

DISTINGUIR ENTRE EXPERIMENTO ALEATORIO Y DETERMINISTA

Nombre: Curso: Fecha: **EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y DETERMINISTAS**

- **Experimento determinista** es aquel que, una vez estudiado, podemos predecir, es decir, que sabemos lo que sucederá antes de que ocurra.

Por ejemplo:

- Si ponemos un recipiente con agua a calentar, sabemos que el agua hierve a 100 °C.
- Si un coche que va a 100 km/h tarda en hacer un trayecto 2 horas, tenemos la certeza de que ha recorrido 200 km.

Estos experimentos son deterministas.

- **Experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado no se puede predecir, es decir, que por muchas veces que repitamos el experimento en igualdad de condiciones, no se conoce el resultado que se va a obtener.

El lenguaje utilizado para expresar experimentos aleatorios está relacionado con situaciones de incertidumbre, ya que se trata de situaciones de azar: «es más probable, es igual de probable, es imposible, es poco probable, es más seguro, es improbable, es casi seguro...».

Por ejemplo:

- Si lanzamos un dado, no podemos predecir el número que saldrá.
- Cuando sacamos una bola de una caja que contiene bolas de diferentes colores, no podemos predecir el color que obtendremos.

ACTIVIDADES

- 1** Clasifica los siguientes experimentos. En el caso de que el experimento sea aleatorio, escribe un posible resultado.

Experimento	Determinista	Aleatorio	
Lanzar un dado		×	Sacar un 3
El resultado de dividir 10 entre 2	×		
En una caída libre de 5 metros, saber la velocidad que se alcanza			
Lanzar una moneda al aire			
Sacar una carta de una baraja española			
Saber la fecha de nacimiento de una persona			
Sacar una ficha roja de una caja donde hay 20 fichas rojas y 5 fichas azules			
Lanzar un dado y obtener una puntuación mayor que 5			
Saber el resultado de elevar un número al cuadrado			
Conocer el tiempo que va a hacer mañana			

OBTENER EL ESPACIO MUESTRAL DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO

Nombre: Curso: Fecha:

ESPACIO MUESTRAL

- El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa por E .
- Cada uno de los resultados posibles se denomina **suceso elemental**.

EJEMPLO

Determina el espacio muestral y sus sucesos elementales en estos experimentos.

Experimento	Espacio muestral	Sucesos elementales
Lanzar una moneda	$E = \{\text{cara, cruz}\}$	cara (c) y cruz (x)
Lanzar un dado	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	1, 2, 3, 4, 5 y 6

SUCESOS

Cada **suceso** está formado por uno o varios sucesos elementales.

- El **suceso seguro** está formado por todos los resultados posibles (sucesos elementales). Se verifica siempre.
- El **suceso imposible** no contiene ningún suceso elemental. Nunca se verifica.

EJEMPLO

En el experimento de lanzar un dado al aire determina un suceso seguro y uno imposible.

Un **suceso seguro** es obtener un número menor que 7.

Un **suceso imposible** es obtener el número 30.

ACTIVIDADES

- Con una baraja de cartas española, se realiza el experimento de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales que componen estos sucesos.
 - Sacar oros.
 - Sacar un 5.
 - Sacar figura.
 - Sacar bastos.
- Dadas ocho cartas numeradas del 1 al 8, se realiza el experimento aleatorio de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales que componen los siguientes sucesos.
 - Obtener número par.
 - Obtener múltiplo de 3.
 - Obtener número mayor que 4.

DETERMINAR LA UNIÓN E INTERSECCIÓN DE DOS SUCESOS

Nombre: Curso: Fecha:

OPERACIÓN CON SUCESOS

Una **operación entre sucesos** nos permite obtener otro suceso del mismo espacio muestral. Las dos operaciones de sucesos más importantes son la unión y la intersección.

- **Unión de sucesos:** la unión de dos sucesos A y B está formada por los elementos (sucesos elementales) del suceso A y del suceso B .

$$A \cup B = A \text{ unión } B$$

- **Intersección de sucesos:** la intersección de dos sucesos A y B está formada por los elementos (sucesos elementales) comunes de los sucesos A y B .

$$A \cap B = A \text{ intersección } B$$

- Si dos **sucesos** no tienen ningún suceso elemental en común, se dice que son **incompatibles**:

$$A \cap B = \emptyset$$

- Si dos **sucesos** tienen algún suceso elemental en común, se dice que son **compatibles**:

$$A \cap B \neq \emptyset$$

- Dado un suceso A , el **suceso contrario o complementario**, \bar{A} , está formado por los sucesos elementales del espacio muestral que no están en A .

EJEMPLO

En el experimento consistente en lanzar un dado, consideramos los sucesos:

$$A = \text{Obtener número menor que 4} = \{1, 2, 3\} \quad B = \text{Obtener número impar} = \{1, 3, 5\}$$

Calcula la unión e intersección de estos sucesos y escribe sus sucesos contrarios.

