

CONTINUIDAD

DOMINIO Y RECORRIDO

PUNTOS DE CORTE

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

SIMETRÍAS

PERIODICIDAD

# La gripe española

Salamanca, 1918. Dos enfermeras, una de ellas con evidentes signos de agotamiento, realizaban el cambio de turno en el hospital. La enfermera saliente, Carmen, le daba unas pautas a la inexperta enfermera que llegaba a relevarla.

–No te involucres personalmente con el paciente, no quieras saber ni su nombre, porque probablemente en pocos días habrá muerto.

–La gripe causaba estragos entre la población–. Observa los síntomas y si ves que el enfermo tiene los pies azules... no te entretengas y reza por su alma.

Tres años después, Ana, cuyo trabajo de voluntaria había concluido, leía en el periódico local las cifras oficiales de muertes por gripe en los últimos años.



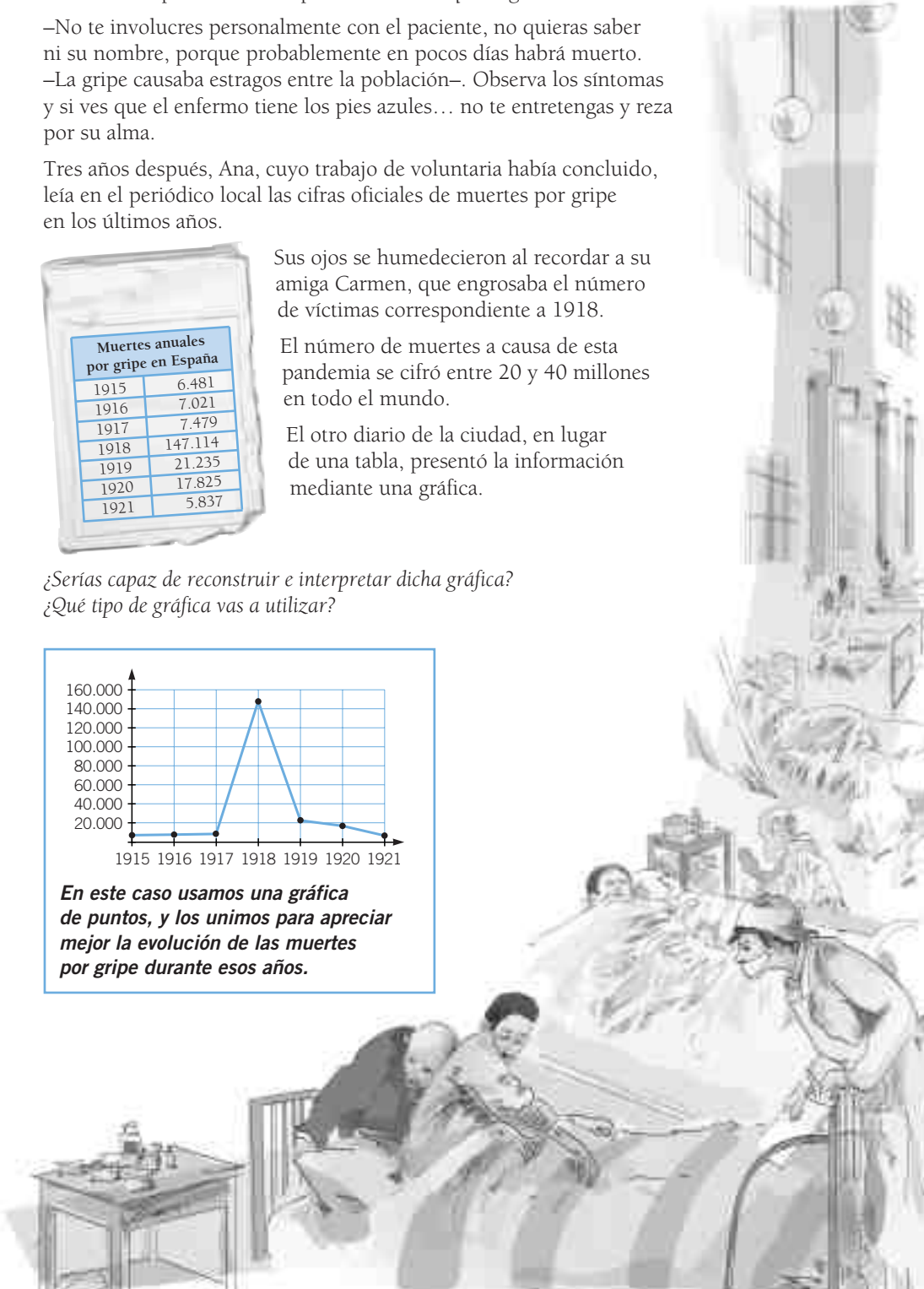
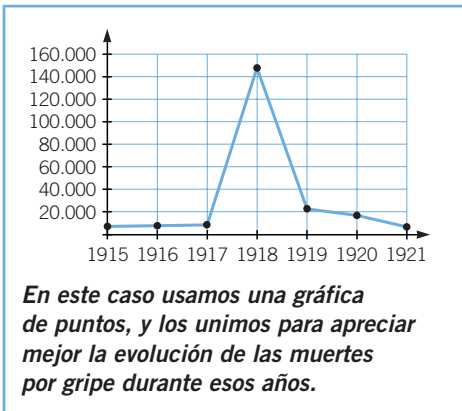
Muertes anuales por gripe en España	
1915	6.481
1916	7.021
1917	7.479
1918	147.114
1919	21.235
1920	17.825
1921	5.837

Sus ojos se humedecieron al recordar a su amiga Carmen, que engrosaba el número de víctimas correspondiente a 1918.

El número de muertes a causa de esta pandemia se cifró entre 20 y 40 millones en todo el mundo.

El otro diario de la ciudad, en lugar de una tabla, presentó la información mediante una gráfica.

¿Serías capaz de reconstruir e interpretar dicha gráfica?  
¿Qué tipo de gráfica vas a utilizar?



# Funciones

## EJERCICIOS

001

Di, razonando tu respuesta, si la relación entre los siguientes pares de magnitudes es o no una función.

- El peso de una persona y su altura.
- El peso de un barril y la cantidad de líquido que contiene.
- La longitud del lado de un polígono regular y su perímetro.
- La calificación en un examen y el número de horas empleadas en su estudio.
- El número de obreros y el tiempo que tardan en acabar un trabajo.
  - No, porque a un valor de altura le pueden corresponder diferentes valores de peso, y viceversa.
  - Sí, pues el peso del barril está en función del líquido contenido.
  - Sí, ya que para cada valor de lado tendremos un valor de perímetro.
  - No es necesariamente una función, porque puede ocurrir que salga mal el examen.
  - Sí, puesto que al aumentar el número de obreros disminuirá el tiempo que se tarda en finalizar el trabajo.

002

Dados los números 3, 5, 7 y 9, calcula para cada uno el número o números que les corresponden con estas relaciones, e indica cuáles son funciones.

- Su doble más 2.
- Sumarle una unidad y dividir el resultado entre 2.
- Su cuarta potencia.
- Su raíz cuadrada.

$$a) 3 \rightarrow 2 \cdot 3 + 2 = 8 \qquad 7 \rightarrow 2 \cdot 7 + 2 = 16$$

$$5 \rightarrow 2 \cdot 5 + 2 = 12 \qquad 9 \rightarrow 2 \cdot 9 + 2 = 20$$

$$b) 3 \rightarrow \frac{3+1}{2} = 2 \qquad 7 \rightarrow \frac{7+1}{2} = 4$$

$$5 \rightarrow \frac{5+1}{2} = 3 \qquad 9 \rightarrow \frac{9+1}{2} = 5$$

$$c) 3 \rightarrow 3^4 = 81 \qquad 7 \rightarrow 7^4 = 2.401$$

$$5 \rightarrow 5^4 = 625 \qquad 9 \rightarrow 9^4 = 6.561$$

$$d) 3 \rightarrow \pm\sqrt{3} \qquad 7 \rightarrow \pm\sqrt{7}$$

$$5 \rightarrow \pm\sqrt{5} \qquad 9 \rightarrow \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Son funciones las relaciones de los apartados a), b) y c).

