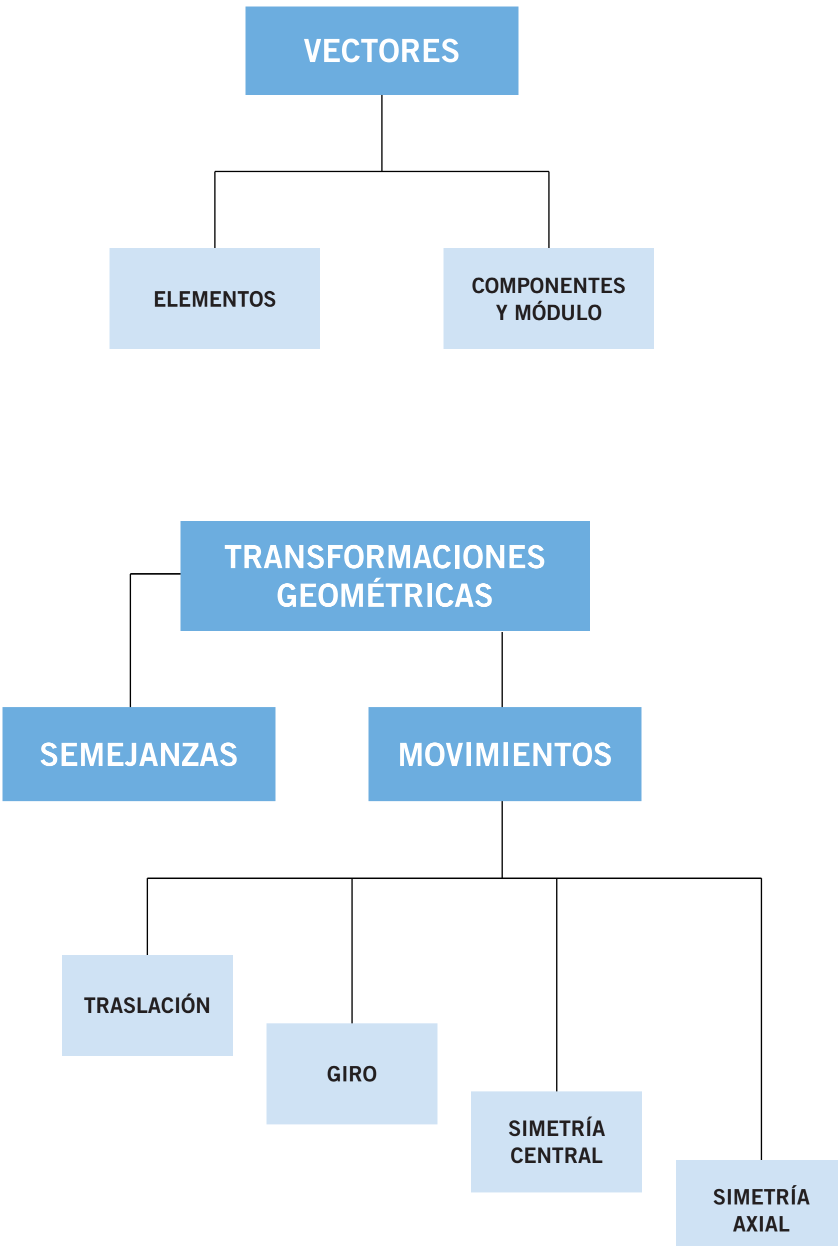
10 Movimientos y semejanzas



El carro del Sol

Cuenta la leyenda que en Alejandría, en los tiempos en que se construía el famoso Faro, un grupo de hombres derrotó al Sol.

Apolo, al que otros llaman Ra, ordenó a sus siervos que le llevaran los ocho hombres más sabios de todos los tiempos, pues quería para él la sabiduría del mundo.

Los siervos comenzaron la tarea y encontraron a los siete primeros. Fue fácil, pues todos ellos estaban en el Hades y se les conocía como los Siete Sabios.

Al octavo lo buscaron entre los vivos y entre los muertos, en la tierra y en el cielo, pero no aparecía. Cansados de tanto buscar, le preguntaron al Oráculo:

–Su nombre es Euclides, y el lugar donde se encuentra es la biblioteca de Alejandría.

Montados en el carro de Apolo volaron hasta la biblioteca y allí hallaron a un grupo de hombres. El más anciano, que estudiaba dos cuadrados de diferente tamaño, anotando sus semejanzas y sus diferencias, fue capturado por los siervos de Apolo.

–¡Euclides es nuestro!

En ese instante todos los demás hombres los rodearon diciendo:

–¡Yo soy Euclides! ¡Yo soy Euclides!

Los enviados, ante la imposibilidad de reconocer quién era realmente Euclides, se fueron y le dijeron a Apolo que el octavo sabio no existía, que era uno y eran todos. Después de esto, Apolo liberó a los Siete Sabios, y preguntado por la razón contestó que no hay muros que contengan la sabiduría y el conocimiento.

¿En qué se parecen y se diferencian dos cuadrados de distinta medida?

Los dos cuadrados se parecen en que tienen la misma forma y se diferencian en que son de distinto tamaño.

Movimientos y semejanzas

EJERCICIOS

001 Dadas estas parejas de puntos, calcula, en cada caso, las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y halla su módulo.

a) $A(1, 3)$ $B(-4, 5)$

b) $A(4, 0)$ $B(-1, -5)$

c) $A(-1, -3)$ $B(5, -7)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-4 - 1, 5 - 3) = (-5, 2) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1 - 4, -5 - 0) = (-5, -5) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$

c) $\overrightarrow{AB} = (5 + 1, -7 + 3) = (6, -4) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52}$

002 Dados $A(2, 4)$ y el vector $\overrightarrow{AB}(-3, 5)$, determina el punto B, extremo de $\overrightarrow{AB}$.

$$A(2, 4);\ B(x, y) \rightarrow \left.\begin{array}{r} -3 = x - 2 \rightarrow x = -1 \\ 5 = y - 4 \rightarrow y = 9 \end{array}\right\} \rightarrow B(-1, 9)$$

003 Escribe tres vectores con módulo 4. ¿Puedes escribir un vector con módulo −2?

$\overrightarrow{AB}\,(4, 0)$; $\overrightarrow{CD}\,(0, 4)$ y $\overrightarrow{EF}\,(\sqrt{8}, \sqrt{8})$

No existe ningún vector cuyo módulo sea −2, ya que el módulo, que representa una medida de longitud, no puede ser negativa.

004 ¿Cuáles de las figuras resultan al aplicar un movimiento a esta figura?

a)  **b)**  **c)**  **d)** 

Las figuras de los apartados a) y b).

005 Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas.

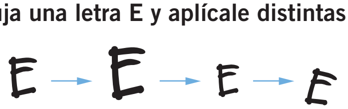
a) Una transformación es un movimiento.

b) Un movimiento conserva siempre la forma.

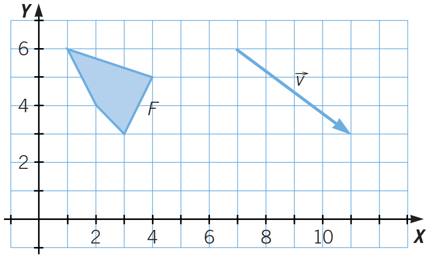
c) Una transformación mantiene el tamaño de las figuras.

Es cierta la afirmación del apartado b).