- Escribimos el suceso unión, formado por todos los sucesos elementales de A y B :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

- Escribimos el suceso intersección, formado por todos los sucesos elementales comunes de A y B :

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

- Escribimos el suceso contrario de A , formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral del experimento que no están en A :

$$\bar{A} = \{4, 5, 6\}$$

De la misma manera, el suceso contrario de B será:

$$\bar{B} = \{2, 4, 6\}$$

Vemos que la unión de un suceso y su contrario es siempre el espacio muestral.

ACTIVIDADES

- 1 Considera el experimento de lanzar un dado con ocho caras numeradas del 1 al 8 y los sucesos $A =$ Salir puntuación par y $B =$ Salir puntuación impar. Escribe el espacio muestral y obtén los siguientes sucesos.

a) $A \cup B =$

d) $\bar{B} =$

b) $A \cap B =$

e) $\bar{A} \cap B =$

c) $\bar{A} =$

f) $\bar{A} \cup B =$

DETERMINAR LA UNIÓN E INTERSECCIÓN DE DOS SUCESOS

Nombre: Curso: Fecha:

- 2 De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta y se consideran los siguientes sucesos.

A = Salir oros B = Salir un rey C = Salir un as D = No salir oros

Señala si los sucesos son compatibles, incompatibles o contrarios.

Suceso	Compatibilidad		Contrarios
	Compatibles	Incompatibles	
A y B			
A y C			
A y D			
B y C			

- 3 De una baraja española de 40 cartas hemos separado los ases y los reyes. Con este grupo de cartas realizamos el experimento de sacar dos cartas.

- Escribe el espacio muestral.
- Indica un suceso imposible de este experimento.
- ¿Cómo son los sucesos de sacar oros y sacar rey?
- ¿Qué sucesos componen la unión de los sucesos de sacar oros y sacar rey?
- ¿Qué sucesos elementales forman el suceso de sacar dos reyes?
- ¿Y el suceso de sacar oros?

- 4 En una caja hay ocho bolas, numeradas del 1 al 8. Escribe un suceso compatible, otro incompatible y otro contrario de estos sucesos.

Suceso	Compatible	Incompatible	Contrario
A = Sacar un número menor que 4			
B = Sacar un número impar			
C = Sacar múltiplo de 2			
D = Sacar múltiplo de 7			

OBTENER LA FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA DE UN SUCESO

Nombre: Curso: Fecha:

FRECUENCIAS ABSOLUTAS Y RELATIVAS

- **Frecuencia absoluta (f_i)** de un suceso es el número de veces que ocurre dicho suceso cuando se repite un experimento aleatorio n veces.
- **Frecuencia relativa (h_i)** de un suceso es el cociente de su frecuencia absoluta entre el número de veces que se repite el experimento: $h_i = \frac{f_i}{N}$.

EJEMPLO

Roberto ha lanzado un dado 50 veces, obteniendo los resultados de la tabla.

Cara	1	2	3	4	5	6	Suma
f_i	7	6	14	9	10	4	50
h_i	0,14	0,12	0,28	0,18	0,20	0,08	1

El número de veces que aparece cada cara es su frecuencia absoluta (f_i).

La frecuencia relativa la obtenemos dividiendo la frecuencia absoluta entre el número de veces que se repite el experimento.

ACTIVIDADES

- 1 En un bombo hay diez bolas numeradas del 0 al 9. Se repite 100 veces el experimento de extraer una bola y reemplazarla a continuación. Los resultados obtenidos se expresan en la tabla.

Bola	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma
f_i	7	13	11	12	8	10	12	6	10	11	100
h_i											

a) Completa la tabla calculando las frecuencias relativas.

b) Considera los sucesos y calcula.

A = múltiplo de 3

B = número impar

C = divisor de 6

- Frecuencia relativa de A , B y C :

$$A = \{3, 6, 9\}$$

$$h_A = h_3 + h_6 + h_9 =$$

$$B =$$

$$C =$$

- Frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ y $A \cap C$:

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$$

$$h_A = h_1 + h_3 + h_5 + h_6 + h_7 + h_9 =$$

$$A \cap B =$$

$$A \cup C =$$

$$A \cap C =$$

CALCULAR LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO

Nombre: Curso: Fecha:

PROBABILIDAD DE UN SUCESO

La **probabilidad de un suceso** es el número hacia el cual se aproxima la frecuencia relativa de ese suceso conforme aumenta el número de repeticiones de un experimento aleatorio.

EJEMPLO

Se lanza un dado de cuatro caras y se anotan las veces que aparece el número 1.

Lanzamientos	20	40	60	80	100
f_i	7	11	15	18	27
h_i	0,35	0,275	0,25	0,225	0,27

Al obtener la tabla de frecuencias relativas correspondiente a este experimento, se observa que el número hacia el cual se aproxima la frecuencia del suceso de aparecer el número 1 es 0,25.

Por tanto, la probabilidad de obtener número 1 al lanzar un dado de cuatro caras es $P = 0,25$.

