Sistemas de ecuaciones

Ecuaciones lineales

Se llaman **ecuaciones lineales** a las ecuaciones en las que todas las incógnitas aparecen con grado 1; no están elevadas a ninguna potencia, ni bajo ningún radical, ni multiplicadas unas por otras.

Ecuación lineal
$3x+2y-4z=12$

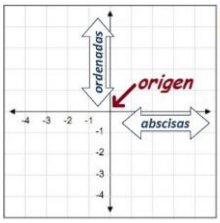
Ecuaciones que no son lineales		
$3x^2+2y=2$	$\sqrt{x}-y=76$	$x\cdot y=27$

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una ecuación de la forma **ax + by = c**, donde **x** e **y** son las incógnitas y **a**, **b** y **c** son números conocidos. Su **solución** es cualquier par de números, **(x, y)** uno para cada incógnita, que verifican la igualdad.

Dos **ecuaciones lineales** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Representación gráfica de una ecuación lineal

Para representar gráficamente una ecuación lineal despejamos la **y**, y damos valores a la **x**. Los resultados obtenidos se recogen, ordenados, en una **tabla de doble entrada** y después se representan en el plano cartesiano.



El **plano cartesiano** son dos ejes perpendiculares, uno horizontal, el eje x, también llamado **eje de abscisas** y un eje vertical, el eje y, también llamado **eje de ordenadas.** El punto donde se cruzan ambos ejes se denomina punto O, y se le denomina **Origen de coordenadas.**

Ejemplo: Representa las soluciones de la ecuación 3x + y =45

Lo primero es despejar la variable y:

$$y=45-3x$$

Después hacemos una tabla de doble entrada en la que vamos dando valores a la **x** y calculamos los valores de la **y**.

x	0	5	10	15	20	30
y	45	30	15	0	−15	−45

Una vez hecho esto se representan todos los puntos (x,y) en el plano cartesiano y, cómo podemos observar, quedan alineados en una recta que uniremos para obtener la recta de ecuación 3x + y =45

Por tanto, a la hora de hacer la representación gráfica de una ecuación, hemos de tener en cuenta que:

- Cada ecuación lineal tiene una recta asociada en el plano.
- Cada punto de esa recta representa una de las infinitas soluciones de la ecuación lineal.

Si la ecuación no fuera una **ecuación lineal**, su **representación** no sería una línea recta, sino una **curva parabólica o hiperbólica.**

Sistemas de ecuaciones lineales (S.E.L.)

Un **S.E.L de dos ecuaciones y dos incógnitas** es de la forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \qquad ejemplo: \begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-y=12 \end{cases}$$

Donde **a, b, d, e** son los **coeficientes** y **c** y **f** son los **términos independientes.**

La **solución** de un S.E.L. es un par de números **(x, y)** que hace ciertas (o que verifica) las dos ecuaciones lineales a la vez.

Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los valores de **x** e **y** para los que se cumplen las dos ecuaciones o concluir que el sistema no tiene solución.

En resumen, podemos clasificar los sistemas de ecuaciones lineales del siguiente modo:

Sistemas de ecuaciones lineales
- Compatibles
  - Determinado: (S.C.D.) – Solución única
  - Indeterminado: (S.C.I.) – ∞ Soluciones
- Incompatibles: (S.I.) – Sin solución

Métodos de Resolución de S.E.L.

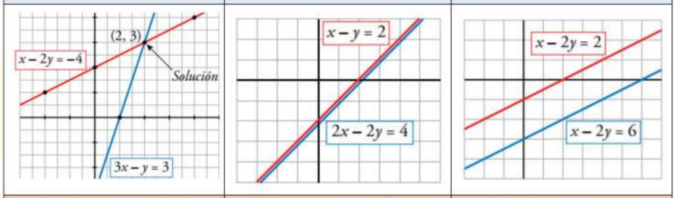
Existen cuatro métodos diferentes para resolver un sistema, uno de ellos gráfico y otros tres algebraicos.

Método Gráfico

El **método gráfico** consiste en representar las rectas de las dos ecuaciones en el mismo sistema de ejes cartesianos y el punto donde se corten será la solución del sistema.

Según sea su representación gráfica, podemos clasificar los sistemas de ecuaciones en:

S.C.D.	S.C.I.	S.I
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible
Con una solución	Infinitas soluciones	Sin solución
$\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x-y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y=2 \\ x-2y=6 \end{cases}$
Las rectas son secantes	Las rectas son coincidentes	Las rectas son paralelas



Para resolver un sistema por el **método gráfico:**

a) Despejamos la **y** en las dos ecuaciones.
b) Realizamos la tabla de valores de cada una de ellas.
c) Representamos gráficamente las dos ecuaciones.
d) El punto de corte de ambas rectas es la solución del sistema.

