesto es el que está formado por varios experimentos simples.

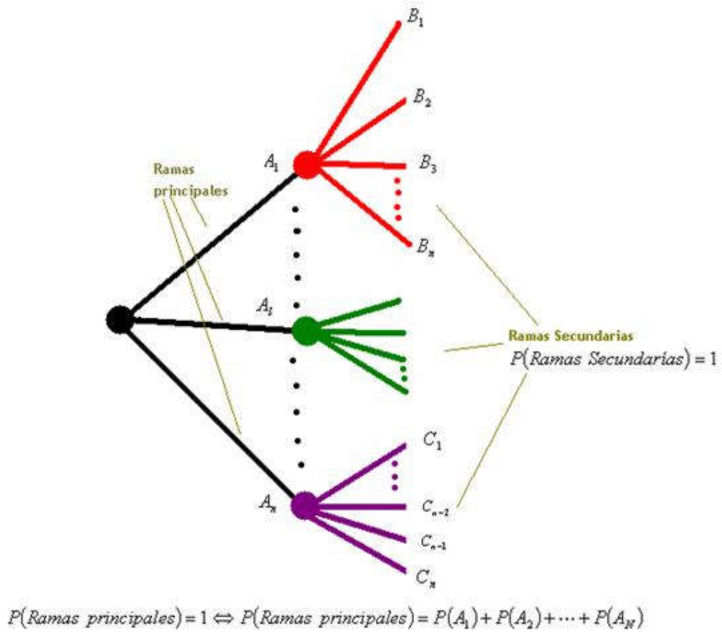
Por ejemplo, lanzar una moneda y girar una ruleta, extraer tres cartas de una baraja, lanzar un dado y según su valor, extraer una bola de un conjunto de bolsas.

12.9.1.- Diagrama en árbol

Hay una serie de técnicas que ayudan a efectuar recuentos. La más práctica y sencilla es el **diagrama en árbol**, que permite representar de forma clara y ordenada el proceso que se sigue al ir contando los diferentes casos que pueden presentarse.

- Un diagrama en árbol es un diagrama que se hace para resolver los problemas de experimentos compuestos, y se llama así porque está compuesto por ramas.

Para la construcción de tal diagrama se partirá poniendo una rama para cada una de las distintas posibilidades, acompañada de su probabilidad. El final de cada rama parcial, constituye a su vez un nudo, del cual parten nuevas ramas, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo presenta un posible final del experimento (nudo final).



Hay que tener en cuenta:

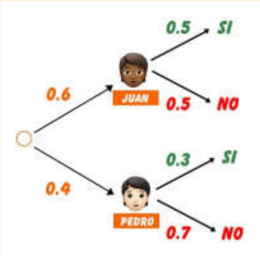
- En cada nudo, la suma de las probabilidades de todas las ramas que parten de él es igual a uno.
- La probabilidad de cada suceso se calcula multiplicando las probabilidades de cada rama.

- Una rama es cada una de las fechas del diagrama. Siempre se escribe en ellas la probabilidad que corresponde a un experimento simple.

- Un camino es el conjunto de ramas que van desde el principio hasta el final.

Ejemplo

10.- El entrenador de un equipo de futbol amateur tiene varios porteros. Juan y Pedro asisten a los partidos cada vez que sus estudios se lo permiten. Juan asiste a 6 de cada 10 partidos, mientras que Pedro solo a 4 de cada 10. Cuando asiste Juan, juega de portero una de cada dos veces, mientras que Pedro 3 de cada 10. Representa el diagrama en árbol, calcula la probabilidad de que cada uno de los porteros juegue el siguiente partido y la probabilidad de que juegue alguno de ellos dos.



El diagrama en árbol es como el que aparece a la izquierda, en el que, como podemos observar, en cada nudo, la suma de las probabilidades de todas las ramas que parten de él es igual a uno.

Además, la probabilidad de cada suceso se calcula multiplicando las probabilidades de cada rama porque son sucesos independientes.