006 Dibuja una letra E y aplícale distintas transformaciones geométricas.

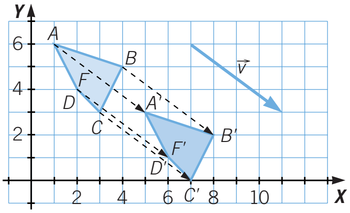


007 **Obtén la figura trasladada de la figura *F* mediante el vector $\vec{v}$.**



Al aplicar el vector de traslación $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (11 - 7, 3 - 6) = (4, -3)$ a los vértices de la figura F, tenemos que:

$$A(1, 6) \xrightarrow{\vec{v}(4,\,-3)} A'(5, 3)$$
$$B(4, 5) \longrightarrow B'(8, 2)$$
$$C(3, 3) \longrightarrow C'(7, 0)$$
$$D(2, 4) \longrightarrow D'(6, 1)$$



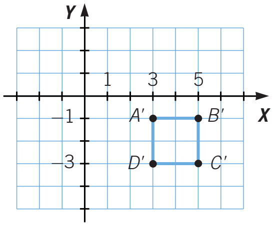
008 **Un cuadrado tiene como vértices los puntos $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$, $C(1, -1)$ y $D(-1, -1)$.**

a) Determina su trasladado $A'B'C'D'$ mediante la traslación de vector $\vec{v}(4, -2)$.

b) Comprueba gráficamente que los puntos A', B', C' y D' forman también un cuadrado.

a) $A(-1, 1) \xrightarrow{\vec{v}(4,\,-2)} A'(3, -1)$
$B(1, 1) \longrightarrow B'(5, -1)$
$C(1, -1) \longrightarrow C'(5, -3)$
$D(-1, -1) \longrightarrow D'(3, -3)$

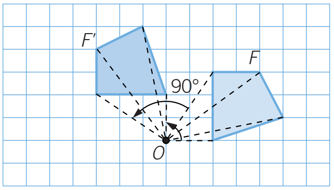
b)



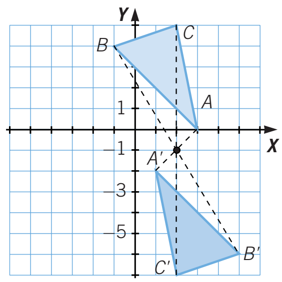
009 **Determina la traslación que transforma el punto $A(-1, 4)$ en $A'(5, 2)$.**

$\vec{v} = (5 - (-1), 2 - 4) = (6, -2)$

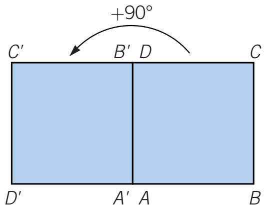
010 **Obtén la figura transformada de la figura *F* mediante un giro de centro *O* y ángulo 90°.**



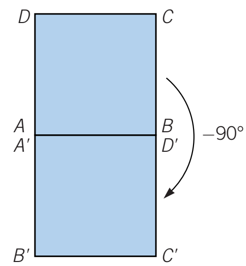
011 **Un triángulo tiene por vértices los puntos *A*(3, 0), *B*(−1, 4) y *C*(2, 5). Halla su transformado por un giro de centro (2, −1) y ángulo 180°.**



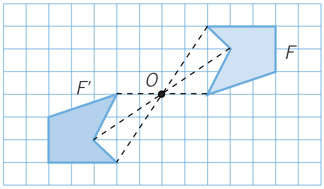
012 **¿En qué figura se transforma el cuadrado *ABCD* mediante un giro *G*(*A*; 90°)? ¿Y mediante un giro *G*(*A*; −90°)?**



En ambos casos se transforma en un cuadrado.



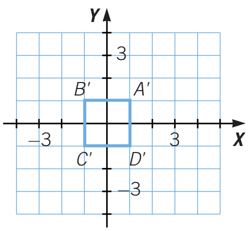
013 **Obtén la figura transformada de la figura *F* mediante una simetría central de centro *O*.**



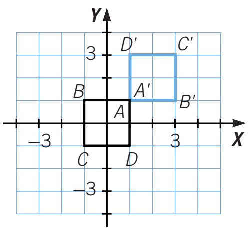
014 **Dibuja el cuadrado de vértices:**

***A*(1, 1) *B*(−1, 1) *C*(−1, −1) *D*(1, −1)**

y calcula su simétrico respecto al origen de coordenadas y respecto al punto *A*(1, 1).

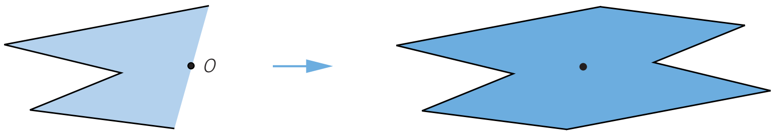


Respecto al origen es el mismo cuadrado.

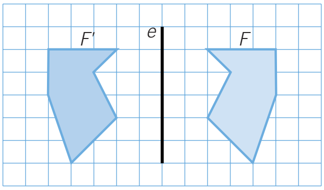


$A' = (1, 1)$, $B' = (3, 1)$, $C' = (3, 3)$ y $D' = (1, 3)$

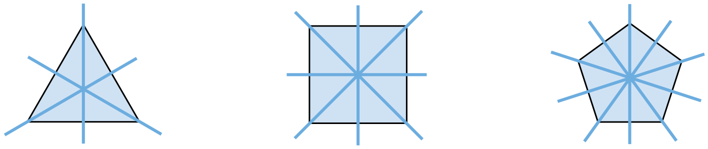
015 **De esta figura ha desaparecido la mitad. Sabiendo que es simétrica respecto al punto *O*, reconstrúyela.**



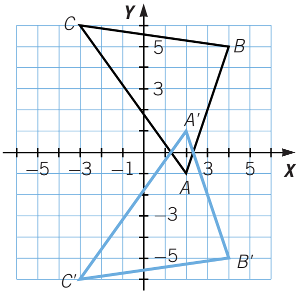
016 **Obtén la figura transformada de la figura *F* mediante una simetría de eje *e*.**



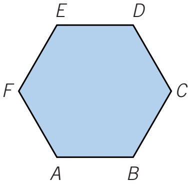
017 **Señala todos los ejes de simetría que tengan las siguientes figuras.**

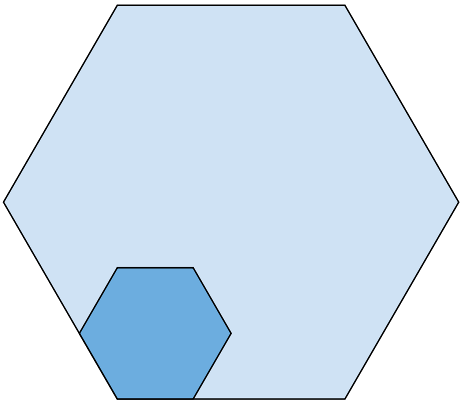


018 **Un triángulo tiene por vértices *A*(2, −1), *B*(4, 5) y *C*(−3, 6). Halla su transformado mediante una simetría respecto al eje de abscisas.**



019 **Transforma este hexágono mediante una homotecia de centro el vértice *A* y razón 3.**





020 **Determina si un triángulo de lados de 3, 4 y 5 cm es semejante a otro de lados de 1,5; 2 y 2,5 cm.**

Son semejantes, de razón 2.

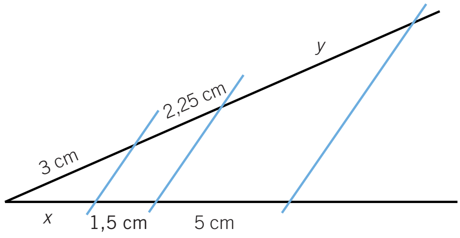
$$\frac{3}{1,5}=\frac{4}{2}=\frac{5}{2,5}=2=k$$

021 **Obtén los puntos y las rectas dobles de una homotecia.**

El único punto doble de una homotecia es el centro de la homotecia, O.

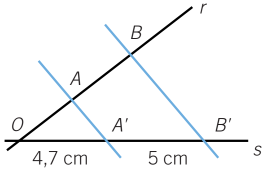
Las rectas dobles son las rectas que se transforman en sí mismas, es decir, las rectas que pasan por el centro de la homotecia.

