Experimentos Aleatorios

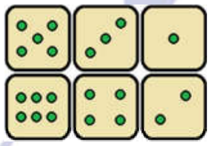
Un experimento es aleatorio cuando "Sabemos lo que puede ocurrir, pero no lo que va a ocurrir", como lanzar una moneda al aire, extraer un naipe de la baraja o lanzar un dado.

Un experimento es determinista si sabemos por adelantado el resultado que obtendremos.

Espacio Muestral (E)

El espacio muestral es el conjunto de todos los resultados que se pueden obtener en un experimento aleatorio.

Si lanzamos una moneda al aire, caben dos posibilidades C y +. El espacio muestral es: E = {C,+}	Al lanzar un dado caben seis posibilidades, 1,2,3,4,5 y 6: El espacio muestral es: E = {1,2,3,4,5,6}



Sucesos

Se llama suceso (o evento) a cualquier subconjunto del espacio muestral E. Los sucesos se simbolizan por las letras A, B, C....

Tipos de Sucesos

Sucesos Elementales: Formados por un solo elemento.

Por ejemplo, al lanzar una moneda, sucesos elementales son:

Suceso A: Obtener cara, A={C}, Suceso B: Obtener cruz, B={+}

Suceso Compuesto: Es un suceso formado por varios sucesos elementales.

Por ejemplo, al lanzar un dado, un suceso compuesto sería:

Suceso A: Obtener menos de 4, A={1,2,3}.

Suceso Seguro: Es el suceso que siempre ocurre, está formado por todos los sucesos elementales. Coincide con el espacio muestral.

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, un suceso seguro sería:

Suceso Seguro: Obtener menos de 7, A={1,2,3,4,5,6} = E.

Suceso Imposible: Es el suceso que nunca ocurre, se representa por ϕ. (Conjunto Vacío).

Por ejemplo, al lanzar un dado un suceso imposible sería obtener más de 6.

Suceso Imposible: Obtener más de 6

Suceso contrario u opuesto de A: Es el que se verifica para todos los resultados que no verifican A. Se simboliza por $\overline{A}$, por A^c y a veces también por A'.

Por ejemplo, al lanzar un dado, el suceso contrario de obtener número par A={2,4,6} es obtener número impar A^c={1,3,5}.

Si A = {2,4,6}, el Suceso Contrario: A^c = {1,3,5}.

Sucesos incompatibles o excluyentes: los sucesos A y B son incompatibles si su realización simultánea es imposible, es decir si no pueden ocurrir a la vez. En particular dos sucesos contrarios son incompatibles.

Dos sucesos son incompatibles si no tienen elementos en común.

$$A \cap B = \phi$$

Sucesos Compatibles: Los sucesos A y B son compatibles si su realización simultánea es posible.

Dos sucesos son compatibles si tienen elementos en común.

$$A \cap B \neq \phi$$

Por ejemplo, los sucesos A, Obtener número par, A={2,4,6} y B, obtener múltiplo de 3, B={3,6} son sucesos compatibles, porque tienen un elemento en común, el 6.

Operaciones con Sucesos

Dados dos sucesos A y B, llamamos:

Unión de dos sucesos A y B al suceso que se ocurre cuando al menos se realiza uno de ellos. Se simboliza por $A \cup B$.

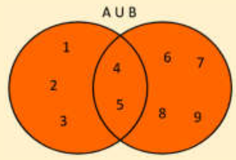
(Ocurre A o B) (Todos los elementos de A y de B)

Intersección de los sucesos A y B es el suceso que ocurre cuando se realizan los 2 de forma simultánea. Se simboliza por $A \cap B$

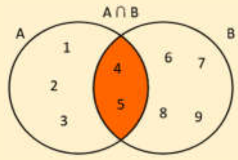
(Ocurren A y B) (Los elementos comunes de A y de B)

Ejemplo: Dados los sucesos A={1, 2, 3, 4, 5} y B={4, 5, 6, 7, 8, 9}, calcula la unión y la intersección de ambos, utilizando los diagramas de Venn.

UNIÓN	INTERSECCIÓN
A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	A ∩ B = {4, 5}



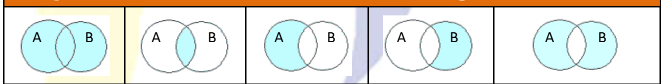
La unión son todos los elementos de A y de B (sin repetir)



La intersección son los elementos que tienen en común A y B

Para representar las relaciones lógicas entre sucesos, se utilizan los diagramas de Venn, que utilizan círculos superpuestos y permiten visualizar de forma sencilla los elementos que tienen en común o en cuáles difieren.