003

Escribe dos relaciones que sean funciones y otras dos que no lo sean.

Ejemplo de relaciones que sean funciones:

- El coste de una llamada telefónica y su duración.
- El tiempo de descarga de un archivo en Internet y su tamaño.

Ejemplo de relaciones que no sean funciones:

- El número de alumnos en un aula y el número de aprobados.
- Los años de una persona y su peso.

**004** Expresa, mediante un enunciado, las siguientes funciones.

a)  $y = 2x - 1$

b)  $y = -x + 3$

a) Función que asocia a cada número su doble menos 1.

b) Función que asocia a cada número su opuesto más 3.

**005** Obtén la expresión algebraica de la función que asocia a cada número:

a) Su triple.

b) Su cuadrado.

c) Su doble más 5.

d) Su mitad.

a)  $y = 3x$

b)  $y = x^2$

c)  $y = 2x + 5$

d)  $y = \frac{x}{2}$

**006** Dada la función que asocia a cada número su cuarta parte más 3:

a) Escribe su expresión algebraica.

b) Calcula  $f(8)$ ,  $f(-4)$  y  $f(10)$ .

a)  $y = f(x) = \frac{x}{4} + 3$

b)  $f(8) = \frac{8}{4} + 3 = 5$

$f(-4) = \frac{-4}{4} + 3 = 2$

$f(10) = \frac{10}{4} + 3 = \frac{10 + 12}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$

**007** Piensa en una función de la que no puedas hallar su expresión algebraica.

La función que asocia el DNI de una persona y su estatura en centímetros.

**008** Halla una tabla de valores para las siguientes funciones, exprésalas mediante un enunciado y obtén su representación gráfica.

a)  $y = x + 2$

e)  $y = -3x - 1$

b)  $y = 2x + 3$

f)  $y = x^2 + 1$

c)  $y = x^2$

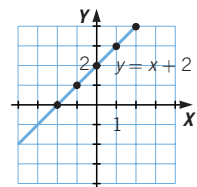
g)  $y = 4x - 4$

d)  $y = x^2 + x$

h)  $y = -x$

a) Función que asocia a cada número ese número más 2.

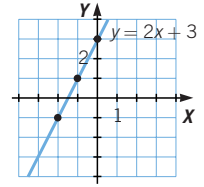
$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	0	1	2	3	4



# Funciones

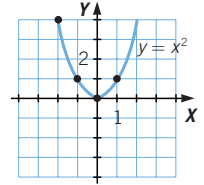
b) Función que asocia a cada número su doble más 3.

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	-1	1	3	5	7



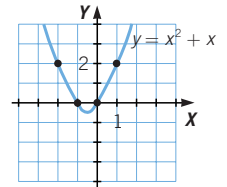
c) Función que asocia a cada número su cuadrado.

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	4	1	0	1	4



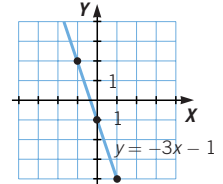
d) Función que asocia a cada número su cuadrado más el propio número.

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	2	0	0	2	6



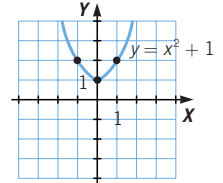
e) Función que asocia a cada número el triple de su opuesto menos 1.

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	5	2	-1	-4	-7



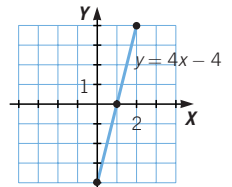
f) Función que asocia a cada número su cuadrado más 1.

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	5	2	1	2	5



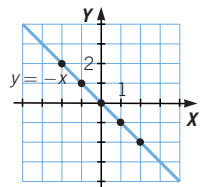
g) Función que asocia a cada número su cuádruple menos 4.

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	-12	-8	-4	0	4



h) Función que asocia a cada número su opuesto.

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>y</b>	2	1	0	-1	-2



**009** Un punto pertenece a la gráfica de una función si sus coordenadas verifican su ecuación. ¿Pertenece  $(-1, 2)$  y  $(0, -1)$  a  $y = -2x$ ?

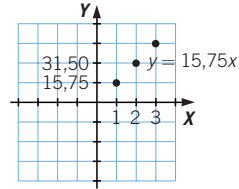
$(-1, 2) \rightarrow 2 = -2 \cdot (-1) \rightarrow$  Sí pertenece.

$(0, -1) \rightarrow -1 \neq -2 \cdot 0 \rightarrow$  No pertenece.

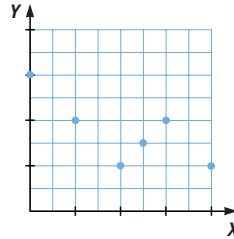
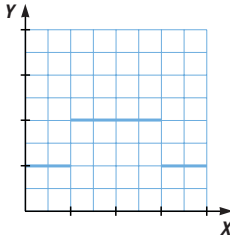
**010** El precio de una entrada es 15,75 €. Expresa esta función mediante una ecuación, una tabla y una gráfica.

$y = 15,75x$

$x$	0	1	2	3
$y$	0	15,75	31,50	47,25



**011** Razona cómo serían las variables que relacionan las siguientes gráficas.

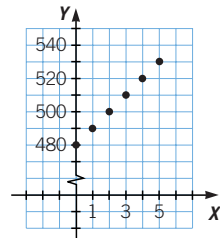


La primera gráfica es escalonada, ya que la variable  $x$  es continua y la variable  $y$  es discreta.

La segunda gráfica es discreta, porque está formada por puntos aislados.

**012** Un vendedor de muebles tiene un sueldo fijo de 480 € y, por cada mueble que vende, cobra 10 € de comisión. Dibuja la gráfica que expresa la ganancia en función del número de muebles vendidos.

Es una función discontinua, pues la variable del número de muebles es discreta y no continua, ya que solo puede tomar valores enteros.



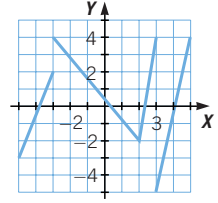
**013** Pon un ejemplo de función cuya gráfica sea discreta, y otro, con una gráfica escalonada.

- Ejemplo de gráfica discreta: número de goles metidos en una jornada de liga respecto al número de jornada.
- Ejemplo de gráfica escalonada: el coste de una llamada de teléfono respecto a su duración (tarificación por minutos).

# Funciones

**014** Estudia la continuidad de la función con la siguiente gráfica. Indica, si los tiene, sus puntos de discontinuidad.

La función tiene dos puntos de discontinuidad, en  $x = -3$  y en  $x = 3$ , en los cuales presenta un salto.



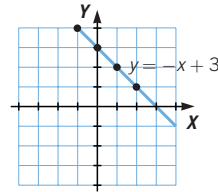
**015** Dadas las funciones  $y = -x + 3$  e  $y = x^2$ :

- Forma las tablas de valores.
- Representa las funciones.
- Estudia su continuidad.

$$y = -x + 3$$

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	5	4	3	2	1

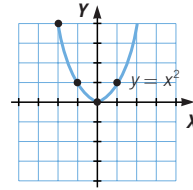
La función  $f(x) = -x + 3$  es continua.



$$y = x^2$$

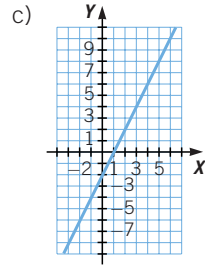
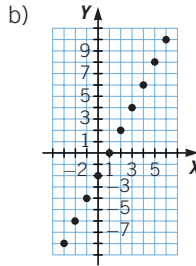
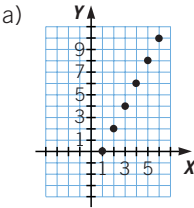
$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	4	1	0	1	4

La función  $f(x) = x^2$  es continua.



