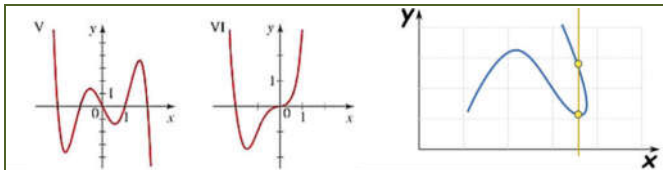


Función

Una **función** es una relación entre dos variables, x e y , de forma que, a cada valor de la **variable independiente**, x , le hace corresponder un único valor de la **variable dependiente**, y .

Se representa por: $y = f(x)$



Son funciones

Para cada valor de x existe un único de y

No es función

Para un x existen 2 valores de y .
Una línea cruza dos valores

La gráfica de una función nunca vuelve hacia atrás

Las funciones vienen dadas de diversas formas: mediante una **gráfica**, una **tabla de valores**, una **fórmula** o mediante un **enunciado**.

Características de una función

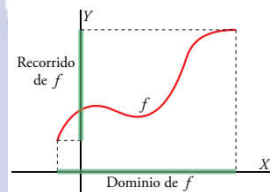
Hay ciertas características que permiten analizar y clasificar una función y que se refieren a los puntos especiales y a la forma y comportamiento de la curva.

Domínio y recorrido de una función

Llamamos **dominio de una función** a los valores de la variable independiente, x , para los que existe valor (o dibujo) de la variable dependiente, y .

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$$

Llamamos **recorrido de una función** a los valores que toma la variable dependiente.

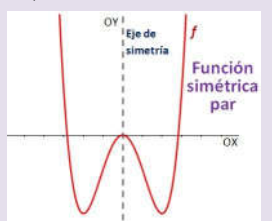


$$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x), x \in \text{Dom}(f)\}$$

Simetrías

Una **función f es simétrica** si al doblar su gráfica por un eje de simetría ésta se superpone (las dos ramas coinciden).

Una **función par** es una función simétrica respecto al eje de ordenadas OY . Es decir, si doblamos la gráfica por el eje de ordenadas, la gráfica se solaparía.

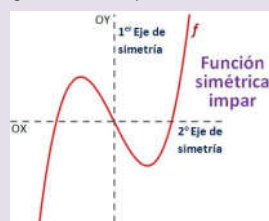


Función simétrica par

Una función **es par** si:

$$f(-x) = f(x)$$

Una **función impar** es una función simétrica respecto al origen O . Si doblamos la gráfica por el eje de ordenadas (OY) y después de nuevo por el eje de abscisas (OX), la gráfica se solaparía.



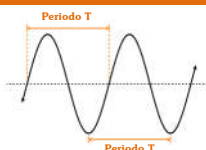
Función simétrica impar

Una función **es impar** si:

$$f(-x) = -f(x)$$

Periodicidad

Una **función periódica** es aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo de longitud, T , llamado **periodo**.

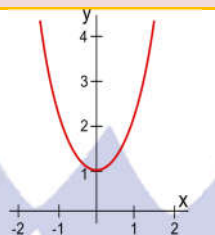


Continuidad

Una **función es continua** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, $f(x)$ es continua si puede dibujarse sin separar el lápiz de la hoja de papel. Si en algún punto la función no es continua, se suele decir que la función es continua excepto en el punto $x=a$ donde presenta una discontinuidad.

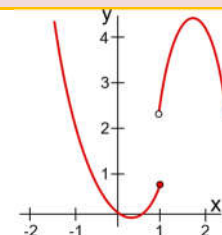
Cuando en un punto a los valores de la función por la izquierda y por la derecha no coinciden, se denomina **discontinuidad de salto**.

Función Continua



Función continua

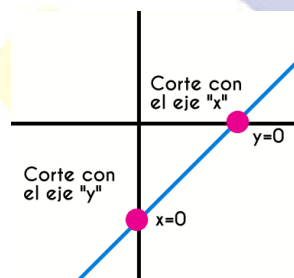
Función discontinua



Función continua en todo su dominio excepto en $x=1$ donde presenta una **discontinuidad de salto**

Cortes con los ejes

Llamamos **puntos de corte con los ejes** a los puntos donde la función $f(x)$ corta con los ejes de ordenadas y de abscisas.



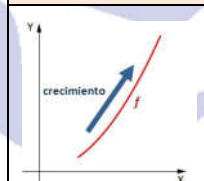
Con el eje x : Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen igualando la función a cero $f(x)=0$. Son de la forma $(a,0)$ y pueden existir varios puntos.

Con el eje y : El punto de corte con el eje de ordenadas si existe es único y se obtiene sustituyendo el cero en la función. Es de la forma $(0, f(0))$.