Operaciones con Sucesos mediante diagramas de Venn



Unión	Intersección	Diferencia	Diferencia	Diferencia Simétrica
$A \cup B$	$A \cap B$	$A-B$	$B-A$	$A \cup B - A \cap B$

Leyes de Morgan

El caso contrario de la unión es la intersección de los contrarios:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

El caso contrario de la intersección es la unión de los contrarios:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Probabilidad

La probabilidad, P, de un suceso A, es un número comprendido entre 0 y 1 que indica la posibilidad de que este ocurra y se representa por P(A) y se leerá probabilidad del suceso A, o simplemente probabilidad de A. Cuanto mayor sea la probabilidad, más fácil será que ocurra el suceso A.

De la definición de probabilidad se deducen las **siguientes propiedades:**

- Las probabilidades de dos sucesos contrarios suman uno:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

- Si P(A)=1, decimos que A es un suceso seguro. A siempre ocurre.
- Si P(A)=0, A es un suceso imposible.
- Para cualquier suceso A, $0 \leq P(A) \leq 1$
- Si los sucesos A y B son incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si los sucesos A y B son compatibles:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

De donde: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

Ejemplo: Sean A y B dos sucesos tales que: P(A)=0,3, P(B')=0,4 y P(AUB)=0,65. Calcula P(A'), P(B) y P(A∩B)

Sabiendo que las probabilidades de dos sucesos contratarlos suman 1, podemos calcular una en función de la otra:

$$P(A') = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \quad \rightarrow \quad P[\overline{A}] = 0{,}7$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6 \quad \rightarrow \quad P[B] = 0{,}6$$

Como son sucesos compatibles ya que $P(A \cap B) \neq P(A) + P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$$

$$= 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}65 = 0{,}25 \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = 0{,}25$$

Así que, P(A')=0,7; P(B)=0,6 y P(A∩B)=0,25

- Para dos sucesos cualesquiera A y B ocurre siempre que:

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$
$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$$
$$P(\text{alguno})=1-P(\text{ninguno})$$

Ejemplo: Dadas las siguientes probabilidades: P[A]=0,4; P[B]=0,7 y P[A' ∪ B'] = 0,8. Calcula a) P[(A∩B)'], b) P[A∩B] y c) P[A ∪ B].

Con ayuda de algunas de las fórmulas anteriores:

$$P\left[(A\cap B)'\right]=P\left[\overline{A\cap B}\right]=1-P\left[A\cap B\right]=$$
$$=P\left[\bar{A}\cup\bar{B}\right]=0{,}8 \quad\rightarrow\quad P\left[\overline{A\cap B}\right]=0{,}8$$
$$P\left[A\cap B\right]=1-P\left[\overline{A\cap B}\right]=1-0{,}8=0{,}2$$
$$\rightarrow\quad P\left[A\cap B\right]=0{,}2$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=0{,}4+0{,}7-0{,}2=0{,}9 \quad\rightarrow\quad P(A\cup B)=0{,}9$$

- Dos sucesos A y B son **independientes**, si el resultado de uno no influye en el resultado del otro. Matemáticamente:

$$P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$$

Ejemplo: Se consideran dos sucesos A y B asociados a un mismo experimento aleatorio. Si P(A)=0,8, P(B)=0,7 y P(A∪B)=0,94. a) ¿Son A y B sucesos independientes?; b) Calcula P(A'∪B')

Sabemos que dos sucesos son independientes si ocurre que:

$$P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$$

En nuestro caso, ocurre:

$$P(A)\cdot P(B)=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56 \quad\rightarrow\quad P(A)\cdot P(B)=0{,}56$$

Y, por otro lado:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=$$
$$0{,}8+0{,}7-0{,}94=0{,}56 \quad\rightarrow\quad P(A\cap B)=0{,}56$$

Si $P(A)\cdot P(B)=0{,}56=P(A\cap B)$, los A y B son independientes.

Ley de Laplace

- En una experiencia aleatoria en que todos los casos posibles son igualmente probables, la probabilidad de un suceso A es:

$$P(A)=\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo: En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída:

a) Sea un número de una sola cifra:

El resultado puede ser: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, por tanto:

$$P(A)=\frac{\text{N° de casos favorables}}{\text{N° de casos posibles}} \quad\rightarrow\quad P(A)=\frac{9}{49}=0{,}184$$

P (1 cifra) = 0,184

b) Sea un múltiplo de 7:

En este caso será: 7, 14, 21, 28, 35, 42 o 49, por tanto:

$$P(A)=\frac{\text{N° de casos favorables}}{\text{N° de casos posibles}} \quad\rightarrow\quad P(A)=\frac{7}{49}=\frac{1}{7}=0{,}143$$