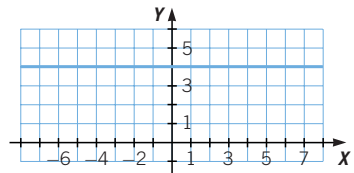
**016** Dibuja las gráficas de estas funciones.

- A cada número natural le hacemos corresponder su doble menos 2.
- A cada número entero le hacemos corresponder su doble menos 2.
- A cada número real le hacemos corresponder su doble menos 2.



**017** Estudia la continuidad de la función que a cada número real le hace corresponder el número 4.

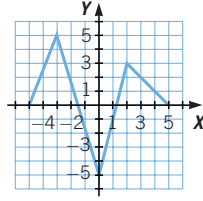
Es una función continua, pues se puede dibujar de un solo trazo.



018 Determina el dominio y recorrido de la función.

$$\text{Dom } f = [-5, 5]$$

$$\text{Im } f = [-5, 5]$$



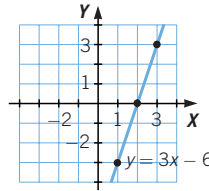
019 Dada la función que asocia a cada número real su triple menos 6, obtén:

a) Su expresión algebraica.

b) Su dominio, recorrido y gráfica.

$$\text{a) } y = 3x - 6$$

$$\text{b) } \text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}$$



020 Considerando la función que asocia a cada número real su inverso más 3:

a) Escribe su expresión algebraica.

b) Obtén su dominio y recorrido.

c) ¿Cuál es la imagen de 2?

(Recuerda que no se puede dividir entre 0.)

$$\text{a) } y = \frac{1}{x} + 3$$

$$\text{b) } \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}; \text{Im } f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\text{c) } f(2) = \frac{1}{2} + 3 = 3,5$$

021 Representa la función que a cada número real le hace corresponder  $-1$  si el número es negativo y  $+1$  si es positivo.

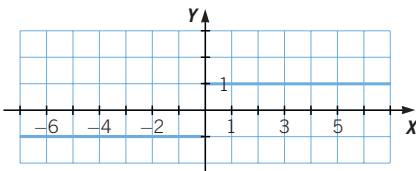
a) ¿Cuál es la imagen de 2? ¿Y de  $-2$ ?

b) Dibuja su gráfica.

c) Determina su dominio y recorrido.

$$\text{a) } f(2) = 1; f(-2) = -1$$

b)



c)  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$ , porque 0 no es un número positivo ni negativo;  
 $\text{Im } f = \{-1, 1\}$ , pues solo toma dos valores: 1 y  $-1$ .



# Funciones

**022 Representa las siguientes funciones y halla sus puntos de corte con los ejes.**

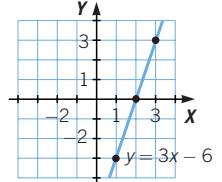
a)  $y = 3x - 6$       b)  $y = x + 1$       c)  $y = -2x$       d)  $y = x^2 - 2$

a) Punto de corte con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow 3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$$

Punto de corte con el eje Y:

$$x = 0 \rightarrow y = 3 \cdot 0 - 6 = -6 \rightarrow (0, -6)$$

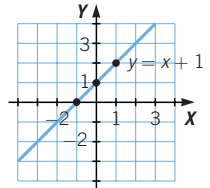


b) Punto de corte con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 0)$$

Punto de corte con el eje Y:

$$x = 0 \rightarrow y = 0 + 1 = 1 \rightarrow (0, 1)$$

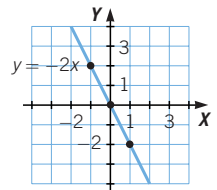


c) Punto de corte con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Punto de corte con el eje Y:

$$x = 0 \rightarrow y = -2 \cdot 0 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$$

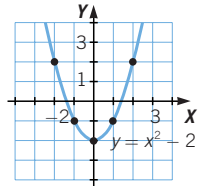


d) Puntos de corte con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \left\langle \begin{array}{l} (+\sqrt{2}, 0) \\ (-\sqrt{2}, 0) \end{array} \right.$$

Punto de corte con el eje Y:

$$x = 0 \rightarrow y = 0^2 - 2 = -2 \rightarrow (0, -2)$$



**023 La función  $y = x^2 - 5x + 6$ , ¿en qué puntos corta a los ejes?**

Puntos de corte con el eje X:

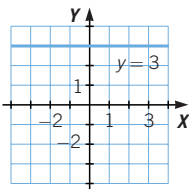
$$y = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right.$$

Los puntos de corte son (3, 0) y (2, 0).

Punto de corte con el eje Y:

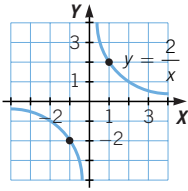
$$x = 0 \rightarrow y = 0 - 5 \cdot 0 + 6 = 6 \rightarrow (0, 6)$$

**024 Representa la función  $y = 3$ . ¿Qué observas? ¿En qué puntos corta a los ejes?**



Es una recta paralela al eje X, que corta al eje Y en el punto (0, 3).

- 025 Dada la función  $y = \frac{2}{x}$ , di en qué puntos corta a los ejes.



Puntos de corte con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow \frac{2}{0} = 0 \rightarrow \text{No tiene solución, no lo corta.}$$

Puntos de corte con el eje Y:

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{2}{0} \rightarrow \text{No está definido, no lo corta.}$$

- 026 La función  $y = 5x$ , ¿en qué punto corta al eje Y?

¿Y la función  $y = 5x + 1$ ?

¿Y la función  $y = 5x - 2$ ?

Con los resultados anteriores, ¿en qué punto crees que cortará al eje Y la función  $y = 5x - 7$ ?

Puntos de corte con el eje Y:

$$x = 0 \rightarrow y = 5 \cdot 0 = 0 \longrightarrow (0, 0)$$

$$x = 0 \rightarrow y = 5 \cdot 0 + 1 = 1 \longrightarrow (0, 1)$$

$$x = 0 \rightarrow y = 5 \cdot 0 - 2 = -2 \longrightarrow (0, -2)$$

La función  $y = 5x - 7$  cortará al eje Y en el punto  $(0, -7)$ .

- 027 ¿Cuántos puntos de corte puede tener una función con el eje Y? ¿Y con el eje X?

En el eje Y una función solo puede cortar una vez, ya que si no ocurriera así el 0 tendría más de una imagen.

En el eje X puede cortar infinitas veces.

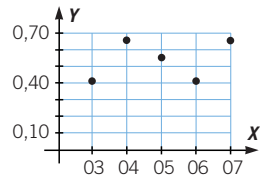
- 028 Observa los precios (en euros) del kilogramo de patatas en el período 2003-2007. Representa los datos en una gráfica y analiza su crecimiento y decrecimiento.

Año	2003	2004	2005	2006	2007
Precio	0,51	0,65	0,57	0,49	0,64

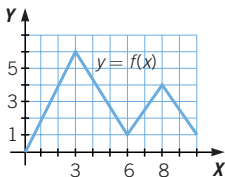
Es creciente en (2003, 2004)

y (2006, 2007).

Es decreciente en (2004, 2006).



- 029 Dibuja la gráfica de una función que sea creciente en los intervalos  $(0, 3)$  y  $(6, 8)$  y decreciente en  $(3, 6)$  y  $(8, 10)$ .



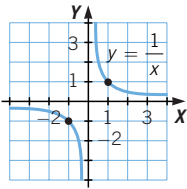
# Funciones

**030** La siguiente tabla muestra las ventas de coches durante los cinco primeros meses del año. Sin representar los datos, analiza su crecimiento y decrecimiento.

Mes	E	F	M	A	M
Ventas	2.000	1.875	1.690	1.600	1.540

Es decreciente en todo el dominio presentado en la tabla (desde enero hasta mayo).