Ejemplo: Resuelve por el método gráfico $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

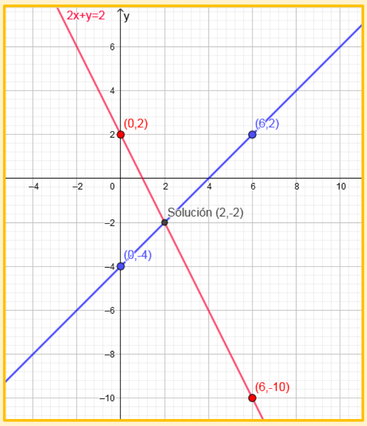
De la primera despejamos y: $y=x-4$, tomamos valores para x, los sustituimos y calculamos los valores de y:

x	0	2	4	6	8	10
y	−4	−2	0	2	4	6

Hacemos lo mismo con la segunda, despejamos y: $y=2-2x$

x	−2	0	2	4	6	8
y	6	2	−2	−6	−10	−14

Después representamos ambas rectas en el mismo plano



Método de Sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra.

Para resolver un sistema por el **método de sustitución:**

a) Despejamos de una de las ecuaciones una de las incógnitas.
b) Sustituimos su valor en la otra ecuación.
c) Resolvemos dicha ecuación y obtenemos el valor de una de las incógnitas.
d) Sustituimos este valor en la expresión del paso a) y obtenemos el valor de la otra incógnita.
e) Damos la solución identificando el tipo de sistema.

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución: $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones: $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

1	**Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.** (la que nos parezca más fácil de despejar)	De la ecuación (2) despejamos la y: $2x+y=2 \rightarrow y=2-2x$
2	**Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.**	En la ecuación (1) sustituimos la y por lo obtenido en el paso anterior: $x-y=4 \rightarrow x-(2-2x)=4$ $x-2+2x=4 \rightarrow 3x-2=4$
3	**Se resuelve esta ecuación.**	Resolvemos la ecuación obtenida: $3x-2=4 \rightarrow 3x=6 \rightarrow x=\frac{6}{3}=2$
4	**El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.**	Sustituimos en la ecuación (2) el valor obtenido para x, y obtenemos el valor de y: $y=2-2x \rightarrow y=2-2\cdot(2)=2-4=-2$
5	**Se ha obtenido, así, la solución. Es conveniente indicar cómo es el sistema.**	La solución del sistema es: $x=2 \quad y=-2 \rightarrow (x,y)=(2,-2)$ Por tanto, el sistema es: $S.C.D.\{x=2;\ y=-2\}$

Método de Reducción

El **método de reducción** consiste en preparar las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, pero con distinto signo. Sumando las ecuaciones resultantes, miembro a miembro, se obtiene otra ecuación con solo una incógnita (se ha reducido el número de incógnitas, de ahí su nombre).

Para resolver un sistema por el **método de reducción:**

a) Preparamos ambas ecuaciones multiplicándolas por los números que nos convenga, **normalmente la primera por el coeficiente de la x (o de la y) de la segunda y la segunda por el opuesto del coeficiente x (o el de la y) de la primera ecuación.**
b) Sumamos las dos ecuaciones y desaparece una de las incógnitas. (Reducción)
c) Resolvemos la ecuación resultante.
d) Sustituimos dicho valor en una de las dos ecuaciones, normalmente la más fácil y obtenemos el valor de la otra incógnita.
e) Damos la solución identificando el tipo de sistema.

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción: $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

1	**Elegimos la variable que queremos reducir (eliminar),** (la que nos parezca más fácil)	Vamos a reducir la x.
2	**Multiplicamos la ecuación (1) por el coeficiente x de la ecuación (2) y multiplicamos la ecuación (2) por el opuesto del coeficiente de la x en la ecuación (1).** (Siempre y cuando ambos coeficientes tengan el mismo signo. Si tuvieran distinto signo multiplicaríamos una por el coeficiente de la otra y viceversa)	Multiplicamos la ecuación (1) por 5, el coeficiente x de la ecuación (2), y la ecuación (2) por −2, el opuesto del coeficiente x de la ecuación (1), porque ambas tienen el mismo signo: $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5(2x-3y=9) \\ -2(5x+4y=11) \end{cases}$ Obteniendo: $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} 10x-15y=45 \\ -10x-8y=-22 \end{cases}$
3	**Se suman ambas ecuaciones y se obtiene una ecuación de primer grado.**	Se suman las dos ecuaciones para reducir la variable x: $\begin{array}{rrcr} \cancel{10x} & -15y & = & 45 \\ + \cancel{-10x} & -8y & = & -22 \\ \hline 0x & -23y & = & 23 \end{array}$
4	**Resolvemos la ecuación y obtenemos el valor de una de las incógnitas.** La que no hemos reducido.	Resolvemos la ecuación: $-23y=23 \rightarrow y=\frac{23}{-23}=-1$
5	**El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones del sistema y calculamos la otra incógnita.** La que nos resulte más sencilla.	En la ecuación (1), sustituimos y por −1: $2x-3y=9 \rightarrow 2x-3(-1)=9$ $2x+3=9 \rightarrow 2x=9-3 \rightarrow 2x=6$ $x=\frac{6}{2}=3$
6	**Se ha obtenido, así, la solución. Es conveniente indicar cómo es el sistema.**	La solución del sistema es: $x=3 \quad y=-1 \rightarrow (x,y)=(3,-1)$ Por tanto, el sistema es: $S.C.D.\{x=3;\ y=-1\}$

Método de Igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las dos expresiones resultantes.