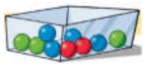
P (múltiplo de 7) = 0,143

Experimentos simples

- Un **experimento** es **simple** cuando se realiza una única acción, es decir, si no podemos descomponerlo en situaciones más simples. Por ejemplo, lanzar una moneda o extraer una bola de una bolsa opaca.
- Si se lanza al aire una moneda, puede salir cara (C) o cruz (+), por tanto, la probabilidad de obtener cara es la misma que de cruz.

$$\left.\begin{array}{l}E=\{C,+\}\\ A=\{C\}\end{array}\right\} \rightarrow P(C)=\frac{1}{2} \rightarrow P(Cara)=\frac{1}{2}$$

- Si en una urna hay 2 bolas rojas, 3 verdes y 4 azules. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola sea de color rojo?



$$\left.\begin{array}{l}E=\{2R,3V,4A\}\\ A=\{R\}\end{array}\right\} \rightarrow P(R)=\frac{2}{9} \rightarrow P(Roja)=\frac{2}{9}$$

- Un dado de quinielas tiene tres caras tienen el símbolo 1 (victoria local), dos caras tienen el símbolo X (empate) y una cara tiene el símbolo 2 (victoria visitante). Pues si lanzamos un dado de este tipo, calcula la probabilidad de sacar x.

$$\left.\begin{array}{l}E=\{1,1,1,x,x,2\}\\ A=\{x\}\end{array}\right\} \rightarrow P(x)=\frac{2}{6} \rightarrow P(empate)=\frac{1}{3}$$

Ejemplo: Se lanza al aire un dado con forma de octaedro y con las caras numeradas de 1 a l 8. ¿Cuál es la probabilidad de obtener múltiplo de 3?

Tenemos que el espacio muestral del dado es: E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8}

Y el suceso a estudiar A, es que el resultado obtenido sea múltiplo de 3: A= {3, 6}

La probabilidad, utilizando la fórmula de Laplace es:

$$P(\dot{3})=\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \quad\rightarrow\quad P(\dot{3})=\frac{1}{4}$$

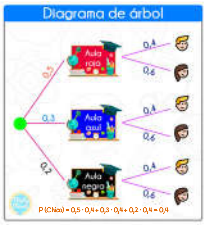
Por tanto, la probabilidad de obtener múltiplo de 3 es de 1/4.

Experimentos Compuestos

- Un **experimento compuesto** es el que está formado por varios experimentos simples, como, por ejemplo, lanzar un dado y según su valor, extraer una bola de un conjunto de urnas.

Para resolver ejercicios de este tipo, nos ayudaremos de los **diagramas en árbol**, que permiten representar de forma clara y ordenada los diferentes casos que pueden presentarse.

- Una **rama** es cada una de las fechas del diagrama. Siempre se escribe en ellas la probabilidad que corresponde a un experimento simple.



- Un **camino** es el conjunto de ramas que van desde el principio hasta el final.

Hay que tener en cuenta que:

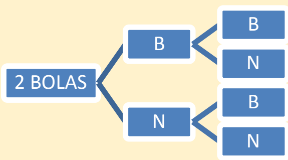
- **En cada nudo, la suma de las probabilidades** de todas las ramas que parten de él **es igual a uno.**
- **La probabilidad de cada suceso se calcula multiplicando las probabilidades de cada rama.**

Extracciones con devolución y sin devolución

- Cuando se extraen dos bolas de una urna, puede hacerse «con devolución» o «sin devolución». Si es **con devolución**, al extraer la segunda se vuelven a tener otra vez todas bolas en la urna, pero si es **sin devolución**, al extraer la segunda, faltará la que se ha sacado anteriormente. Si se extraen dos al mismo tiempo, es igual que hacer una extracción «sin devolución».

Ejemplo: Se tiene una urna con 15 bolas negras y 10 blancas, y se realizan dos extracciones sucesivas de una bola. Halla la probabilidad de que las dos bolas sean blancas: a) Con devolución.

Si la extracción es con devolución, el número de bolas es siempre 25:



En donde la probabilidad de blanca será P(B) = 10/25 = 2/5 y la probabilidad de negra es de P(N) = 15/25 = 3/5.

La probabilidad de que las dos sean blancas solo se consigue por la rama BB, así que, utilizando la propiedad de las ramas:

$$P(BB)=P(B)\cdot P(B)=\frac{10}{25}\cdot\frac{10}{25}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}=0{,}16$$

b) Sin devolución.

Si la extracción es sin devolución, el número de bolas en la urna durante la primera extracción es de 25 bolas, pero en la segunda solo será de 24. Ahora:

$$P(BB)=P(B)\cdot P(B)=\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}=\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{24}=\frac{18}{120}=\frac{3}{20}=0{,}15$$

Por tanto, con reposición, P=0,16 y sin reposición P=0,15