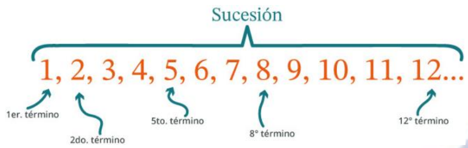
Sucesiones

Se llama **sucesión**, $\{a_n\}$, a un conjunto infinito de números dados ordenadamente de modo que se puedan numerar: primero, segundo, tercero....



Se representa por:

$$a_n = \{a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots\ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\}$$

A los elementos de una sucesión se les llaman **términos** y se suelen designar mediante una letra con un subíndice; $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$, donde el subíndice indica el lugar que ocupa en la sucesión.

Se llama **término general** de una sucesión {a}, y se simboliza con a_n, a la expresión algebraica que nos permite calcular cualquier término de la sucesión a partir del lugar que ocupa.

Ejemplo: Calcula el término general de la siguiente sucesión: $a_n = \{1, 5, 9, 13, 17, 21 \ldots\}$

En la sucesión $a_n=\{1, 5, 9, 13, 17, 21 \ldots\}$, nos damos cuenta que los términos van de 4 en 4, quiere esto decir que el término general, podría ser $a_n=4n$, pero si sustituimos n por los números naturales obtendríamos {4,8,12,16...} que, claramente, no coincide con la nuestra, aunque si comparamos término a término, observamos que 4 es 3 unidades mayor que 1, 8 también es 3 unidades mayor que 5, 12 es 3 unidades mayor que 9.... Luego los términos de nuestra sucesión son 3 unidades mayores que los de la sucesión original, por tanto, bastaría con restarle 3.

Con esto, el término general de la sucesión sería: $a_n=4n-3$, y ahora vemos que si coincide con la nuestra.

$$a_n = \{1,5,9,13,17,21\} = \{4n-3\} \begin{cases} a_1 = 4\cdot 1 - 3 = 4 - 3 = 1 \\ a_2 = 4\cdot 2 - 3 = 8 - 3 = 5 \\ a_3 = 4\cdot 3 - 3 = 12 - 3 = 9 \\ a_4 = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Una sucesión se llama **recurrente** si sus términos, a partir de uno dado, se obtienen a partir de los anteriores mediante una expresión algebraica, que se llama **Ley de Recurrencia**.

Ejemplos: Escribe el término general de la siguiente sucesión: $s_n = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$

Si nos fijamos, el tercer término, se obtiene sumando los dos anteriores, por tanto:

$$s_n = \{1,1,2,3,5,8,13,\ldots\} = \begin{cases} s_1 = 1 \\ s_2 = 1 \\ s_3 = 1+1 = 2 = s_2 + s_1 \\ s_4 = 2+1 = 3 = s_3 + s_2 \\ s_5 = 3+2 = 5 = s_4 + s_3 \end{cases} \quad \text{por tanto: } s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$$

Escribe los seis primeros términos de la sucesión $\{a_n\}$ dada por $a_1=2$, $a_2=3$ y donde $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

Si vamos paso a paso calculando cada uno de los términos, llegamos a:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \to \quad \begin{cases} a_1 = 2 \quad a_2 = 3 \\ a_3 = 3+2 = 5 \\ a_4 = 5+3 = 8 \\ a_5 = 8+5 = 13 \\ a_6 = 13+8 = 21 \end{cases} \quad \to \quad a_n = \{2,3,5,8,13,21\ldots\}$$

Progresiones

Las **progresiones** son sucesiones ordenadas de números, donde cada término se obtiene a partir del anterior mediante una regla constante, ya sea sumando, Progresión Aritmética, o multiplicando, Progresión Geométrica, una cantidad fija.

Son fundamentales para modelar crecimientos ya sean lineales o exponenciales, calcular intereses, o predecir patrones.

Progresiones Aritméticas	Progresiones Geométricas
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ... (+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3)	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... (x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2)
Cada término se obtiene sumando 3 al anterior	Cada término se obtiene multiplicando por 2 el anterior

Progresiones Aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término, excepto el primero, es igual al anterior sumando una cantidad fija (positiva o negativa), a la que llamamos **diferencia, d,** de la progresión.

$$\underbrace{a_1, a_2}_{+d}, \underbrace{a_3}_{+d}, \underbrace{a_4}_{+d}, \underbrace{a_5}_{+d}, \underbrace{a_6}_{+d}, \underbrace{a_7}_{+d}, \underbrace{a_8}_{+d}, \ldots, \underbrace{a_{n-1}, a_n}_{+d}$$

Su **término general** viene dado por la expresión: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

Donde a_1 es el primer término y d es la diferencia.