022 **Halla las longitudes desconocidas.**



$$\frac{3}{x}=\frac{2,25}{1,5}=\frac{y}{5}\rightarrow x=2\text{ cm};\ y=7,5\text{ cm}$$

023 **Sabiendo que la razón $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}=1,6$; calcula $\overline{AB}$ y $\overline{OB}$.**

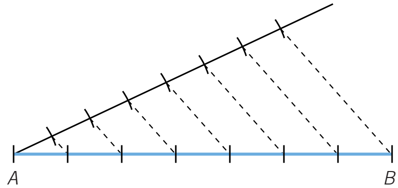


$$1,6=\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$$

$$1,6=\frac{\overline{AB}}{5}\rightarrow\overline{AB}=8\text{ cm}$$

$$1,6=\frac{\overline{OB}}{9,7}\rightarrow\overline{OB}=15,52\text{ cm}$$

024 **Divide un segmento *AB* de 5 cm en 7 partes iguales.**



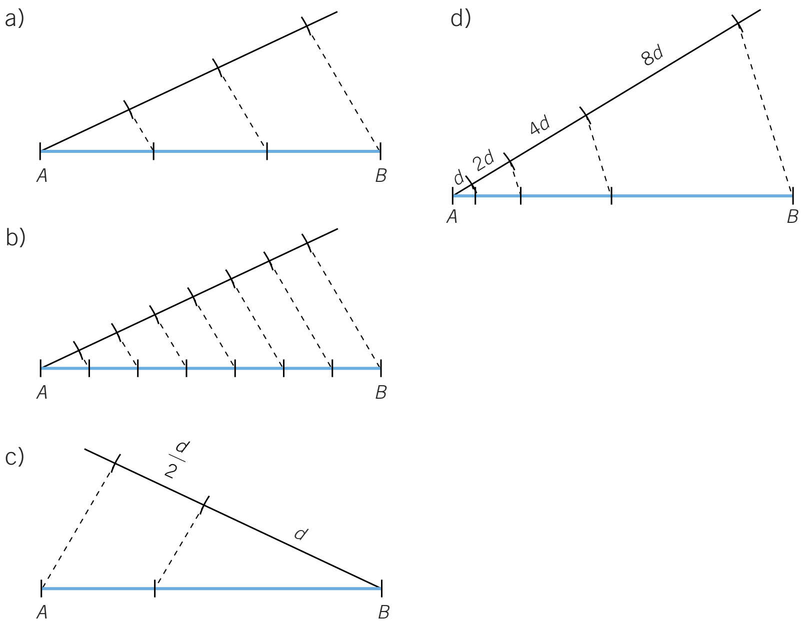
025 **Divide gráficamente el segmento *AB* de 20 cm de longitud en:**

a) 3 partes iguales.

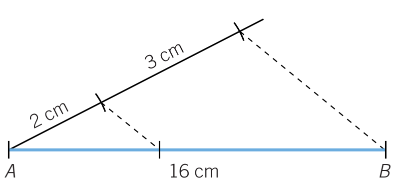
b) 7 partes iguales.

c) 2 partes, siendo la segunda la mitad que la primera.

d) 4 partes, siendo cada parte el doble que la anterior.



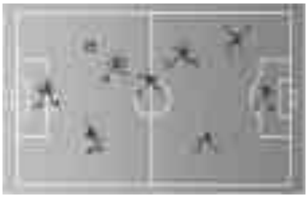
026 **Divide gráficamente el segmento *AB*, de 16 cm de longitud, en partes proporcionales a dos segmentos de longitudes 2 cm y 3 cm.**



027 **Raúl tiene que cortar un listón de 30 cm en 7 partes iguales. Solo dispone de un trozo que mide 21 cm. ¿Cómo lo puede dividir?**

Dividimos el trozo de 21 cm en 7 partes iguales, de 3 cm cada una, y aplicamos el teorema de Tales. Unimos los dos listones por un extremo y luego unimos con un segmento los otros dos extremos. Después, trazamos paralelas al segmento por las divisiones del listón de 21 cm. Los puntos de corte con el listón de 30 cm son los lugares en los que debemos cortar.

028 **Halla las dimensiones reales de este campo de fútbol.**


1 : 3.000

Largo:

$4 \text{ cm} \cdot 3.000 = 12.000 \text{ cm} = 120 \text{ m}$

Ancho:

$2{,}5 \text{ cm} \cdot 3.000 = 7.500 \text{ cm} = 75 \text{ m}$

029 **¿A qué escala está dibujado un mapa en el que la distancia entre dos poblaciones es 4,5 cm si la distancia real es 54 km?**

$$\frac{54 \text{ km}}{4{,}5 \text{ cm}} = \frac{5.400.000 \text{ cm}}{4{,}5 \text{ cm}} = 1.200.000$$

Escala 1 : 1.200.000

030 **Dos pueblos *A* y *B* están separados entre sí por 50 km. ¿A qué distancia se encuentran en un mapa a escala 1 : 800.000?**

$5.000.000 \text{ cm} : 800.000 = 6{,}25 \text{ cm}$

ACTIVIDADES

031 **Dadas las parejas de puntos, calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo.**

a) $A(-1, 3), B(4, 5)$
b) $A(-2, 0), B(1, -3)$
c) $A(4, -1), B(2, -6)$
d) $A(-3, -3), B(-1, -2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (4 - (-1), 5 - 3) = (5, 2) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{29}$

b) $\overrightarrow{AB} = (1 - (-2), -3 - 0) = (3, -3) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18}$

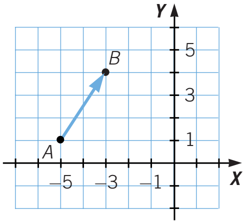
c) $\overrightarrow{AB} = (2 - 4, -6 - (-1)) = (-2, -5) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{29}$

d) $\overrightarrow{AB} = (-1 - (-3), -2 - (-3)) = (2, 1) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$

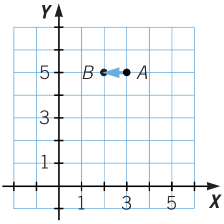
032 **Determina las coordenadas de *A* en el vector $\overrightarrow{AB}$ y represéntalo gráficamente.**

a) $\overrightarrow{AB}(2, 3)$ **y** $B(-3, 4)$
b) $\overrightarrow{AB}(-1, 0)$ **y** $B(2, 5)$

a) $A = (-5, 1)$



b) $A = (3, 5)$



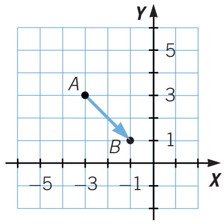
033 **Obtén las coordenadas de *B* en el vector $\vec{AB}$ y represéntalo.**

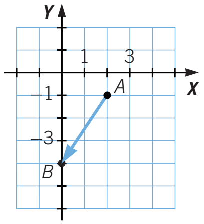
a) $\vec{AB}(2, -2)$ **y** $A(-3, 3)$

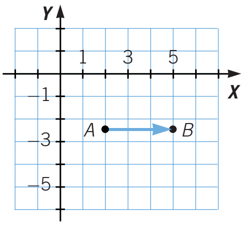
b) $\vec{AB}(-2, -3)$ **y** $A(2, -1)$

c) $\vec{AB}(3, 0)$ **y** $A\left(2, -\frac{5}{2}\right)$

a) $B = (-1, 1)$ b) $B = (0, -4)$ c) $B = \left(5, -\frac{5}{2}\right)$



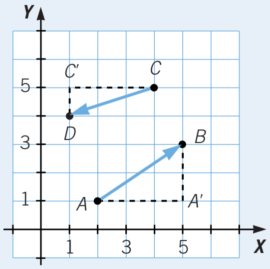




034 **HAZLO ASÍ**

¿CÓMO SE CALCULAN LAS COORDENADAS DE UN VECTOR EN UN SISTEMA DE COORDENADAS?

Halla las coordenadas de estos vectores.



Se considera el vector como la diagonal de un rectángulo y se calculan las dimensiones de sus lados.

PRIMERO. La primera coordenada del vector es la dimensión del largo del rectángulo que determina.

Se considera positiva si el desplazamiento es hacia la derecha, y negativa, si es hacia la izquierda.

a) $\overline{AA'} \longrightarrow$ 3 unidades hacia la derecha $\longrightarrow 3$

b) $\overline{CC'} \rightarrow$ 3 unidades hacia la izquierda $\rightarrow -3$

SEGUNDO. La segunda es la dimensión de la altura del rectángulo. Se considera positiva si el desplazamiento es hacia arriba, y negativa si es hacia abajo.

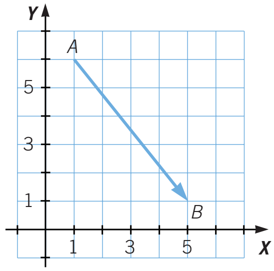
a) $\overline{A'B} \longrightarrow$ 2 unidades hacia arriba $\rightarrow 2$

b) $\overline{C'D} \rightarrow$ 1 unidad hacia abajo $\longrightarrow -1$

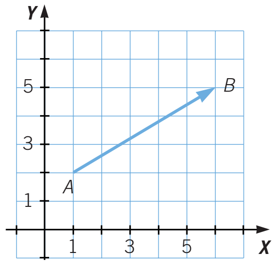
Luego las coordenadas de los vectores son $\vec{AB}(3, 2)$ y $\vec{CD}(-3, -1)$.