Así que, la probabilidad de que Juan juegue el partido es: $P(Juan \cap Si) = P(Juan) \cdot P(Si) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$

La probabilidad de que Pedro juegue el partido es: $P(Pedro \cap Si) = P(Pedro) \cdot P(Si) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$

La probabilidad de que juegue alguno de los dos, sería la suma de la probabilidad de Juan + la de Pedro, o lo que es lo mismo, la probabilidad del Si:

$$P(Si) = P(Juan) \cdot P(Si) + P(Pedro) \cdot P(Si) = 0{,}3 + 0{,}12 = 0{,}42$$

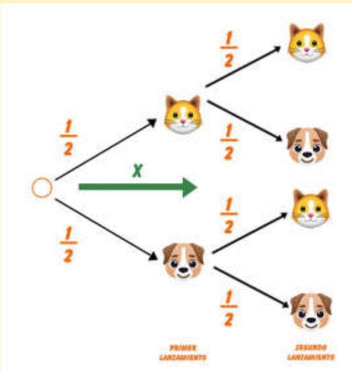
También lo podíamos haber calculado sabiendo que: $P(\text{alguno}) = 1 - P(\text{ninguno})$

Por tanto, calculamos la probabilidad de ninguno, que es la misma que la del No: $P(No) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}3 + 0{,}28 = 0{,}58$

Y con esto, calculamos: $P(\text{alguno}) = 1 - P(\text{ninguno}) = 1 - 0{,}58 = 0{,}42$

Por tanto, la probabilidad de que juegue Juan es de 0,3 ; la de Pedro es 0,12 y la de que juegue alguno de ellos es 0,42.

11.- Suponiendo que una moneda tiene dibujada la figura de un gato en uno de sus lados, y la imagen de un perro en el otro, ¿Cuál sería la probabilidad de obtener dos gatos en dos lanzamientos? ¿Y de un gato y un perro?



Empezamos por dibujar el diagrama en árbol que es el que aparece a la izquierda, en el que, otra vez, en cada nudo ocurre que la suma de las probabilidades de todas las ramas que parten de él es igual a uno.

La probabilidad de que en la moneda salga perro o gato es de 0,5.

Como la probabilidad de cada suceso se calcula multiplicando las probabilidades de cada rama:

Así que, la probabilidad de que salgan dos gatos es: $P(GG) = P(G) \cdot P(G) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$

La probabilidad de que salga perro y gato se consigue por dos ramas, GP o PG, por tanto, será:

$P(\text{Un gato y un perro}) = P(GP) + P(PG) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$

Así que la probabilidad de 2 gatos es 0,25 y la de un gato y un perro es de 0,5.

Piensa y practica

19.- Se sabe que el 44% de la población activa de cierta provincia está formada por mujeres. También se sabe que, de ellas, el 25% está en paro y que el 20% de los hombres de la población activa también están en paro. Elegida, al azar, una persona de la población activa de esa provincia, calcule, con la ayuda de un diagrama en árbol, la probabilidad de que esté en paro y calcula también la probabilidad de que esa persona sea un hombre con trabajo. P(Paro) = 0,228; P(H∩T) = 0,42

20.- Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae una bola al azar. Realiza un diagrama en árbol y:

a) Calcule la probabilidad de que sea blanca.

b) ¿cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada?

c) Son independientes los sucesos "sacar bola marcada" y "sacar bola blanca". a) 0,25; b) 0,4375; c) Dep

21.- Lanzamos un dado, si sale 5 o 6 extraemos una bola de la urna A, que contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Si sale otro resultado se extrae una bola de la urna B, que contiene 3 bolas blancas y 7 negras. Haz un árbol y calcula:

a) La probabilidad de que la bola extraída sea negra.

b) La probabilidad de que la bola sea blanca y de la urna B. a) 3/5; b) 1/5

12.9.2.- Extracciones con devolución y sin devolución

Cuando se extraen dos bolas de una urna, puede hacerse «con devolución» o «sin devolución». Si es con devolución, al extraer la segunda bola se vuelven a tener otra vez todas las bolas en la urna, pero si es sin devolución, al extraer la segunda bola, faltará la que se ha sacado anteriormente. Cuando se extraen dos al mismo tiempo, es lo mismo que extraer «sin devolución»: primero una y después la otra. Lo mismo sucede al extraer dos o más cartas de una baraja.

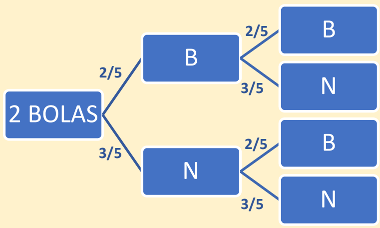
Este tipo de extracciones, también son conocidas como extracciones con reposición o sin reposición, o extracciones con reemplazamiento o sin reemplazamiento

Ejemplo

12.- Se tiene una urna con 15 bolas negras y 10 blancas, y se realizan dos extracciones sucesivas de una bola. Halla la probabilidad de que las dos bolas sean blancas en los siguientes casos.

a) Con devolución a la urna de la primera bola extraída.