Monotonía: Crecimiento y decrecimiento

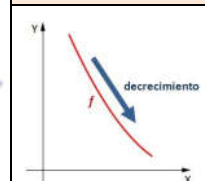
En la gráfica de una función, estudiar su **monotonía**, es ver si la función es **creciente**, **decreciente** o **constante**.

$f(x)$ es creciente



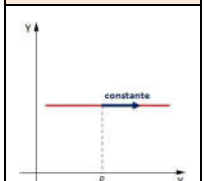
La gráfica va hacia arriba

$f(x)$ es decreciente



La gráfica va hacia abajo

$f(x)$ es constante

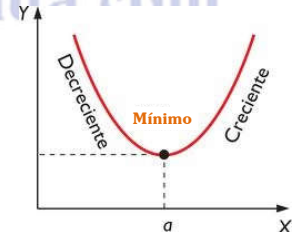
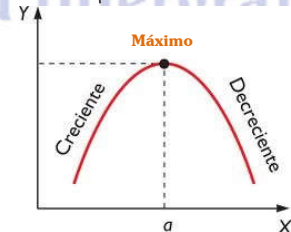


La gráfica es paralela a x

En general encontraremos que, una función no es siempre creciente o decreciente, sino que tendrá intervalos crecientes, intervalos decrecientes y otros constantes.

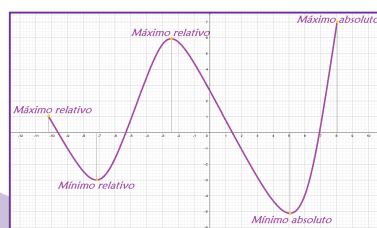
Máximos y mínimos

Diremos que una función $f(x)$ tiene un **máximo** en el punto $x=a$, si en dicho punto la función pasa de ser creciente a decreciente, y tiene un **mínimo** si la función pasa en ese mismo punto de ser decreciente a creciente.



Un punto $x=a$ de una gráfica es el **máximo absoluto**, si además de ser **máximo**, es el **punto más alto de la gráfica**, en caso contrario diremos que se trata de un **máximo relativo**.

De forma similar, es el **mínimo absoluto**, si además de ser **mínimo**, es el **punto más bajo de la gráfica**, en caso contrario diremos que se trata de un **mínimo relativo**.

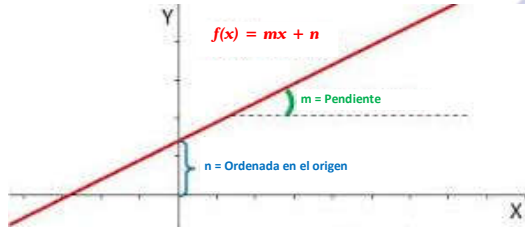


Funciones Lineales

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado cuya gráfica es una línea recta. Su expresión algebraica es de la forma:

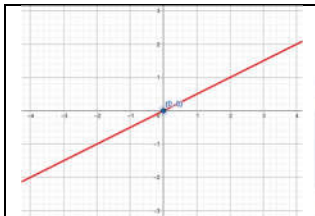
$$y = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = \text{Pendiente de la recta} \\ n = \text{Ordenada en el origen} \end{cases}$$

Donde **m** es la **pendiente** e indica la inclinación de la recta con respecto al eje x, y **n**, **ordenada en el origen** e indica el punto de corte con el eje y.



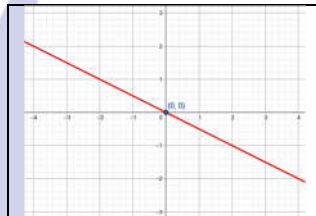
Funciones de proporcionalidad

En una función lineal, si $n=0$, la función queda de la forma $y=mx$ y se llaman **funciones de proporcionalidad**. Su gráfica es una línea recta que pasa por el Origen de coordenadas (0,0).



Si $m > 0$

Función Creciente



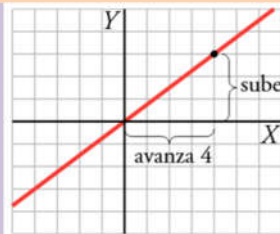
Si $m < 0$

Función Decreciente

Conocido un punto de la recta (x_0, y_0) diferente del origen de coordenadas, podemos calcular la pendiente despejándola de la expresión:

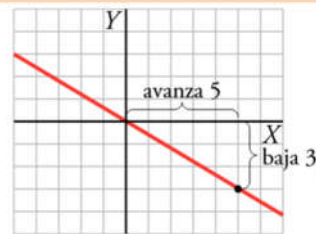
$$y = mx \rightarrow m = \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\text{Lo que sube (o baja)}}{\text{Lo que avanza}}$$