Para resolver un sistema por el **método de igualación:**

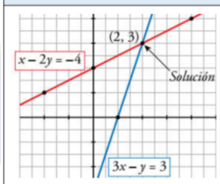
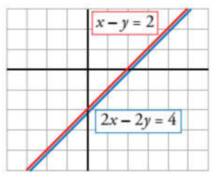
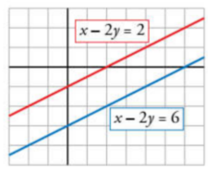
a) Despejamos la misma incógnita en cada una de las ecuaciones.
b) Igualamos ambas expresiones, lo cual da lugar a una ecuación de primer grado.
c) Resolvemos la ecuación, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
d) Sustituimos dicho valor en una de las dos expresiones obtenida en el paso a), normalmente la más fácil y obtenemos el valor de la otra incógnita.
e) Damos la solución identificando el tipo de sistema.

Cuando en un sistema multiplicamos alguna de las ecuaciones, o incluso ambas, por números, encontramos otro sistema, con la misma solución que el anterior. Por eso decimos que es un **sistema equivalente**.

Se dice que **dos sistemas de ecuaciones son equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero lo es también del segundo y, recíprocamente, cada solución del segundo es también solución del primero.

$$\underbrace{\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 5x+4y=11 \end{cases}}_{\text{Sistema 1}} \rightarrow \begin{cases} 5(2x-3y=9) \\ -2(5x+4y=11) \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{cases} 10x-15y=45 \\ -10x-8y=-22 \end{cases}}_{\text{Sistema 2}}$$

Los sistemas 1 y 2 son **sistemas equivalentes**, porque el segundo lo hemos conseguido multiplicando las ecuaciones del primero por 5 y por −2 respectivamente.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES		
S.C.D.	**S.C.I.**	**S.I**
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible
Con una solución	***Infinitas soluciones***	***Sin solución***
$\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x-y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y=2 \\ x-2y=6 \end{cases}$
		
Las rectas son secantes	Las rectas son coincidentes	Las rectas son paralelas
Manipulando las ecuaciones resolvemos el sistema y encontramos los valores de x e y.	Manipulando las ecuaciones llegamos a expresiones de la forma: $0x+0y=0 \rightarrow 0=0$	Manipulando las ecuaciones llegamos a expresiones: $0x+0y=k \rightarrow 0=k$

Resolución de problemas

Para resolver problemas es recomendable seguir los pasos:

a) Lectura y comprensión del enunciado.
b) Asignar la incógnita o incógnitas.
c) Establecer relaciones entre las variables del problema.
d) Plantear las ecuaciones o inecuaciones mediante el uso del lenguaje algebraico con la ayuda de tablas o croquis.
e) Resolver el sistema de ecuaciones (o inecuaciones) mediante alguno de los distintos métodos.
f) Analizar la solución obtenida con los datos del problema y verificarla.
g) Dar respuesta al problema en lenguaje cotidiano. (no x=15)

En un test de 50 preguntas, dan 0,8 puntos por cada acierto y quitan 0,4 puntos por cada error. Si Ana ha obtenido 22 puntos contestando a todas las preguntas, ¿cuántas ha contestado bien?

Si llamamos **x** a las preguntas acertadas e **y** a las preguntas erradas, podemos escribir dos ecuaciones lineales, una con las preguntas y otra con los puntos y plantear un sistema:

$$\begin{matrix}\text{1) Preguntas:}\\ \text{2) Puntuación:}\end{matrix}\begin{cases} x+y=50 \\ 0{,}8x-0{,}4y=22 \end{cases} \xrightarrow[\text{1) x 0,4}]{\text{Por reducción}} \begin{cases} 0{,}4x+0{,}4y=20 \\ 0{,}8x-0{,}4y=22 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{ambas ecuaciones}]{\text{Sumando}} 1{,}2x=42 \rightarrow x=\frac{42}{1{,}2}=35 \rightarrow de$$

$$x+y=50 \rightarrow 35+y=50 \rightarrow y=50-35=15$$

Por tanto, ha contestado bien a 35 preguntas y ha fallado 15.