035 Determina las coordenadas de los extremos del vector $\overrightarrow{AB}$ y obtén sus coordenadas y módulo.

a)



b)



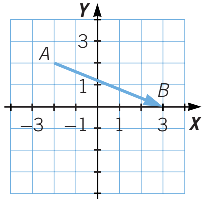
a) $\overrightarrow{AB} = (5, 1) - (1, 6) = (4, -5)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

b) $\overrightarrow{AB} = (6, 5) - (1, 2) = (5, 3)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$

036 Dibuja el vector de extremos $A(-2, 2)$ y $B(3, 0)$ y calcula sus coordenadas y módulo.



$\overrightarrow{AB} = (3 - (-2), 0 - 2) = (5, -2)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

El vector $\overrightarrow{BA}$ es el opuesto a $\overrightarrow{AB}$.

037 Escribe tres vectores con módulo 9. ¿Podrías escribir más? ¿Cuántos?

Por ejemplo, (0, 9), (−9, 0) y (9, 0). Se podrían escribir infinitos vectores. Para cada punto de origen serían todos los vectores que terminan en la circunferencia de radio 9 y cuyo centro es dicho punto.

038 Indica, observando este dibujo, si las siguientes figuras se han obtenido mediante un movimiento o no. Razona tu respuesta.

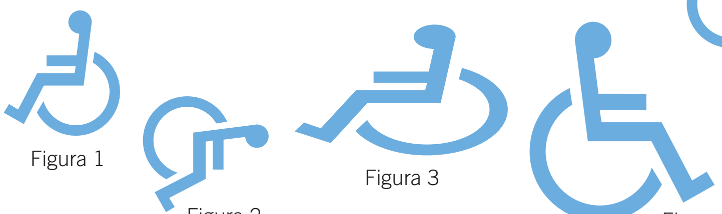
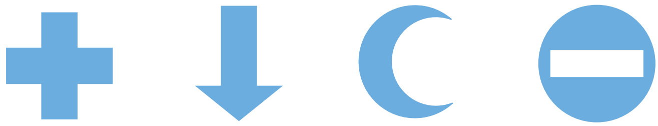


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Las figuras 1 y 2 conservan la forma y el tamaño, por lo que se han obtenido mediante un movimiento. Las figuras 3 y 4 no; la figura 3 no conserva la forma ni el tamaño, y la figura 4 conserva la forma pero no el tamaño.

039 Dibuja, a partir de las figuras, otras figuras en las que se conserve.



a) **El tamaño.**

b) **La forma.**

c) **El tamaño y la forma.**

d) **Ni el tamaño ni la forma.**

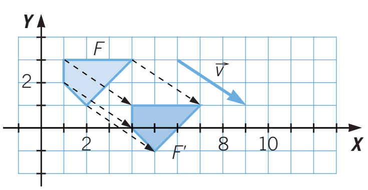
a)

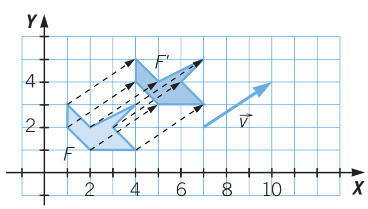

b)

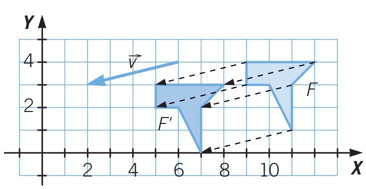

c)

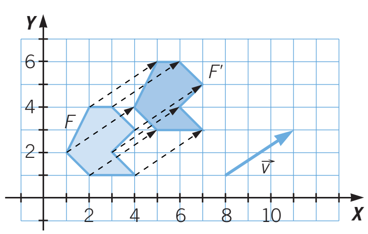

d)


040 **Obtén la figura transformada de la figura *F* mediante una traslación de vector $\vec{v}$.**

a)


c)


b)


d)


041 Completa la siguiente tabla.

Punto	Vector de traslación	Punto trasladado
$\boldsymbol{A(1, 3)}$	$\boldsymbol{\vec{v}(1, -2)}$	$A'(2, 1)$
$\boldsymbol{B(-2, -4)}$	$\vec{u}(2, 7)$	$\boldsymbol{B'(0, 3)}$
$C(10, 7)$	$\boldsymbol{\vec{w}(-3, -5)}$	$\boldsymbol{C'(7, 2)}$
$\boldsymbol{D(1, 5)}$	$\vec{s}(4, -4)$	$\boldsymbol{D'(5, 1)}$
$\boldsymbol{E(0, 3)}$	$\boldsymbol{\vec{t}(3, -2)}$	$E'(3, 1)$

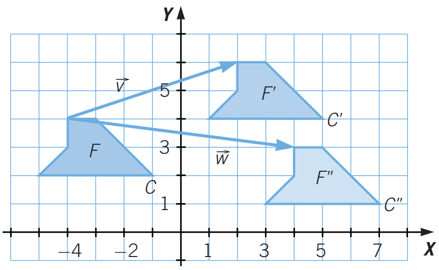
042 **¿Cuál es el vector de la traslación que lleva el punto $A(2, -3)$ al punto $A'(-1, 7)$?**

$\vec{v} = (-3, 10)$

043 **Calcula las coordenadas del punto transformado del punto $B(4, -2)$ mediante una traslación de vector $\vec{v}\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}\right)$.**

$$B' = \left(\frac{21}{5}, \frac{-8}{3}\right)$$

044 **Determina gráficamente los vectores de las traslaciones que transforman la figura F en F' y F'', respectivamente. Obtén también sus coordenadas.**



Tomamos el vértice superior izquierdo de las tres figuras:

$$\left.\begin{array}{l}\text{En } F \longrightarrow A(-4, 4) \\ \text{En } F' \longrightarrow A'(2, 6)\end{array}\right\} \rightarrow \vec{v} = (2 - (-4), 6 - 4) = (6, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{En } F \longrightarrow A(-4, 4) \\ \text{En } F'' \rightarrow A''(4, 3)\end{array}\right\} \rightarrow \vec{w} = (4 - (-4), 3 - 4) = (8, -1)$$

Lo comprobamos transformando el vértice derecho de la figura F:

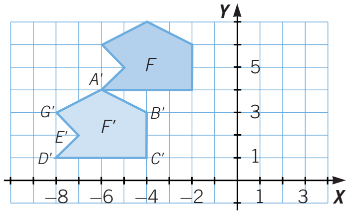
$$C(-1, 2) \xrightarrow{\vec{v}(6, 2)} C'(5, 4)$$

$$C(-1, 2) \xrightarrow{\vec{w}(8, -1)} C''(7, 1)$$

que corresponden a las coordenadas de los picos de F' y F''.