Si la extracción es con devolución, el número de bolas en la urna siempre será de 25 bolas, por tanto:



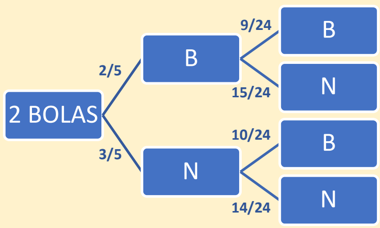
En donde la probabilidad de blanca será P(B) = 10/25 =2/5 y la probabilidad de negra es de P(N) = 15/25 = 3/5.

La probabilidad de que las dos sean blancas solo se consigue por la rama BB, así que, utilizando la propiedad de las ramas:

$$P(BB)=P(B)\cdot P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}=0{,}16$$

b) Sin devolución.

Si la extracción es sin devolución, el número de bolas en la urna durante la primera extracción es de 25 bolas, pero en la segunda solo será de 24. Así que el árbol es el mismo, pero la probabilidad de las ramas no es la misma.



Ahora, la probabilidad de blanca en la primera extracción será P(B) = 10/25 = 2/5, pero en la segunda será 9/24.

De igual forma que en el caso anterior, la probabilidad de que las dos sean blancas solo se consigue por la rama BB, así que, utilizando la propiedad de las ramas:

$$P(BB)=P(B)\cdot P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{24}=\frac{18}{120}=\frac{3}{20}=0{,}15$$

Por tanto, con reposición la probabilidad es P=0,16 y sin reposición es de P=0,15

Como podéis ver, el ejercicio es prácticamente el mismo, pero tenemos que tener cuidado en la segunda extracción porque ahora hay una bola menos.

Piensa y practica

22.- En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones y se anotan los resultados en orden. Calcula la probabilidad de que el número formado sea el 121, suponiendo que la experiencia sea: a) Con reemplazamiento y b) Sin reemplazamiento. 1/8 y 1/6

23.- Halla la probabilidad de obtener 3 cartas de espadas sin reposición al extraer tres cartas de una baraja española de 40 cartas. 0,012

12.11.- Ejercicios Resueltos

1.- En un sorteo de lotería de Navidad, observamos la cifra en que termina el "gordo".

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

$$E=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

b) Escribe los siguientes sucesos:

A = Menor que 5 $\rightarrow$ $A=\{0,1,2,3,4\}$

B = Número PAR $\rightarrow$ $B=\{0,2,4,6,8\}$

C = No potencia de 2 $\rightarrow$ $C=\{0,3,5,6,7,9\}$

2.- En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída:

Para calcular las probabilidades, usaremos la regla de Laplace: $P(A)=\dfrac{\text{N° de casos favorables}}{\text{N° de casos posibles}}$

a) Sea un número de una sola cifra

Que sea, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9, por tanto: $P(A)=\dfrac{\text{N° de casos favorables}}{\text{N° de casos posibles}}$ $\rightarrow$ $P(A)=\dfrac{9}{49}=0,184$

P(1 cifra)=0,184

b) Sea un múltiplo de 7

Que sea, 7, 14, 21, 28, 35, 42 o 49, por tanto: $P(\dot{7})=\dfrac{7}{49}=\dfrac{1}{7}=0,143$

P(7) = 0,143

c) Sea mayor que 25

Que sea, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48 o 49

por tanto: $P(>25)=\dfrac{24}{49}=0,490$

P(>25) = 0,490

d) No sea múltiplo de 3

Podemos calcular mejor la probabilidad de que sea múltiplo de 3 y luego hacemos la probabilidad del caso contrario:

$$P(\dot{3})=\frac{16}{49}=0,327$$

Por tanto, $P(\overline{3})=1-P(\dot{3})=1-\dfrac{16}{49}=\dfrac{33}{49}=0,673$

P(3')=0,673

3.- En una bolsa se introducen 9 bolas numeradas del 1 al 9. Si extraemos una al azar:

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

E={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

b) Describe los siguientes sucesos:

A = "Obtener número impar" = A={1,3,5,7,9}

B = "Obtener un número menor o igual que 3" = B={1,2,3}

c) Calcula la probabilidad de que la bola extraída tenga un número par.

Que salga par es que, al sacar una bola, salga la bola 2, la 4, la 6 o la 8.

Por tanto, la probabilidad según la regla de Laplace: $P(par)=\frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos posibles}}=\frac{4}{9}=0,67$

P(par) = 0,67

4.- Indica si estos experimentos son aleatorios o deterministas:

a) Se extrae, sin mirar, una carta de una baraja española.
b) Se lanza un dado tetraédrico regular, cuyas caras están numeradas del 1 al 4, y anotamos el resultado de la cara oculta.
c) Se mide la longitud del perímetro de un cuadrado de 4 centímetros de lado.
d) Que se lancen dos monedas y salgan dos caras.
e) Que la noche siga al día.
f) Que el próximo 17 de octubre llueva.
g) Que el próximo 25 de diciembre sea Navidad.