Ejemplo: Indica la ecuación de las siguientes funciones:



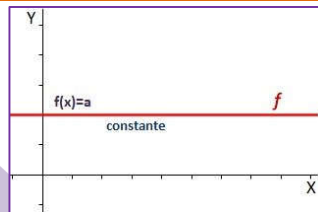
$$a) m = \frac{y}{x} = \frac{\text{Lo que sube}}{\text{Lo que avanza}} = \frac{3}{4} \rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

$$b) m = \frac{y}{x} = \frac{-\text{Lo que baja}}{\text{Lo que avanza}} = \frac{-3}{5} = -2 \rightarrow y = -\frac{3}{5}x$$



Función Constante

Se llama **función constante** a la función lineal que en la que el valor de y es siempre el mismo independientemente del valor de la x. Su pendiente es $m=0$, su ordenada en el origen es $(0,b)$ y su gráfica es paralela al eje x.



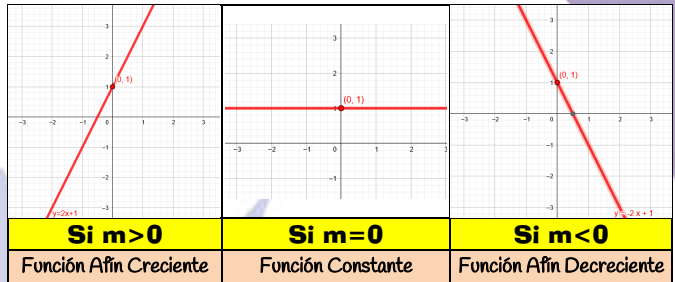
$$\text{Si } m = 0 \rightarrow y = mx + n = 0 \cdot x + n = n \rightarrow y = n$$

Función Afín

Se llama **función afín** a la función lineal donde m y n son no nulos.

$$\text{Si } \begin{cases} m \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \rightarrow y = mx + b \rightarrow \text{función afín}$$

Las funciones afines no pasan por el Origen (0,0).



Para representar la **gráfica** de una función lineal haremos lo mismo que hacíamos en el método gráfico de resolución de sistemas, despejamos y, hacemos la tabla de valores (x,y) , pintamos los puntos en un sistema cartesiano y los unimos con una regla.

Ecuaciones de la Recta

Existen distintas formas de escribir la ecuación de una recta:

$$y = mx + n$$

Forma Explícita

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Forma Punto - Pendiente

$$ax + by - c = 0$$

Forma General

Para calcular la ecuación de una recta necesitamos:

Dos puntos ó **Un punto y la pendiente**

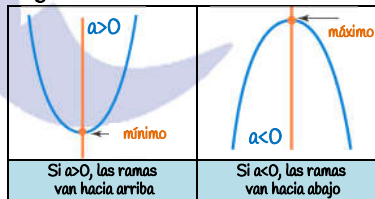
Conocidos dos puntos de una recta (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , podemos calcular la pendiente de la recta que los une calculando primero la m y luego la n:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Lo que sube (o baja)}}{\text{Lo que avanza}} \quad n = \text{Utilizamos un punto}$$

Funciones Cuadráticas

Las **funciones cuadráticas** son de la forma $y = ax^2 + bx + c$, se representan mediante parábolas con su eje de simetría paralelo al eje Y.

Según sea el coeficiente a:



Para representar una función cuadrática, lo primero es hallar el vértice de la parábola $V(x_v, y_v)$.

$$V_x = \frac{-b}{2a} \quad V_y = f(V_x)$$

Conocido V_x , la coordenada V_y se calculará sustituyendo el valor obtenido en la función original.

Después calcularemos los puntos de corte de la parábola con los ejes de coordenadas.

Puntos de corte $\begin{cases} \text{eje x:} & \text{hacemos } f(x) = 0 \\ \text{eje y:} & \text{calculamos } f(0) \end{cases}$

Ejemplo: Representa la función parabólica: $y = f(x) = x^2 + 2x - 8$
Empezamos calculando el vértice:

$$\begin{cases} V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2)}{2 \cdot 1} = -1 \\ V_y = f(V_x) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8 = 1 - 2 - 8 = -9 \end{cases} \rightarrow V = (-1, -9)$$

Después, calculamos los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje x: } f(x) = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \end{cases} \rightarrow (-4, 0) \text{ y } (2, 0)$$

$$\text{Eje y: } f(0) = (0)^2 + 2 \cdot (0) - 8 = -8$$

$$\rightarrow (0, -8)$$

La función corta con los ejes en los puntos:

$$A_1 = (-4, 0); A_2 = (2, 0); B = (0, -8)$$

Con estos puntos y el vértice, ya podemos dibujar la gráfica.