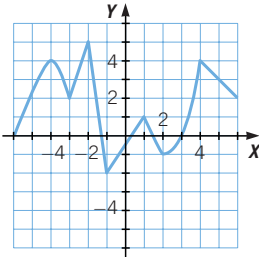
**031** Representa gráficamente la función  $y = \frac{1}{x}$ , y analiza su crecimiento y decrecimiento. ¿Es constante en algún tramo?



Es decreciente en sus dos ramas, y se trata de una hipérbola.

No es constante en ningún tramo.

**032** Determina los máximos y mínimos de la función.



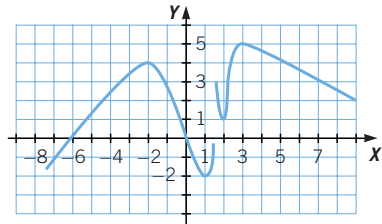
La función tiene mínimos en los puntos de abscisa  $x = -3, -1$  y  $2$ .

En  $x = -1$  hay un mínimo absoluto, siendo los otros dos relativos.

La función tiene máximos en los puntos de abscisa  $x = -4, -2, 1$  y  $4$ .

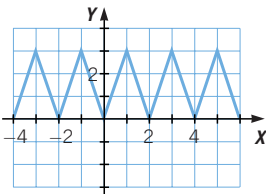
En  $x = -2$  hay un máximo absoluto, siendo los otros tres relativos.

**033** Dibuja una función que tenga máximos en  $x = -2$  y  $x = 3$  y mínimos en  $x = 1$  y  $x = 2$ .

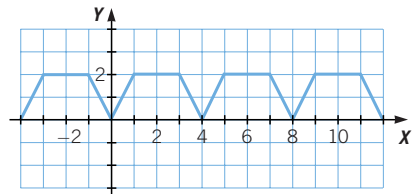


**034** Dibuja una función de período 2 y otra de período 4.

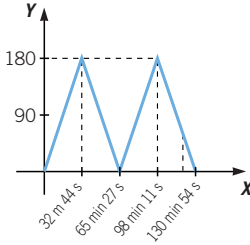
Con período 2:



Con período 4:



**035** Dibuja la gráfica de la función que mide el ángulo formado por las manecillas del reloj desde las 0:00 hasta las 2:00 horas. ¿Cuáles son los máximos y los mínimos?

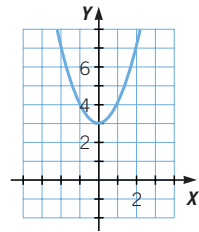


Suponiendo que tomamos el ángulo agudo que forman, los máximos se sitúan aproximadamente en las 0:30 h (0 h 32 min 44 s) y en las 1:35 h (1 h 38 min 11 s), y el mínimo en las 1:05 h.

**036** Representa gráficamente la función dada mediante esta tabla de valores. ¿Es una función simétrica?

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	7	4	3	4	7	...

Es una función simétrica respecto del eje Y.



**037** Analiza las simetrías de estas funciones.

- a)  $y = 4$                       b)  $y = x^4$                       c)  $y = x^3$

a)  $\left. \begin{matrix} f(x) = 4 \\ f(-x) = 4 \end{matrix} \right\} f(-x) = f(x) \rightarrow$  Función par

b)  $\left. \begin{matrix} f(x) = x^4 \\ f(-x) = (-x)^4 = x^4 \end{matrix} \right\} f(-x) = f(x) \rightarrow$  Función par

c)  $\left. \begin{matrix} f(x) = x^3 \\ f(-x) = (-x)^3 = -x^3 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} f(-x) \neq f(x) \rightarrow \\ f(-x) = -f(x) \rightarrow \end{matrix}$  Función no par / Función impar

**038** Una función, ¿puede ser simétrica respecto del eje X? Razona tu respuesta.

No es posible, porque cada valor de X tendría dos imágenes y entonces no sería una función.

### ACTIVIDADES

**039** De estas relaciones, señala las que representan una función. Razona tu respuesta.

- a) Un número positivo y su raíz cuadrada.
- b) Un número positivo y su raíz cúbica.
- c) Un número negativo y su valor absoluto.
- d) El número de lados de la base de una pirámide y su número total de aristas.
  - a) Es correspondencia. Un número positivo tiene una raíz positiva y otra negativa.
  - b) Es función. Un número solo tiene una raíz cúbica.
  - c) Es función. Cada número negativo tiene un valor absoluto, que es el mismo número cambiado de signo.
  - d) Es función. El número de aristas es el doble que el número de lados, y a cada número de lados le corresponde un único número de aristas.

# Funciones

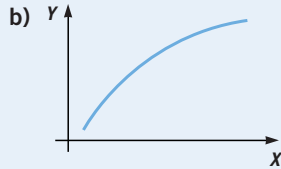
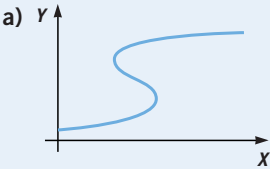
**040** Escribe tres ejemplos de funciones y señala cuál es cada variable.

- Velocidad de un automóvil y tiempo que tarda en recorrer 100 km.
- Divisores de un número entero; variable  $x$ : número entero,  $y$ : divisores.
- Altura de una nube y tiempo que tarda en caer una gota de lluvia.

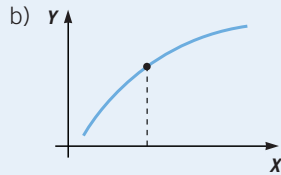
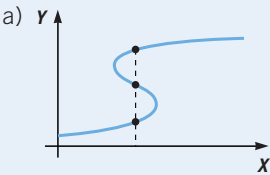
**041** HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE IDENTIFICA UNA FUNCIÓN MEDIANTE SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA?

Indica si estas gráficas son funciones o no.



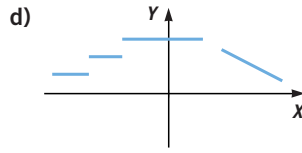
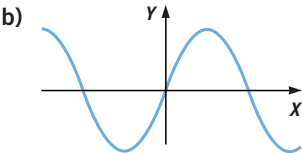
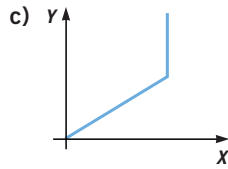
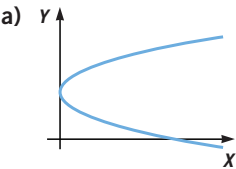
**PRIMERO.** Se determina si a algún valor de  $x$  le corresponde más de un valor de  $y$ .



**SEGUNDO.** Si ocurre así, la gráfica no corresponde a una función. En caso contrario, sí corresponde a una función.

Por tanto, b) es función y a) no lo es.

**042** Indica cuáles son funciones y cuáles no.



- a) No es función.
- b) Sí es función.
- c) No es función.
- d) Sí es función.

**043** Escribe la expresión algebraica de la relación que existe entre las siguientes magnitudes.

- a) El radio de una circunferencia y su longitud.
- b) El radio de una esfera y su volumen.
- c) El área de un círculo y su radio.

a)  $y = 2\pi x$                       b)  $y = \frac{4}{3}\pi x^3$                       c)  $y = \pi x^2$

**044** Dada la función que asocia a cada número el inverso de la suma de ese número más 5:

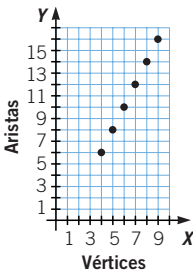
- a) Determina su expresión algebraica.
- b) ¿Existe valor de la función para  $x = -2$ ?

a)  $y = \frac{1}{x + 5}$   
 b) Sí,  $y = \frac{1}{3}$

**045** La relación existente entre el número de vértices de una pirámide y su número de aristas.

- a) ¿Es una función? Construye una tabla de valores y represéntala gráficamente.
- b) ¿Es posible establecer una expresión algebraica que represente la función?

a) Sí, es una función.