ACTIVIDADES

- 1 Tira una moneda 25 veces y completa la tabla.

	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Cara			
Cruz			

¿Son las frecuencias relativas números próximos a 0,5? ¿Qué consecuencias obtienes de tus resultados?

REGLA DE LAPLACE

Cuando todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

Esta expresión es la regla de Laplace: $P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$

EJEMPLO

Se lanza un dado de seis caras al aire. El espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Calcula las siguientes probabilidades.

Suceso	Casos favorables	Casos posibles	$P = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$
Salir número par	{2, 4, 6}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Salir número menor que 5	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
Salir número par o menor que 5	{1, 2, 3, 4, 6}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{5}{6}$
Salir número par y 4	{4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{1}{6}$

CALCULAR LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO

Nombre: Curso: Fecha:

2 Se hacen quinielas con un dado que tiene tres caras con el 1, dos caras con la X y la otra cara con el 2. Si se lanza una vez el dado, calcula aplicando la regla de Laplace.

- a) El espacio muestral.
- b) La probabilidad de obtener 1.
- c) La probabilidad de obtener X.
- d) La probabilidad de obtener 2.

3 Una urna contiene 1 bola roja, 1 azul, 1 verde y 1 blanca. Si se sacan dos bolas a la vez, calcula.

- a) El espacio muestral.
- b) La probabilidad de que una bola sea blanca y la otra roja.
- c) La probabilidad de que las dos bolas sean rojas.
- d) La probabilidad de que ninguna de las dos bolas sea blanca.

4 Se saca una carta de una baraja española de 40 cartas. Halla la probabilidad de que salga:

- a) Un rey.
- b) Oros.
- c) Un 4 o un 6.
- d) El rey de oros.
- e) Una carta que no sea de copas.
- f) Una figura de bastos.
- g) Una carta que no sea figura.
- h) Una carta menor que 5.

5 En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres. Han tomado carne 16 hombres y 20 mujeres, y el resto ha tomado pescado. Fijándote en la tabla, y completando los datos que faltan, si elegimos una persona al azar, calcula:

	Carne	Pescado	Suma
Hombres	16		28
Mujeres	20		32
Suma	36		

- a) ¿Qué probabilidad hay de que sea hombre?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado pescado?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya tomado pescado?

6 Se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos. Obtén:

- a) El espacio muestral.
- b) La probabilidad de que la suma sea 3.
- c) La probabilidad de que la suma sea 7.
- d) La probabilidad de que la suma sea superior a 10.
- e) La probabilidad de que la suma sea 4 o 5.

APLICAR LAS PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

Nombre: Curso: Fecha:

- **La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es 1.**

Por ejemplo: en el lanzamiento de un dado, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

- La probabilidad de un suceso es un **número comprendido entre 0 y 1.**
- **La probabilidad del suceso seguro es 1 y la probabilidad del suceso imposible es 0.**
- Siendo A y B dos sucesos del espacio muestral E :

– Si son incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Por ejemplo, al lanzar un dado, dados los sucesos incompatibles $A = \text{Salir cara número primo}$ y $B = \text{Salir cara múltiplo de 4}$, la probabilidad de que ocurra uno de los dos es:

$$A = \{1, 3, 5\} \text{ y } B = \{4\} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

– Si son compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Por ejemplo, si al lanzar un dado tenemos los sucesos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{3, 6\} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

- La **probabilidad del suceso contrario** de A, \bar{A} , es: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Por ejemplo, si al lanzar un dado consideramos $A = \{3, 6\}$, entonces $\bar{A} = \{1, 2, 4, 5\} \rightarrow P(A) = \frac{2}{6} \quad P(\bar{A}) = \frac{4}{6}$

Se comprueba que: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \rightarrow \frac{4}{6} = 1 - \frac{2}{6}$

ACTIVIDADES

- 1** De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta al azar. Calcula estas probabilidades.

Suceso	Probabilidad	Suceso	Probabilidad
$A = \text{Sacar espadas}$	$P(A) =$	$D = \text{Sacar espadas o sota}$	$P(D) =$
$B = \text{Sacar sota}$	$P(B) =$	$E = \text{No sacar espadas}$	$P(E) =$
$C = \text{Sacar espadas y sota}$	$P(C) =$	$F = \text{No sacar sota}$	$P(F) =$

- 2** Una urna contiene 4 bolas blancas, 1 roja y 5 negras. Se considera el experimento de sacar una bola al azar. Calcula estas probabilidades.

Suceso	Probabilidad	Suceso	Probabilidad
$A = \text{Salir bola blanca}$	$P(A) =$	$D = \text{Salir bola que no sea roja}$	$P(D) =$
$B = \text{Salir bola roja}$	$P(B) =$	$E = \text{Salir bola verde}$	$P(E) =$
$C = \text{Salir bola que no sea negra}$	$P(C) =$	$F = \text{Salir bola blanca o negra}$	$P(F) =$

- 3** La probabilidad de un suceso es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?