045 ●●

Halla la figura F que ha dado lugar a la figura F', al aplicarle una traslación de vector $\vec{v}(-2, -3)$. Antes de hacerlo, determina cuáles serán las coordenadas de los vértices de la figura F.



$$A(x_1, y_1) \xrightarrow{\vec{v}(-2,\,-3)} A'(-6, 4) \begin{cases} x_1 - 2 = -6 \rightarrow x_1 = -4 \\ y_1 - 3 = 4 \longrightarrow y_1 = 7 \end{cases}$$

$$B(x_2, y_2) \xrightarrow{\vec{v}(-2,\,-3)} B'(-4, 3) \begin{cases} x_2 - 2 = -4 \rightarrow x_2 = -2 \\ y_2 - 3 = 3 \longrightarrow y_2 = 6 \end{cases}$$

$$C(x_3, y_3) \xrightarrow{\vec{v}(-2,\,-3)} C'(-4, 1) \begin{cases} x_3 - 2 = -4 \rightarrow x_3 = -2 \\ y_3 - 3 = 1 \longrightarrow y_3 = 4 \end{cases}$$

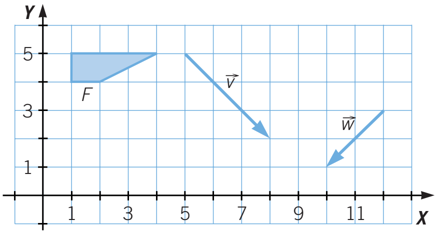
$$D(x_4, y_4) \xrightarrow{\vec{v}(-2,\,-3)} D'(-8, 1) \begin{cases} x_4 - 2 = -8 \rightarrow x_4 = -6 \\ y_4 - 3 = 1 \longrightarrow y_4 = 4 \end{cases}$$

$$E(x_5, y_5) \xrightarrow{\vec{v}(-2,\,-3)} E'(-7, 2) \begin{cases} x_5 - 2 = -7 \rightarrow x_5 = -5 \\ y_5 - 3 = 2 \longrightarrow y_5 = 5 \end{cases}$$

$$G(x_6, y_6) \xrightarrow{\vec{v}(-2,\,-3)} G'(-8, 3) \begin{cases} x_6 - 2 = -8 \rightarrow x_6 = -6 \\ y_6 - 3 = 3 \longrightarrow y_6 = 6 \end{cases}$$

046 ●●●

Obtén la figura transformada de la figura F mediante la traslación de vector $\vec{v}$. Llámala F'. Después, halla la figura transformada de F' por la traslación de vector $\vec{w}$. Llámala F''.



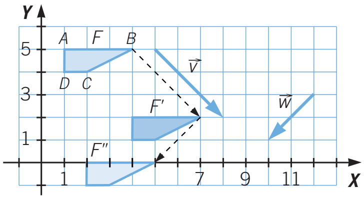
a) ¿Puedes pasar directamente de F a F'' con una traslación? Si crees que sí, dibuja el vector de dicha traslación y escribe sus coordenadas.

b) Escribe las coordenadas de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y suma sus abscisas y ordenadas. ¿Qué relación tiene el resultado con el del apartado a)?

$\vec{v} = (8, 2) - (5, 5) = (3, -3)$

Los puntos de F se convertirán en:

$$A(1, 5) \xrightarrow{\vec{v}(3,\,-3)} A'(4, 2)$$
$$B(4, 5) \longrightarrow B'(7, 2)$$
$$C(2, 4) \longrightarrow C'(5, 1)$$
$$D(1, 4) \longrightarrow D'(4, 1)$$



$\vec{w} = (10, 1) - (12, 3) = (-2, -2)$

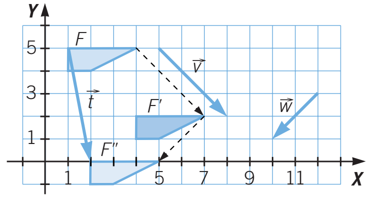
Los puntos de F' se convertirán en:

$$A'(4, 2) \xrightarrow{\vec{w}(-2,\,-2)} A''(2, 0)$$
$$B'(7, 2) \longrightarrow B''(5, 0)$$
$$C'(5, 1) \longrightarrow C''(3, -1)$$
$$D'(4, 1) \longrightarrow D''(2, -1)$$

a) Sí, porque mantienen la forma y el tamaño.
Lo comprobamos con la transformación de un punto de F en F'' y lo aplicamos a los otros tres puntos de F.

$$A(1, 5) \xrightarrow{\vec{t}(x,\, y)} A''(2, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 + x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 5 + y = 0 \rightarrow y = -5 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{t}(1, -5)$$



Si aplicamos el vector $\vec{t}$ a los otros tres puntos de F:

$$B(4, 5) \xrightarrow{\vec{t}(1,\, -5)} B''(5, 0)$$
$$C(2, 4) \longrightarrow C''(3, -1)$$
$$D(1, 4) \longrightarrow D''(2, -1)$$

vemos que coinciden con los puntos obtenidos mediante los dos movimientos.

b) $\vec{v} + \vec{w} = (3, -3) + (-2, -2) = (1, -5)$
Se trata del vector $\vec{t}$ obtenido en el apartado a).

047 ●●

Considera el punto $P(0, 5)$. Si realizamos una traslación de vector $\vec{v}(3, 4)$ y, a continuación, otra de $\vec{w}(-2, -1)$:

a) ¿Cuál es el punto que se obtiene?

b) Si después de realizar las dos traslaciones, se obtuviera el punto $Q(2, -2)$, ¿de qué punto habríamos partido?

a) $P' = (0 + 3 - 2, 5 + 4 - 1) = (1, 8)$

b) $R = (2 - 3 + 2, -2 - 4 + 1) = (1, -5)$

048 ●

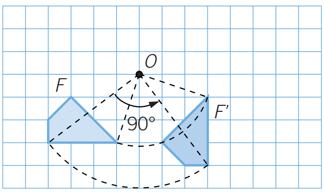
Obtén la figura transformada de F por el giro de centro O y el ángulo indicado.

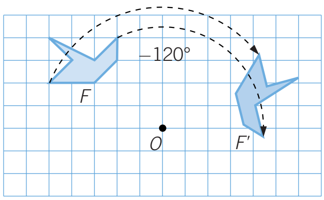
a) Ángulo 90°.

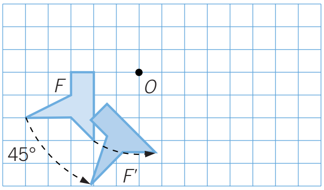
b) Ángulo 45°.

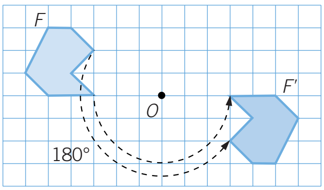
c) Ángulo –120° (120° en el sentido de las agujas del reloj).

d) Ángulo 180°.

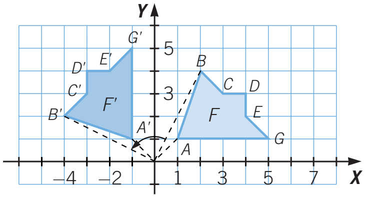
a)


c)


b)


d)


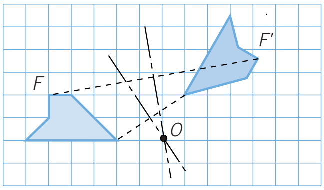
049 Halla la figura *F′*, transformada de *F* por un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo 90°. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de *F*? ¿Y las de sus transformados? ¿Qué relación observas en los resultados?



$A(1, 1) \longrightarrow A'(-1, 1)$
$B(2, 4) \longrightarrow B'(-4, 2)$
$C(3, 3) \longrightarrow C'(-3, 3)$
$D(4, 3) \longrightarrow D'(-3, 4)$
$E(4, 2) \longrightarrow E'(-2, 4)$
$G(5, 1) \longrightarrow G'(-1, 5)$

El transformado de un punto $P(x, y)$, por un giro de centro el origen y ángulo 90°, es $P'(-y, x)$.

050 Determina el centro y el ángulo del giro que transforma *F* en *F′*.



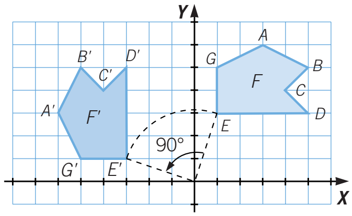
El centro *O* es el de la figura.

El ángulo del giro es de −120° aproximadamente.

051 Halla la figura *F* que ha dado lugar a la figura *F′* al aplicarle un giro de centro el origen y ángulo 90°.

Al aplicar un giro de 90° a los vértices de *F*, se cumple que:

$A(x_1, y_1) \rightarrow A'(-6, 3) \rightarrow x_1 = 3, y_1 = 6$
$B(x_2, y_2) \rightarrow B'(-5, 5) \rightarrow x_2 = 5, y_2 = 5$
$C(x_3, y_3) \rightarrow C'(-4, 4) \rightarrow x_3 = 4, y_3 = 4$
$D(x_4, y_4) \rightarrow D'(-3, 5) \rightarrow x_4 = 5, y_4 = 3$
$E(x_5, y_5) \rightarrow E'(-3, 1) \rightarrow x_5 = 1, y_5 = 3$
$G(x_6, y_6) \rightarrow G'(-5, 1) \rightarrow x_6 = 1, y_6 = 5$



052 Completa esta tabla, referida a distintos giros con centro el origen de coordenadas.

Punto	Ángulo	Punto transformado
A(1, 0)	**90°**	A′(0, 1)
B(3, 0)	**90°**	**B′(0, 3)**
C(1, 2)	**180°**	C′(−1, −2)
D(−3, −4)	**180°**	**D′(3, 4)**
E(0, 3)	90°	**E′(−3, 0)**

053 ●●●

Obtén la figura F', transformada de la figura F mediante un giro de centro O y ángulo 90°. Después, halla la figura F'', transformada de F' por un giro de centro O y ángulo 60°.

a) Halla la transformada de F por un giro de centro O y ángulo 150° (90° + 60°). ¿Qué observas?