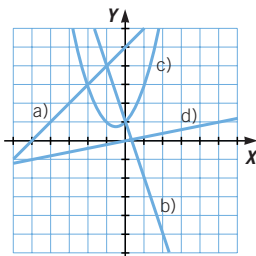


Vértices	4	5	6	7	8	9	...
Aristas	6	8	10	12	14	16	...

b)  $y = 2(x - 1)$ , para  $x \geq 4$ .

**046** Expresa, de todas las maneras posibles, las siguientes funciones.

- a)  $y = x + 5$                       b)  $y = -3x + 1$                       c)  $y = x^2 + x + 1$                       d)  $y = \frac{x}{5}$



Se recomienda practicar en común la expresión de una función de distintas formas con los ejemplos de esta actividad, que abarcan los tipos de funciones más habituales.

# Funciones

047

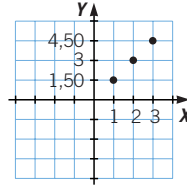


Una bolsa de patatas fritas cuesta 1,50 €. Expresa algebraicamente la función *Número de bolsas–Precio*, construye una tabla de valores y realiza su gráfica.



<b>x</b>	0	1	2	3
<b>y</b>	0	1,50	3	4,50

$$y = 1,50x$$



048

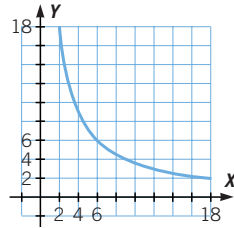


Haz una tabla de valores con el largo y el ancho de los rectángulos de área 36 m<sup>2</sup>.

Expresa, de forma algebraica, y representa la función *Largo–Ancho*.

<b>Largo</b>	18	12	9	6	4	3	2
<b>Ancho</b>	2	3	4	6	9	12	18

$$y = \frac{36}{x}$$

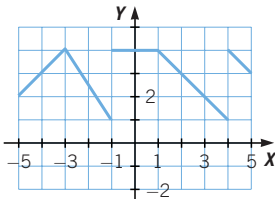


049

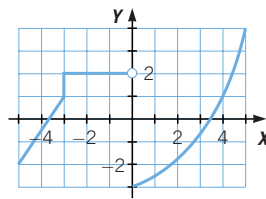


Estudia la continuidad de estas funciones. ¿Tienen puntos de discontinuidad?

a)



b)



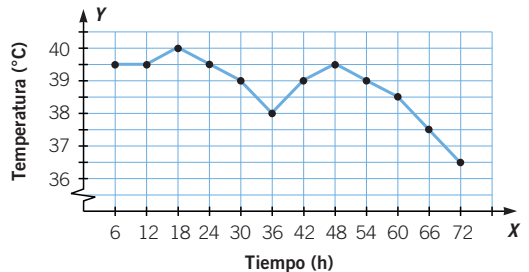
a) No, porque presenta dos saltos en los puntos de abscisa  $x = -1$  y  $x = 4$ .

b) No, ya que tiene un salto en  $x = 0$ .

050

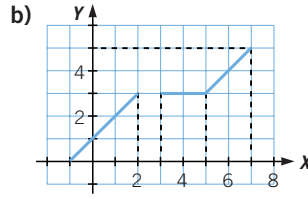
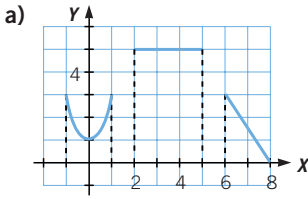


Luis está enfermo y le toman la temperatura 4 veces al día durante 3 días, obteniendo los puntos de este gráfico. ¿Podemos unir los puntos? ¿Será una función continua o discontinua?



Sí, podemos unir los puntos. Las variables son continuas y la gráfica también lo es.

051 Determina el dominio y el recorrido de estas funciones.



- a) Dominio =  $[-1, 8] - (1, 2) - (5, 6) = [-1, 1] + [2, 5] + [6, 8]$   
 Recorrido =  $[0, 3] + \{5\}$
- b) Dominio =  $[-1, 7] - (2, 3) = [-1, 2] + [3, 7]$   
 Recorrido =  $[0, 5]$

052 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN CON SU EXPRESIÓN ALGEBRAICA?

Halla el dominio de las funciones.

a)  $y = 2x - 3$       b)  $y = \frac{3 + 2x}{x + 1}$       c)  $y = \sqrt{x - 1}$

**PRIMERO.** Se analiza el tipo de expresión.

a)  $y = 2x - 3 \rightarrow$  Es una expresión polinómica.

b)  $y = \frac{3 + 2x}{x + 1} \rightarrow$  Es una expresión que tiene la variable  $x$  en el denominador.

c)  $y = \sqrt{x - 1} \rightarrow$  Es una expresión que tiene la variable  $x$  bajo una raíz.

**SEGUNDO.** Se calcula el dominio dependiendo del tipo de expresión.

a) Estas expresiones están definidas para todos los números reales:  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ .

b) Un cociente no está definido cuando el denominador es 0, luego la función no está definida en  $x = 1$ :  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$ .

c) Las raíces solo están definidas para números positivos; por tanto, la función está definida cuando  $x$  es mayor o igual que 1:  $\text{Dom } f = [1, +\infty)$ .

053 Calcula el dominio de estas funciones.

a)  $y = x^2 + 1$       c)  $\sqrt{x + 1}$   
 b)  $y = \frac{5}{x - 5}$       d)  $\sqrt{x - 2}$

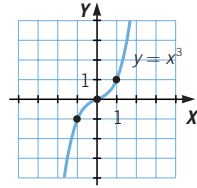
- a)  $\mathbb{R}$       c)  $[-1, +\infty)$   
 b)  $\mathbb{R} - \{5\}$       d)  $[2, +\infty)$



# Funciones

**054** Estudia la continuidad de la función  $y = x^3$  y obtén su dominio y recorrido.

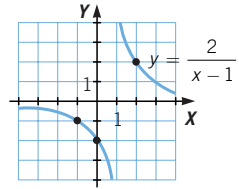
Es una función continua, con dominio  $\mathbb{R}$  y recorrido  $\mathbb{R}$ .



**055** Estudia la continuidad de la función  $y = \frac{2}{x-1}$  y obtén su dominio y recorrido.

$$y = \frac{2}{x-1} \rightarrow \begin{cases} \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\} \\ \text{Im } f = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

La función es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .



**056** Dada la función  $f(x) = \sqrt{x+4}$ :

a) Construye una tabla de valores.

$x$	0	1	2	-4
$y$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	0

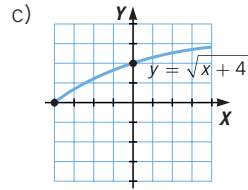
b) Estudia su continuidad.

b) Es continua en todo su dominio.

d)  $\text{Dom } f = [-4, +\infty)$

$\text{Im } f = [0, +\infty)$

c) Dibuja su gráfica.



d) Determina su dominio y recorrido.