En un experimento Aleatorio: **"Sabemos lo que puede ocurrir, pero no lo que va a ocurrir."**

Por tanto, los experimentos a), b), d), f) son experimentos aleatorios porque no sabemos lo que va a pasar, en el caso a) no sabemos que carta va a salir, en el b) no sabemos que resultado mostrará el dado, en el d) al lanzar dos monedas pueden salir dos caras o no y en el f) no sabemos si lloverá o no el próximo 17 de octubre. Mientras que los experimentos c), e), g) son deterministas porque sabemos exactamente lo que va a ocurrir. En el c) si el cuadrado tiene 4 cm de lado, al medir nos saldrá 4 cm, en el e) es evidente que la noche siga al día y en el g) La navidad empieza siempre el 25 de diciembre.

Así que a), b), d), f) son experimentos aleatorios y c), e), g) son deterministas.

5.- Expresa el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

Sabemos que el espacio muestral es el conjunto de todos los resultados que se pueden obtener en un experimento aleatorio, así que:

a) Se lanza una moneda y se anota el resultado de la cara superior.

Al lanzar una moneda podemos obtener cara o cruz, por tanto: E = {C,+}

b) Se lanza un dado de quinielas, que tiene tres caras con un 1, dos caras con una X y una cara con un 2, se espera que se pose sobre una cara y se anota el resultado de la cara superior.

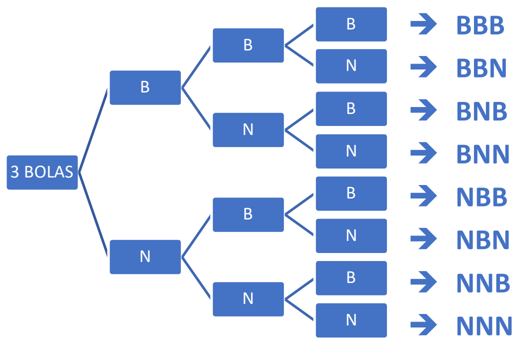
Al lanzar el dado podemos obtener 1 o X o 2, por tanto: E = {1,X,2}

c) Se extrae, sin mirar, una bola de una urna que contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8, y se anota el número de la bola extraída.

Al sacar la bola, esta puede tener el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 o el 8, por tanto: E = {1,2,3,4,5,6,7,8}

6.- En una urna hay 5 bolas blancas y 4 negras. Escribe el espacio muestral si sacamos 3 bolas.

Si sacamos 3 bolas, puede ocurrir que la primera sea blanca o negra, que la segunda sea blanca o negra y que la tercera también sea blanca o negra. Vamos a ayudarnos de un dibujo (diagrama de árbol) para representar las posibilidades:



Por lo tanto, el espacio muestral es: E = {BBB, BBN, BNB, BNN, NBB, NBN, NNB, NNN}

7.- Tenemos caramelos de fresa, naranja, limón y piña. Cogemos uno sin mirar y comprobamos su sabor

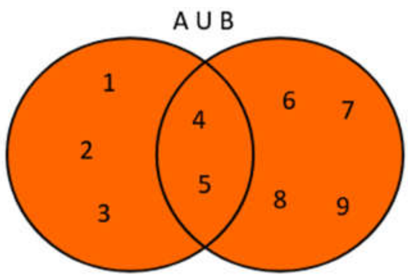
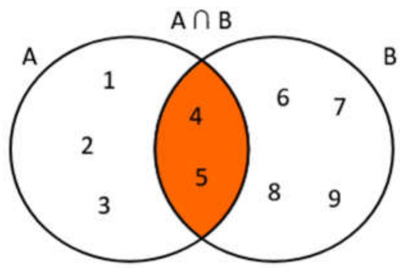
a) ¿Es una experiencia aleatoria?

Sí, porque no sabremos el sabor del caramelo hasta que metamos la mano y nos lo comamos.

b) Escribe el espacio muestral.

El espacio muestral es E = {Fresa, Naranja, Limón, Piña}

8.- Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} y B = {4, 5, 6, 7, 8, 9}, calcula la unión y la intersección utilizando los diagramas de Venn.