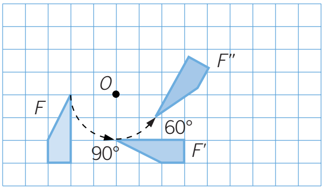
b) Según el resultado anterior, ¿a qué movimiento equivalen dos giros consecutivos con el mismo centro?

c) ¿Y dos giros consecutivos de 270°?

a) La figura transformada por el giro de 150° es igual a la que resulta al aplicar un giro de 90° y luego otro de 60°.

b) Equivalen a un giro de igual centro y de amplitud la suma de las amplitudes.

c) Equivalen a un giro de 540°.

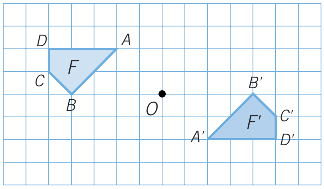


054 ●

Obtén la figura transformada de F por una simetría central de centro O.

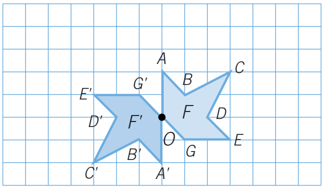
a) Las coordenadas de los vértices de F' serán:

$A(-2, 2) \longrightarrow A'(2, -2)$
$B(-4, 0) \longrightarrow B'(4, 0)$
$C(-5, 1) \longrightarrow C'(5, -1)$
$D(-5, 2) \longrightarrow D'(5, -2)$



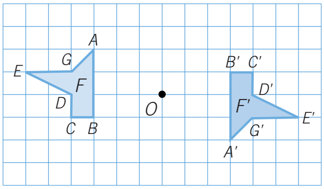
b) Las coordenadas de los vértices de F' serán:

$A(-3, 3) \longrightarrow A'(3, -3)$
$B(-3, -1) \rightarrow B'(3, 1)$
$C(-4, -1) \rightarrow C'(4, 1)$
$D(-4, 0) \longrightarrow D'(4, 0)$
$E(-6, 1) \longrightarrow E'(6, -1)$
$G(-5, 1) \longrightarrow G'(5, -1)$



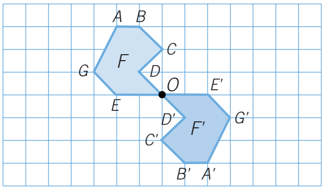
c) Las coordenadas de los vértices de F' serán:

$A(0, 2) \longrightarrow A'(0, -2)$
$B(1, 1) \longrightarrow B'(-1, -1)$
$C(3, 2) \longrightarrow C'(-3, -2)$
$D(2, 0) \longrightarrow D'(-2, 0)$
$E(3, -1) \longrightarrow E'(-3, 1)$
$G(1, -1) \longrightarrow G'(-1, 1)$



d) Las coordenadas de los vértices de F' serán:

$A(-2, 3) \longrightarrow A'(2, -3)$
$B(-1, 3) \longrightarrow B'(1, -3)$
$C(0, 2) \longrightarrow C'(0, -2)$
$D(-1, 1) \longrightarrow D'(1, -1)$
$E(-2, 0) \longrightarrow E'(2, 0)$
$G(-3, 1) \longrightarrow G'(3, -1)$



055 ●

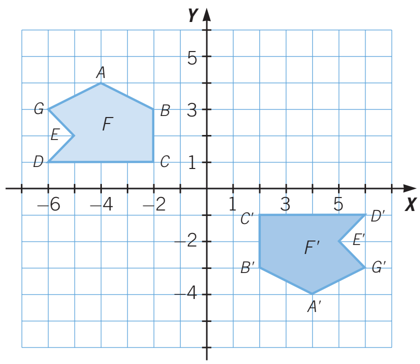
Determina la figura transformada de *F* mediante:

a) Una simetría de centro el origen.

b) Una simetría de eje el eje de ordenadas.

¿Qué relación hay entre las coordenadas de los vértices de *F* y los de sus transformados?

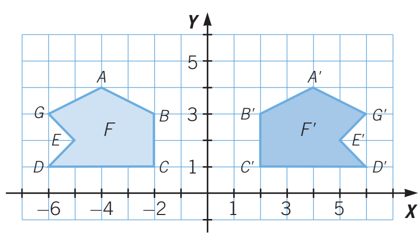
a)



$A(-4, 4) \longrightarrow A'(4, -4)$
$B(-2, 3) \longrightarrow B'(2, -3)$
$C(-2, 1) \longrightarrow C'(2, -1)$
$D(-6, 1) \longrightarrow D'(6, -1)$
$E(-5, 2) \longrightarrow E'(5, -2)$
$G(-6, 3) \longrightarrow G'(6, -3)$

Un punto $P(x, y)$ se transforma en $P'(-x, y)$ al aplicarle una simetría de eje Y.

b)

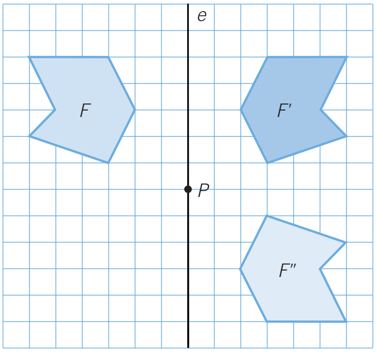


$A(-4, 4) \longrightarrow A'(4, 4)$
$B(-2, 3) \longrightarrow B'(3, 2)$
$C(-2, 1) \longrightarrow C'(1, 2)$
$D(-6, 1) \longrightarrow D'(1, 6)$
$E(-5, 2) \longrightarrow E'(5, 2)$
$G(-6, 3) \longrightarrow G'(3, 6)$

Un punto $P(x, y)$ se transforma en $P'(y, x)$ al aplicarle una simetría de centro el origen.

056 ●●

Determina el centro de simetría que transforma *F* en *F'* y *F'* en *F''*, y el eje de simetría que realiza las mismas transformaciones.



La simetría respecto al eje *e* transforma *F* en *F'*.

Y la simetría respecto al punto *P* transforma *F* en *F''*.

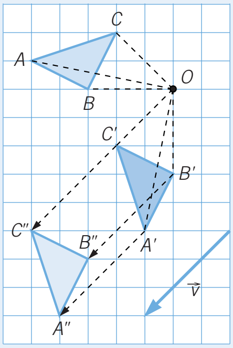
057 Completa la tabla, referida a una simetría de centro el origen de coordenadas.

Punto	Punto transformado
A(1, 0)	A'(−1, 0)
B(1, −2)	B'(−1, 2)
C(−3, 0)	**C'(3, 0)**
D(0, 2)	**D'(0, −2)**

058 Completa la tabla, referida a distintas simetrías.

Punto	Eje de simetría	Punto trasladado
A(1, 3)	Ordenadas	A'(−1, 3)
B(0, 3)	Ordenadas	**B'(0, 3)**
C(2, −1)	Abscisas	C'(2, 1)
D(5, 0)	Abscisas	**D'(5, 0)**

059 HAZLO ASÍ



¿CÓMO SE REALIZA UNA COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS?

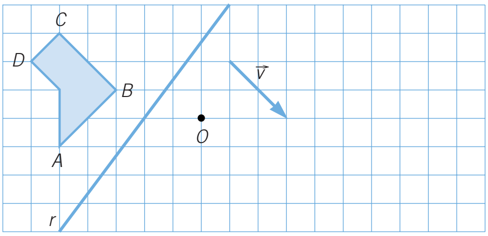
Transforma el triángulo $\widehat{ABC}$ mediante un giro de centro *O* y ángulo 90°, y traslada su transformado mediante el vector $\vec{v}$.