**057** Halla los puntos de corte con los ejes de las funciones.

a)  $y = 4x - 1$

c)  $y = x^2 - 3$

e)  $y = x^3 - 8$

b)  $y = 5$

d)  $y = (x-3)^2$

f)  $y = -3$

a)  $y = 4x - 1 \rightarrow$  Eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 4 \cdot 0 - 1 = -1 \rightarrow P(0, -1)$

Eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = 4x - 1 \rightarrow x = \frac{1}{4} \rightarrow Q\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

b)  $y = 5 \rightarrow$  Eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow P(0, 5)$

Eje  $X \rightarrow y \neq 0$ , no tiene punto de corte con este eje.

c)  $y = x^2 - 3 \rightarrow$  Eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 - 3 = -3 \rightarrow P(0, -3)$

Eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow Q(\sqrt{3}, 0)$  y  $Q'(-\sqrt{3}, 0)$

d)  $y = (x-3)^2 \rightarrow$  Eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = (0-3)^2 = 9 \rightarrow P(0, 9)$

Eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = (x-3)^2 \rightarrow x = 3 \rightarrow Q(3, 0)$

e)  $y = x^3 - 8 \rightarrow$  Eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -8 \rightarrow P(0, -8)$

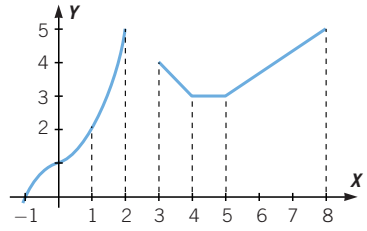
Eje  $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 8 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow Q(2, 0)$

f)  $y = -3 \rightarrow$  Eje  $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow P(0, -3)$

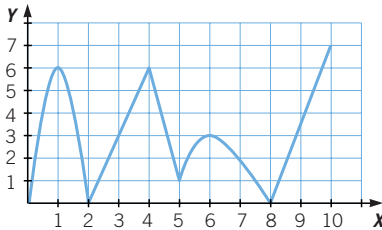
Eje  $X \rightarrow y \neq 0$ , no tiene punto de corte con este eje.

**058** Analiza el crecimiento de esta función.

La función es creciente en  $[-1, 2]$  y en  $[5, 8]$ ; es decreciente en  $[3, 4]$  y es constante en  $(4, 5)$ .



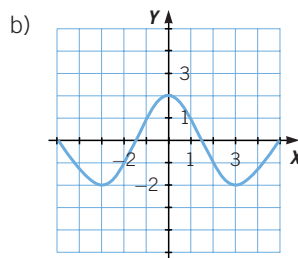
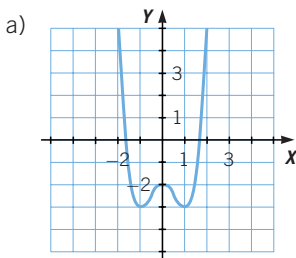
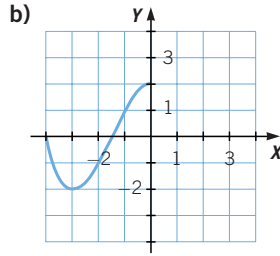
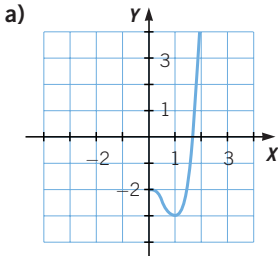
**059** Observa la gráfica correspondiente a esta función.



- a) Señala su dominio y recorrido.
- b) ¿Es una función continua?
- c) Estudia su crecimiento y decrecimiento.
- d) Señala sus máximos y mínimos, si los tiene.

- a)  $\text{Dom } f = [0, 10]$ ;  $\text{Im } f = [0, 7]$
- b) Es continua en todo su dominio.
- c) Es creciente en  $[0, 1] \cup [2, 4] \cup [5, 6] \cup [8, 10]$ .  
Es decreciente en  $[1, 2] \cup [4, 5] \cup [6, 8]$ .
- d) Presenta máximos en  $x = 1, x = 4$  y  $x = 6$ .  
Presenta mínimos en  $x = 2, x = 5$  y  $x = 8$ .

**060** Completa las siguientes gráficas para que resulte una función simétrica respecto del eje Y.



# Funciones

061



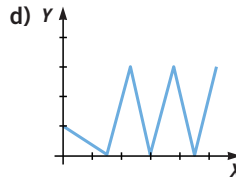
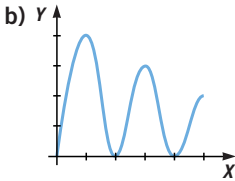
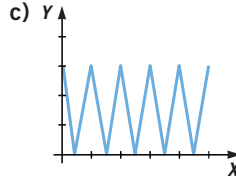
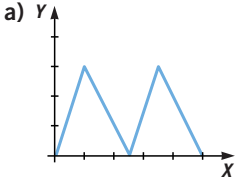
Una función, ¿puede ser simétrica respecto del eje  $Y$  y respecto del origen?  
Si crees que sí, pon un ejemplo.

Solo lo es la función  $y = 0$ , ya que verifica:  $f(-x) = -f(-x)$ .

062



Indica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones periódicas.



Son periódicas las funciones de los apartados a) y c) y no lo son las funciones de los apartados b) y d).

063



Estudia las características de las funciones que relacionan:

- La longitud del lado de un hexágono regular con su área.
- La longitud del lado de un cuadrado con su diagonal.
- Un número real y su cubo.
- Un número real y el triple de su raíz cuadrada.

$$a) A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6l \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

Se trata de una función continua y creciente en todo su dominio  $\rightarrow$   
 $\rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) La función es  $d = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$ ; es continua y creciente  $\rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

c)  $y = x^3 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}$

Es continua, creciente, no tiene máximos ni mínimos, y es simétrica respecto del origen.

d)  $y = 3\sqrt{x} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

$\text{Im } f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$

Es continua, creciente y no tiene máximos ni mínimos.

## 064 Estudia las características de las siguientes funciones.

a)  $y = -3x$

c)  $y = x^2 + 2x + 1$

e)  $y = (x - 1)^2$

b)  $y = 2x - 5$

d)  $y = \frac{2}{x} - 2$

f)  $y = x^3 - 3$

a)  $y = -3x \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}$

Es continua, decreciente, no tiene máximos ni mínimos, ni presenta simetrías.

b)  $y = 2x - 5 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}$

Es continua, creciente, no tiene máximos ni mínimos, ni presenta simetrías.

c)  $y = x^2 + 2x + 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}$

Es continua, decreciente desde  $-\infty$  hasta  $-1$ , creciente desde  $-1$  hasta  $+\infty$ , y tiene un mínimo en  $x = -1$ . No es simétrica respecto del eje  $Y$  ni respecto del origen de coordenadas.

d)  $y = \frac{2}{x} - 2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}; \text{Im } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Es continua y decreciente, no presenta simetrías respecto del eje  $Y$ , y es simétrica respecto del origen de coordenadas.

e)  $y = (x - 1)^2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}$

Es continua, decreciente desde  $-\infty$  hasta  $1$ , creciente desde  $1$  hasta  $+\infty$ , y tiene un mínimo en  $x = 1$ . No es simétrica respecto del eje  $Y$  ni respecto del origen de coordenadas.

f)  $y = x^3 - 3 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{R}$

Es continua y creciente, y no presenta simetrías respecto del eje  $Y$  ni respecto del origen de coordenadas.

## 065 Analiza estas funciones.

a)  $y = |x|$  (valor absoluto de  $x$ )

b)  $y = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a)  $y = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

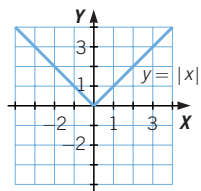
$$\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = [0, +\infty)$$

Es continua.

Decrece en  $(-\infty, 0)$  y crece en  $(0, +\infty)$ .

Tiene un mínimo absoluto en  $x = 0$ .

Es simétrica respecto del eje  $Y$ .



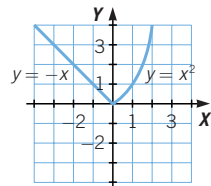
b)  $y = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = [0, +\infty)$$

Es continua.

Decrece en  $(-\infty, 0)$  y crece en  $(0, +\infty)$ .

Tiene un mínimo absoluto en  $x = 0$ . No presenta simetrías.



# Funciones

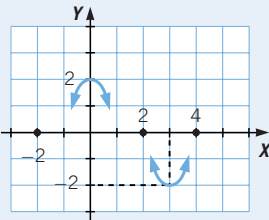
## 066 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE REPRESENTA UNA FUNCIÓN CONOCIENDO ALGUNAS DE SUS CARACTERÍSTICAS?

Representa una función con estos datos.