UNIÓN	INTERSECCIÓN
A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	A ∩ B = {4, 5}
	
La unión son todos los elementos de A y de B (sin repetir)	La intersección son los elementos que tienen en común A y B

12.12.- Autoevaluación

1. En un comedor preparan durante los 22 días lectivos de un mes los siguientes platos: 7 días arroz, 6 días pasta, 5 días legumbres y los demás días verdura. Calcula la probabilidad de que, al ir un día al azar al comedor:
   - a) Preparen legumbres o verdura.
   - b) No preparen arroz.
   - c) Preparen arroz y verdura.

2. En una bolsa hay 12 bolas numeradas del 1 al 12. Extraemos una bola al azar. ¿Qué probabilidad existe de que sea un número...?
   - a) Mayor o igual que 3 y menor que 9.
   - b) Impar y múltiplo de 3.
   - c) Par y múltiplo de 4.

3. En el lanzamiento de un dado, sean los sucesos:

   A = "Obtener un número impar"
   B = "Obtener un número primo menor que 5".

   Calcula: P(A), P(B) , P(A), P(B), P(A B) y P(A ∪ B). ¿Son sucesos incompatibles?

4. Sean P(A)=1/2 , P(B)=1/3 y P(A∩B)=1/5. Calcula P(A∪B), P(A'), P(B') y P(A'∪B').

5. Extraemos una carta de una baraja española. Sean los sucesos:
   A = "Ser oros " B = "Ser una fgura"
   C = "Ser copas o fgura" D = "Ser copas y fgura"
   - a) Calcula la probabilidad de cada suceso.
   - b) Interpreta los sucesos contrarios y calcula sus probabilidades.
   - c) ¿Son A y B incompatibles?

6. En una clase hay 28 niñas y 12 niños, de los cuales hay 10 niños con gafas y 20 niñas sin gafas. Calcula la probabilidad que tiene un alumno elegido al azar de:
   - a) Ser niño y no llevar gafas.
   - b) Ser una chica con gafas.
   - c) Tener gafas.

7. En una clase de 4º de ESO hay 15 personas, de las cuales 9 son chicos, y sabemos que 12 personas tienen móvil. Completa la tabla siguiente, sabiendo que la probabilidad de ser chica y no tener móvil es 1/5.

	Tiene Móvil	No tiene Móvil
HOMBRES		
MUJERES		

   Escogemos una persona al azar.
   - a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica?
   - b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico con móvil?

8. Inventa un experimento aleatorio e indica dos sucesos compatibles y dos incompatibles.

9. Dibuja diagramas de Venn, escribe números del 1 al 10 en sus uniones e intersecciones y pregunta a tus compañeros los elementos que se encuentran en la unión, la intersección y el contrario.

10. En un juego de construcciones hay 12 triángulos, 10 cuadrados, 8 rectángulos y 10 círculos. Se saca una figura al azar. ¿Cuál es la probabilidad de sacar cada una de las figuras? Si se sacan dos, ¿cuál es la probabilidad de sacar dos iguales?

11. En una bolsa hay 5 bolas verdes, 4 amarillas y 6 azules. Se saca una bola y resulta que es amarilla. Si no la volvemos a meter en la bolsa, ¿cuál es la probabilidad de sacar una segunda bola amarilla? ¿Y verde?

12. Un almacén recibe 50 cajas con camisas, de las cuales 12 cajas contienen camisas con algún defecto. Si cogemos una caja al azar, ¿cuál es la probabilidad de ser una caja con camisas en perfecto estado?

13. Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas de una ciudad, de forma que el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre la segunda y el 10% cubre el servicio de la tercera línea. Se sabe que la probabilidad de que, diariamente, un autobús se averíe es del 2%, 4% y 1%, respectivamente, para cada línea. Determina la probabilidad de que, en un día, un autobús sufra una avería.

14. Se lanzan dos monedas al aire. Si salen dos caras, se extrae una bola de una urna I, que contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Si sale cara y cruz, se extrae una bola de una urna II, que contiene 4 bolas blancas y 1 negra. Si salen dos cruces, se extrae una bola de una urna III, que contiene 3 bolas blancas y 2 negras. ¿Cuál es la probabilidad de extraer bola blanca después de lanzar las monedas y sacar la bola?

15. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral, de los que se conocen las probabilidades P(A)=0.60 y P(B)=0.25. Determine las probabilidades que deben asignarse a los sucesos A∪B y A∩B en cada uno de los siguientes supuestos: a) Si A y B fuesen incompatibles. b) Si A y B fueran independientes.

16. Se lanzan dos dados. Halla: a) la probabilidad de que una de las puntuaciones sea par y la otra impar, b) la probabilidad de que la suma de sus puntos sea múltiplo de 2.