PRIMERO. Se realiza el primer movimiento. En este caso, el giro de 90°.

SEGUNDO. Sobre la figura resultante, *A'B'C'*, se realiza el segundo movimiento. En este caso, la traslación.

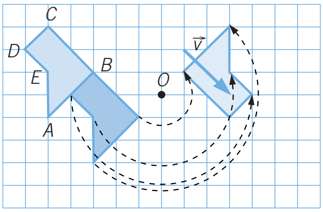
La figura resultante de la composición de movimientos, un giro y una traslación, es el triángulo *A''B''C''*.

060 Aplica a esta figura las siguientes composiciones de movimientos.

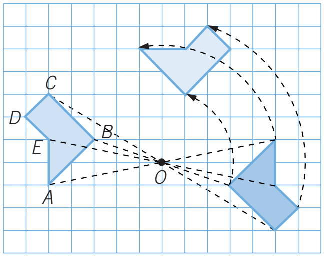


a) Una traslación de vector $\vec{v}$ y un giro de 180°.
b) Una simetría de centro *O* y un giro de 90°.
c) Una simetría respecto a la recta *r* y una traslación de vector $\vec{v}$.

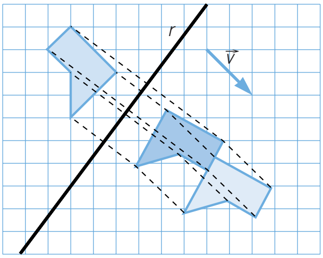
a)



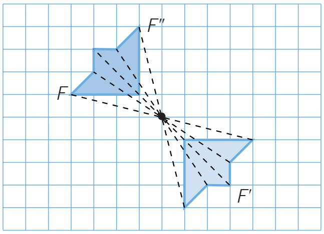
b)



c)

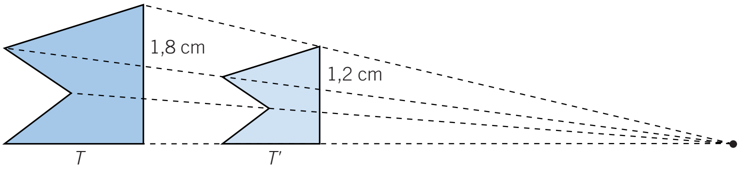


061 ●●● **Dibuja una figura y aplícale dos simetrías centrales consecutivas del mismo centro. ¿Qué relación hay entre la figura original y la última figura que obtienes?**



La figura original y la última figura obtenida son la misma.

062 ● **Las figuras *T* y *T'* son homotéticas. Halla el centro y la razón de la homotecia.**



$$r = \frac{1{,}8}{1{,}2} = 1{,}5$$

063 ●

Calcula la longitud de los lados de un triángulo semejante a otro cuyos lados miden 7, 11 y 13 cm, si la razón de semejanza es $k = 3$.

Los lados serán: $\frac{7}{3} = 2{,}33$ cm; $\frac{11}{3} = 3{,}66$ cm y $\frac{13}{3} = 4{,}33$ cm.

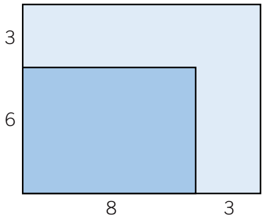
064 ●●

Los seis lados de un hexágono miden 13, 14, 15, 17, 19 y 20 cm. Un lado de otro hexágono semejante mide 80 cm. Si la razón de semejanza es un número entero, ¿cuánto miden los demás lados?

Para que la razón de semejanza sea un número entero, el lado de 80 cm se corresponderá con el de 20 cm, ya que es el único divisor. La razón es 4 y los lados medirán 52, 56, 60, 68, 76 y 80 cm, respectivamente.

065 ●●

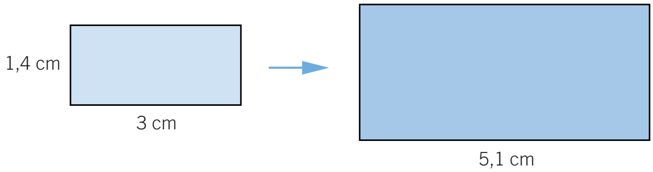
Dibuja un rectángulo de 8 × 6 cm y añádele 3 cm en cada lado. ¿Has obtenido un rectángulo semejante? ¿Por qué?



No son rectángulos semejantes, porque los lados no son proporcionales.

066 ●●

Calcula la razón de semejanza de estos polígonos. ¿Qué relación tienen los perímetros?



La razón es: $5{,}1 : 3 = 1{,}7$.

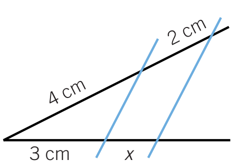
La altura del segundo triángulo es: $1{,}4 \cdot 1{,}7 = 2{,}38$ cm.

La razón de los perímetros es: $14{,}96 : 8{,}8 = 1{,}7$.

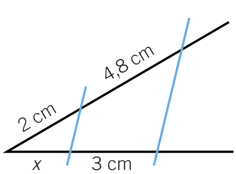
067 ●

Calcula las longitudes desconocidas.

a)



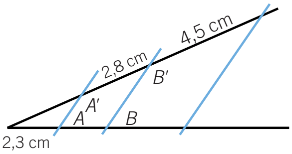
b)



a) $\frac{4}{3} = \frac{2}{x} \rightarrow x = 1{,}5$

b) $\frac{2}{x} = \frac{4{,}8}{3} \rightarrow x = 1{,}25$

068 En la siguiente figura, la razón $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0{,}8$.
Calcula $\overline{OA'}$, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

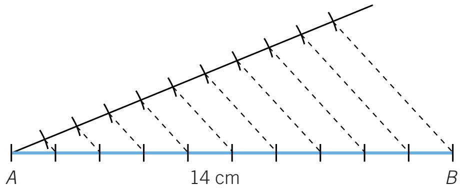


$$0{,}8 = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{2{,}3}{\overline{OA'}} \longrightarrow \overline{OA'} = 2{,}875 \text{ cm}$$

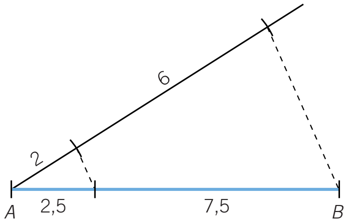
$$0{,}8 = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{2{,}8} \rightarrow \overline{AB} = 2{,}24 \text{ cm}$$

$$0{,}8 = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC}}{4{,}5} \rightarrow \overline{BC} = 3{,}6 \text{ cm}$$

069 Divide gráficamente un segmento AB, con $\overline{AB} = 14$ cm, en 10 partes iguales.



070 Divide gráficamente un segmento AB, con $\overline{AB} = 10$ cm, en partes proporcionales a dos segmentos de medidas 2 cm y 6 cm. Calcula numéricamente las longitudes de los segmentos hallados y compáralas con la solución gráfica.



$$\frac{10}{8} = \frac{x}{2} = \frac{y}{6} \rightarrow x = 2{,}5 \text{ cm};\ y = 7{,}5 \text{ cm}$$

071 La longitud de un coche en la realidad es de 4,2 m. ¿Cuál será su longitud en una maqueta a escala 1 : 200? ¿Y a escala 1 : 400?

En la escala 1 : 200 medirá: 420 : 200 = 2,1 cm.
Y en la escala 1 : 400 medirá: 420 : 400 = 1,05 cm.

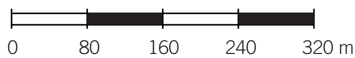
072 ●●

Si tenemos una maqueta del coche anterior que mide 7,5 cm, ¿a qué escala está hecha?

420 : 7,5 = 56. La escala es 1 : 56.

073 ●●

En un mapa aparece esta escala gráfica.



a) ¿Cuál es su escala numérica?

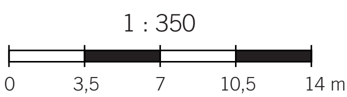
b) ¿Qué distancia real separa a dos puntos que en el mapa distan 8 cm?

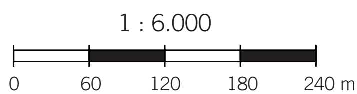
a) 1 : 8.000

b) 8 · 8.000 = 64.000 cm = 640 m

074 ●●

Construye la escala gráfica correspondiente a las escalas numéricas 1 : 350 y 1 : 6.000.