- Dom  $f = \mathbb{R}$
- Pasa por los puntos  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(4, 0)$ .
- Tiene un mínimo en  $(3, -2)$ .
- Tiene un máximo en  $(0, 2)$ .

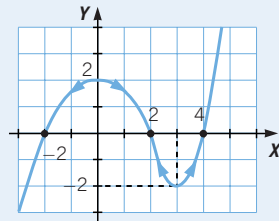
**PRIMERO.** Se representan los puntos por los que pasa la función.



**SEGUNDO.** Se dibujan los puntos en los que hay mínimos y máximos.

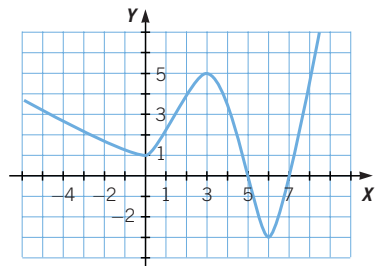
Sobre los mínimos se representa un arco con su parte cóncava hacia abajo. Y sobre los máximos, un arco con su parte cóncava hacia arriba.

**TERCERO.** Siguiendo las indicaciones de las flechas que señalan la dirección de la gráfica y los puntos por los que pasa, se representa la función.



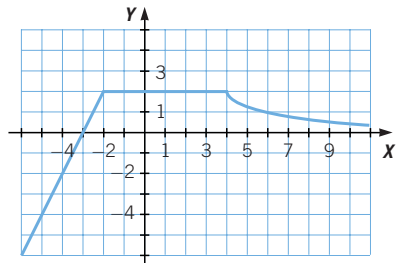
## 067 Representa una función tal que:

- - Dom  $f = \mathbb{R}$
- Pasa por los puntos  $(5, 0)$  y  $(7, 0)$ .
- Tiene puntos mínimos en  $(0, 1)$  y  $(6, -3)$ .
- Tiene un máximo en  $(3, 5)$ .

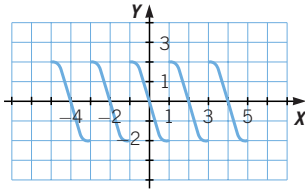


## 068 Representa una función con estas características.

- - Dom  $f = \mathbb{R}$
- Pasa por los puntos  $(-3, 0)$  y  $(0, 2)$ .
- Es creciente hasta  $x = -2$ , constante en el intervalo  $(-2, 4)$  y decreciente a partir de  $x = 4$ .



- 069** ●● Dibuja una función periódica, con dominio el intervalo  $(-5, 5)$  y recorrido  $(-2, 2)$ . ¿Existe más de una solución?



Existen infinitas soluciones.

- 070** ●●● Representa la gráfica de una función simétrica respecto del eje  $Y$  y que siempre sea creciente. ¿Es posible?

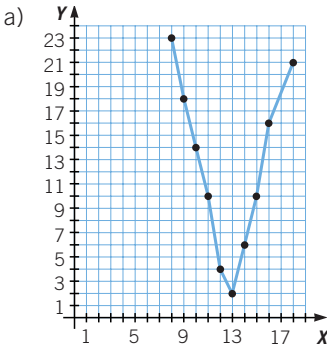
No es posible, ya que si es creciente en los valores positivos será decreciente en los negativos, y al revés, por ser simétrica respecto del eje  $Y$ .

En el caso de que  $a > b > 0$ , entonces  $f(a) > f(b)$ , por ser creciente y simétrica respecto del eje  $Y$ . Sin embargo, la condición de que  $f(-a) > f(-b)$  es imposible por ser una función creciente, ya que  $-b > -a$ .

- 071** ●● En un instituto han medido la longitud de la sombra del edificio principal cada hora, a lo largo de un día de invierno (a partir de las 18:00 horas era de noche), obteniendo esta tabla.

Hora	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Longitud	23	18	14	10	4	2	6	10	16	21

- a) Haz la representación gráfica.  
 b) ¿Es una función continua o discontinua?  
 c) Estudia las características de la función.



- b) Es continua.  
 c) Es decreciente desde que sale el sol hasta las 13:00 horas, en que pasa a ser creciente hasta la puesta de sol. Tiene un mínimo en las 13:00 horas. Su dominio es el conjunto representado por las horas de sol.

# Funciones

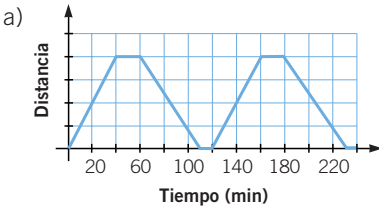
072



Un tren realiza el trayecto entre dos ciudades *A* y *B*. Sale de *A* a las 07:00 horas y se dirige a *B* a velocidad constante, llegando en 40 minutos. Después, para durante 20 minutos y parte de *B* hacia *A*, llegando en 50 minutos. Se detiene 10 minutos y, a la hora en punto, vuelve a salir hacia *B*.



- Representa la función *Tiempo–Distancia* a la ciudad *A*.
- Realiza un estudio completo de la función.

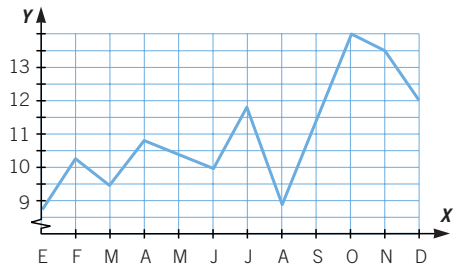


- La función es continua en todo su dominio.  
Es creciente en los intervalos  $(0, 40)$ ,  $(120, 160)$ ...  
Es constante en los intervalos  $(40, 60)$ ,  $(110, 120)$ ,  $(160, 180)$ ...  
Es decreciente en los intervalos  $(60, 110)$ ,  $(180, 230)$ ...
- Sí, es un función periódica, con período  $T = 120$  minutos.

073



En la gráfica se muestra la superficie de edificación de viviendas (en millones de  $m^2$ ) concedida en cada mes del año.



- Analiza su continuidad.
  - ¿En qué puntos corta a los ejes?
  - Estudia su crecimiento.
  - Señala sus máximos y mínimos, indicando si son absolutos o relativos.
  - ¿En qué meses se superaron los 12 millones de metros cuadrados?  
¿Entre qué dos meses se registró el mayor crecimiento?
- Es una función continua.
  - No corta al eje *X* y corta al eje *Y* en  $(E; 8,5)$ .
  - Es creciente de enero a febrero, de marzo a abril, de junio a julio y de agosto a octubre. Es decreciente de febrero a marzo, de abril a junio, de julio a agosto y de octubre a diciembre.
  - Máximos relativos: febrero, abril, julio y octubre. Máximo absoluto: octubre. Mínimos relativos: marzo, junio y agosto. Mínimo absoluto: enero.
  - Se superaron los 12 millones en octubre, noviembre y diciembre. El mayor crecimiento se registró en los meses de agosto y septiembre.

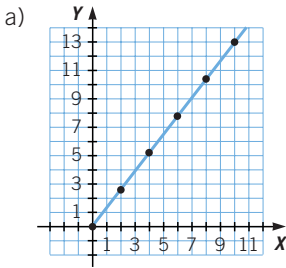
074

En un entrenamiento para una carrera de 5.000 m, un atleta ha registrado estos tiempos.

Tiempo (s)	0	10	20	30	40	50	...
Espacio (m)	0	65	130	195	260	325	...



- a) Representa los datos en una gráfica.
- b) Si continúa con la misma velocidad, ¿qué tiempo tardará en recorrer 5.000 m?
- c) Escribe la expresión algebraica que relaciona el espacio recorrido con el tiempo empleado.