Ejemplo: Halla el término general de la progresión:

$a_n = \{12, 14, 16, 18, 17, 21 \ldots\}$

En esta progresión aritmética, podemos observar que la diferencia entre los términos es −2, porque para pasar de uno a otro restamos 2, d=−2. Además, sabemos que $a_1=12$, por tanto:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \quad \to \quad a_n = 12 + (n-1)\cdot(-2) \quad \to \quad a_n = 12 - 2n + 2$$

Agrupando, llegamos a que el término general es: $a_n = 14 - 2n$

La **suma, Sn, de los n primeros términos** de una progresión aritmética, la podemos calcular como la semisuma del primero y el último, multiplicado por el número de términos, es decir:

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$$

Ejemplo: Halla la suma de los 100 primeros múltiplos de 3.

La progresión de los múltiplos de tres es: $a_n = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots, 3n\}$ Sabemos que el primer término es el 3, la diferencia d=3 y que el término general es $a_n=3n$.

Para calcular la suma de los 100 primeros múltiplos de 3 necesitamos también el último, es decir a_{100}; y $a_{100}=3\cdot 100=300$

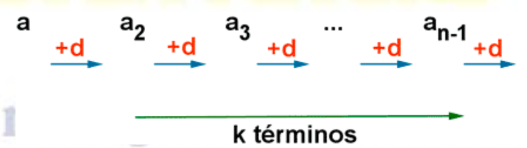
Con todo esto:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \xrightarrow{\text{de aquí:}} S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2}\cdot 100 = \frac{3+300}{2}\cdot 100 =$$

$$= 303\cdot 50 \quad \to \quad S_{100} = 15.150$$

Así que, los 100 primeros múltiplos de 3 suman 15.150.

Interpolar consiste en intercalar una cierta cantidad de términos, **k**, entre dos extremos fijos y dados **a** y **b**.



Siempre, los términos a interpolar junto con los dos extremos **formarán una progresión aritmética.** El problema de una interpolación aritmética consiste en **calcular la diferencia** de la progresión que se corresponde con **el cociente entre la diferencia de b y a y el número de términos, k, más uno.** La calcularemos mediante:

$$d = \frac{a_n - a_1}{k+1} \quad \to \quad d = \frac{b-a}{k+1}$$

Ejemplo: Interpolar cinco términos entre 1 y 25.

Hay que poner 5 términos entre 1 y 25 para que todos formen una P.A.

1, __, __, __, __, __, 25

Vamos a calcular la diferencia entre ellos:

$$d = \frac{a_7 - a_1}{n+1} = \frac{25-1}{6} = \frac{24}{6} = 4 \quad \to \quad d = 4$$

Con esto ya podemos calcular los términos que nos piden:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25

Progresiones Geométricas

- Una **progresión geométrica** es una sucesión cuyos términos se obtienen a partir del anterior multiplicándolo por una cantidad constante, **r**, llamada **razón**.

$$a_1 \xrightarrow{\cdot r} a_2 \xrightarrow{\cdot r} a_3 \xrightarrow{\cdot r} a_4 \xrightarrow{\cdot r} a_5 \xrightarrow{\cdot r} a_6 \xrightarrow{\cdot r} a_7 \xrightarrow{\cdot r} a_8, \ldots, a_{n-1} \xrightarrow{\cdot r} a_n$$

- Su **término general** viene dado por la expresión: $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$

Donde a_1 es el primer término y r es la razón.

Ejemplo: Halla el término general de la progresión:

$a_n = \{4, 12, 36, 108, \ldots\}$

En esta progresión geométrica, podemos observar que la razón es 3, r=3, porque para pasar de un término a otro multiplicamos por 3. Además, sabemos que $a_1=4$, por tanto:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} \quad \rightarrow \quad a_n = 4 \cdot 3^{(n-1)} \quad o \quad a_n = \frac{4}{3} \cdot 3^n$$

Calcula el término general de una progresión geométrica de razón r=4 y cuyo quinto término es $a_5=256$.

El término general de una P.G. viene dado por: $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$

Tenemos r, pero no tenemos a_1, así que, vamos a calcularlo con a_5:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} \quad \rightarrow \quad a_5 = a_1 \cdot 4^{(5-1)} \quad \rightarrow \quad a_5 = a_1 \cdot 4^4 \quad \rightarrow \quad a_5 = a_1 \cdot 256$$

Despejando a_1 y sustituyendo el valor de a_5:

$$a_5 = a_1 \cdot 256 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{a_5}{256} = \frac{256}{256} \quad \rightarrow \quad a_1 = 1$$

Así que, conocidos a_1 y r, ya podemos calcular el término general:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} \quad \rightarrow \quad a_n = 1 \cdot 4^{(n-1)} \quad \rightarrow \quad a_n = 4^{(n-1)}$$

Y HASTA AQUÍ ENTRA EN EL EXAMEN DE MAÑANA

En un test de 50 preguntas, dan 0,8 puntos por cada acierto y quitan 0,4 puntos por cada error. Si Ana ha obtenido 22 puntos contestando a todas las preguntas, ¿cuántas ha contestado bien?