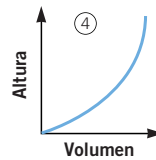
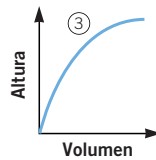
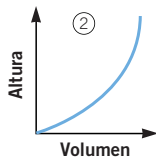
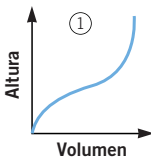
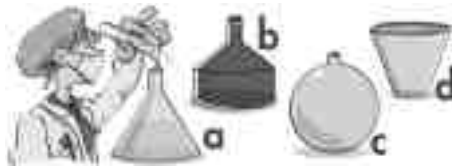


b)  $t = 5000 : 6,5 = 769,23 \text{ s} = 12 \text{ min } 49,23 \text{ s}$

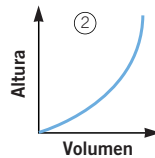
c)  $y = 6,5x$

075

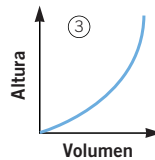
¿Qué gráfica corresponde al llenado de cada frasco?



- a) Es un cono. A medida que crece el volumen, la altura crece cada vez más rápido. Su gráfica es:



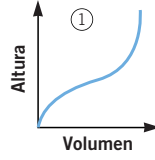
- b) La parte baja es un cilindro, siendo el volumen proporcional a la altura y, después, es un cono, por lo que según aumenta el volumen, el crecimiento de la altura se acelera. Su gráfica es:



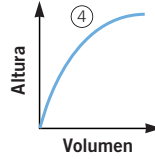


# Funciones

c) Es una esfera. La altura crece más rápido al principio y al final del llenado del volumen de la esfera, coincidiendo con los polos. Su gráfica es:



d) Es un cono invertido. El crecimiento de la altura se ralentiza a medida que vamos teniendo mayor volumen. Su gráfica es:

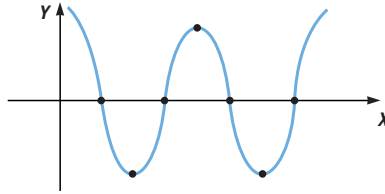


## 076 Si una función es continua:

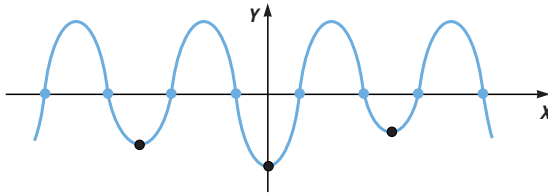


- a) ¿Cuántos máximos, al menos, deberá tener la función si corta exactamente 4 veces al eje  $X$ ?
- b) Y no es constante en ningún intervalo, ¿cuál es el mayor número de veces que puede cortar al eje  $X$  si tiene 3 mínimos?

a) Los cuatro puntos de corte con el eje  $X$  delimitan tres intervalos, en los cuales, por ser continua la función, tiene que existir, al menos, un máximo o un mínimo. El menor número de máximos se consigue con dos mínimos y entre ellos un máximo.



b) Como presenta 3 mínimos, tiene a lo sumo 4 máximos y, por ser una función continua, cada mínimo se situará entre 2 puntos máximos. Cada máximo puede ocasionar 2 puntos de corte con el eje  $X$ , por lo que como máximo tendrá 8 puntos de corte con el eje  $X$ .



## 077 ¿Puede una función par valer $-7$ en $x = 0$ ? ¿Y una función impar?



No, ya que si es una función impar será simétrica respecto del origen, por lo que tendría que pasar también por el punto  $(0, 7)$ , lo que no es posible porque entonces el  $0$  tendría más de una imagen.

Todas las funciones impares que cortan al eje  $Y$ , lo hacen en el punto  $(0, 0)$ .

- 078 De una función sabemos que todos los elementos de su conjunto Imagen son positivos y además:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

Si  $f\left(\frac{2}{3}\right) = 4$ , ¿cuánto vale  $f(5)$ ? ¿Y  $f(0)$ ?

$$4 = f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3} + 0\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) \cdot f(0) = 4 \cdot f(0) \rightarrow f(0) = 1$$

$$4 = f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2 \rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{4} = 2$$

$$f(5) = f\left(15 \cdot \frac{1}{3}\right) = \left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{15} = 2^{15} = 32.768$$

## EN LA VIDA COTIDIANA

- 079 Marta decidió invertir sus ahorros en el año 2002. Tuvo que elegir entre dos productos financieros: un depósito a plazo fijo o un fondo de inversión.



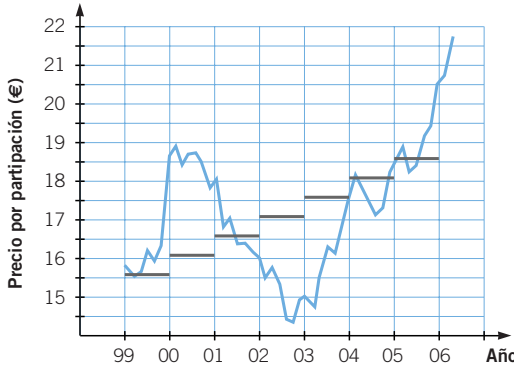
El depósito a plazo fijo tenía una duración de 5 años. Pasado este tiempo, el banco le devolvería el capital que había ingresado más un 15 % de intereses. En caso de retirarlo antes, el banco le ofrecía un interés del 3 % cada año.

Por otra parte, el fondo de inversión no tenía una rentabilidad fija, y el interés podía variar dependiendo de los índices bursátiles.

Finalmente Marta se decidió por el fondo de inversión, y compró 1.519 participaciones.

# Funciones

Ayer recibió la información sobre la rentabilidad de su fondo en los últimos 5 años. Dentro de esa información aparecía este gráfico.



A la vista del gráfico, ¿hubiera sido mejor haber invertido en el depósito a plazo fijo?

¿En qué momentos, desde el año 2002, el depósito a plazo fijo le habría ofrecido mayor rentabilidad?

La elección depende del momento en que se saque el dinero.

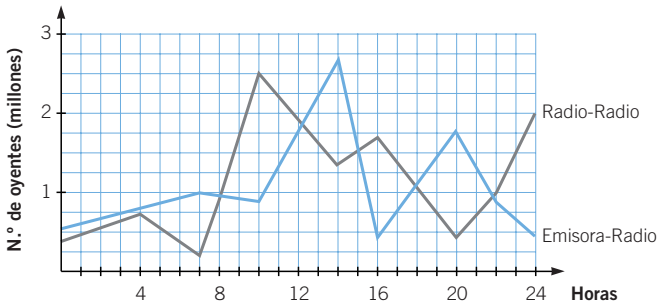
Por ejemplo, durante todo el año 2002, y en casi todos los meses de los años 2003 y 2004, hubiera sido más rentable el depósito a plazo fijo.

080

El Instituto General de Medios de Comunicación (IGMC) ha hecho públicos los datos recogidos en su última encuesta realizada a los oyentes.



En esta gráfica aparece el número de oyentes (en millones) de las dos emisoras de radio con mayor audiencia del país.



Estas son las programaciones diarias de las dos cadenas.

RADIO-RADIO	
0 – 4 h	Cultural
4 – 7 h	Música
7 – 10 h	Informativos
10 – 14 h	Entrevistas
14 – 15 h	Informativos
15 – 16 h	Deportes
16 – 20 h	Humor
20 – 22 h	Informativos
22 – 24 h	Deportes

EMISORA-RADIO	
0 – 4 h	Entrevistas
4 – 7 h	Humor
7 – 10 h	Musical
10 – 12 h	Informativos
12 – 14 h	Deportes
14 – 16 h	Cultural
16 – 19 h	Deportes
19 – 20 h	Informativos
20 – 22 h	Musical
22 – 24 h	Cine

**¿Qué conclusiones obtienes del estudio de la gráfica y de sus programaciones?**

**¿Cómo modificarías la programación de las cadenas para aumentar la audiencia?**

Se observa que la mayor audiencia se obtiene con la emisión de programas deportivos o informativos, mientras que las menores audiencias se corresponden con programas culturales y de humor. Lo aconsejable sería que las cadenas aumentaran los programas con este tipo de contenido para subir la audiencia.