075 ●●

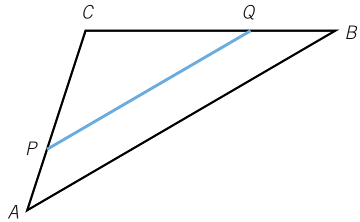
Tenemos dos mapas que representan una región, siendo la escala del primero 1 : 400.000, y la del segundo, 1 : 1.000.000.

a) ¿Cuál de los dos mapas es mayor?

b) Si dos poblaciones se encuentran a 20 km de distancia en la realidad, ¿qué distancia las separa en cada uno de los mapas?

c) En el primer mapa, dos ciudades, *A* y *B*, se encuentran separadas entre sí por 2,3 cm. ¿A qué distancia real se encuentran?

d) ¿A qué distancia estarán esas ciudades en el segundo mapa?



a) Es mayor el primer mapa por tener una escala menor.

b) En el primer mapa: 2.000.000 cm : 400.000 = 5 cm.
En el segundo mapa: 2.000.000 cm : 1.000.000 = 2 cm.

c) 2,3 cm · 400.000 = 920.000 cm = 9,2 km

d) 920.000 cm : 1.000.000 = 0,92 cm = 9,2 mm

076 Tenemos un mapa a escala 1 : 150.000.

a) Si realizamos una fotocopia al 80 %, ¿cuál será la nueva escala?

b) ¿Y si la hacemos al 120 %?

c) Una distancia real de 15 km, ¿qué longitud tendrá en cada uno de los tres mapas?

a) $\dfrac{150.000}{\dfrac{80}{100}} = 187.500$. Escala 1 : 187.500.

b) $\dfrac{150.000}{\dfrac{120}{100}} = 125.000$. Escala 1 : 125.000.

c) 15 km = 1.500.000 cm

$\dfrac{1.500.000}{150.000} = 10$ cm en la escala 1 : 150.000.

$\dfrac{1.500.000}{187.500} = 8$ cm en la escala 1 : 187.500.

$\dfrac{1.500.000}{125.000} = 12$ cm en la escala 1 : 125.000.

077 Queremos hacer un armario en miniatura, semejante a otro cuyas dimensiones son 180 × 110 × 45 cm, de forma que la altura sea 13,5 cm. Calcula su ancho y su profundidad.

La razón de semejanza es: 180 : 13,5 = 13,33.
El ancho es: 110 : 13,33 = 8,25 cm
y la profundidad es: 45 : 13,33 = 3,375 cm.

078 Determina las dimensiones que tendrá una casa rectangular en un plano a escala 1 : 50, si en la realidad su base es la mitad de la altura y su área es 144 m².

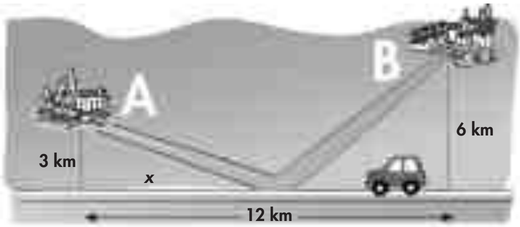
Base: x. Altura: $2x \rightarrow 2x \cdot x = 144 \rightarrow x = 8,49$
Base: 8,49 m. Altura: 16,97 m.

En el plano a escala 1 : 50, las dimensiones son:
Base: 8,49 m : 50 = 17 cm
Altura: 17 cm · 2 = 34 cm

079 Una célula humana tiene un diámetro aproximado de 3,5 millonésimas de metro y, con un microscopio electrónico, se ve con un diámetro de 1,75 cm. Calcula cuántos aumentos tiene el microscopio.

0,0000035 m = 0,00035 cm $\rightarrow \dfrac{1,75}{0,00035} = 5.000$ aumentos

080 Se va a hacer un desvío en una carretera de forma que su trazado sea una línea recta respecto a dos poblaciones *A* y *B*. Calcula en qué punto de la carretera habrá que hacer el desvío para que el trayecto hacia ambas poblaciones sea el mínimo.



El desvío debe hacerse en el punto en el que se formen dos triángulos semejantes.

$$\frac{3}{x} = \frac{12 - x}{6} \rightarrow x^2 - 12x + 18 = 0 \rightarrow x = 10{,}24$$

081 Calcula la altura *x* de una montaña si desde el extremo de su sombra podemos medir la distancia a la cima, y esta es de 2.325 m, y, en ese momento, un bastón de 1 m produce una sombra de 1,1 m.

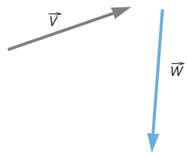
Como los triángulos son semejantes, la hipotenusa del triángulo formado por el bastón es: $\sqrt{1 + 1{,}21} = 1{,}49$ m. Realizamos una regla de tres:

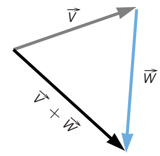
$$\left.\begin{array}{l} 1{,}49 \rightarrow 2.325 \\ 1 \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{2.325}{1{,}49} = 1.560 \text{ m}$$ es la altura de la montaña.

082 Un pájaro está posado sobre la rama de un árbol (punto *A*), situado al borde de un río, y quiere pasar a otro árbol de la orilla opuesta (punto *B*), aprovechando para beber agua sin parar su vuelo. ¿Hacia qué punto del río debe dirigirse para hacer el recorrido más corto?

Debe dirigirse hacia el punto en el que los dos triángulos que se forman con su trayectoria, el río y las alturas de los puntos, sean semejantes. Es el punto donde el pájaro ve reflejado el punto *B* en el agua.

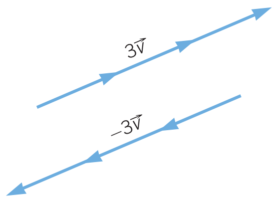
083 ●●● **Para sumar gráficamente los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se coloca el origen de $\vec{w}$ en el extremo de $\vec{v}$, y el vector suma tiene como origen el de $\vec{v}$ y como extremo el de $\vec{w}$.**



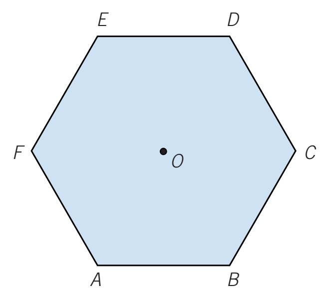


Para multiplicar un vector por un número positivo se dibuja un vector, de igual dirección y sentido que el original, y cuyo módulo sea el del vector original multiplicado por el número.

Si el número es negativo, se hace el mismo proceso pero cambiando el sentido.



Basándote en esto y observando la figura, escribe los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{OD}$ en función de $\vec{p} = \overrightarrow{EF}$ y $\vec{q} = \overrightarrow{ED}$.



$\overrightarrow{AB} = \vec{q}$

$\overrightarrow{BC} = -\vec{p}$

$\overrightarrow{FO} = \vec{q}$

$\overrightarrow{EO} = \vec{p} + \vec{q}$

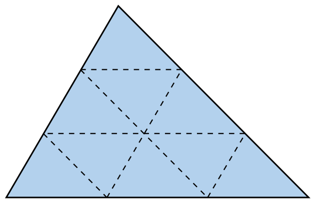
$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{p} = 2 \cdot \vec{p} + \vec{q}$

$\overrightarrow{EB} = 2 \cdot \overrightarrow{EO} = 2 \cdot \vec{p} + 2 \cdot \vec{q}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} = -\vec{p} + \vec{q}$

$\overrightarrow{OD} = -\vec{p}$

084 ●●● **Escribe el perímetro *p*, la altura *h* y el área *a* de los triángulos pequeños en función del perímetro *P*, la altura *H* y el área *A* del triángulo mayor.**



Los lados y la altura de cada triángulo pequeño son un tercio de los del triángulo mayor:

$$h = \frac{H}{3}$$

$$p = \frac{P}{3}$$

$$a = \frac{\text{base} \cdot h}{2} = \frac{\frac{\text{BASE}}{3} \cdot \frac{H}{3}}{2} = \frac{A}{9}$$

EN LA VIDA COTIDIANA

085 ●●●

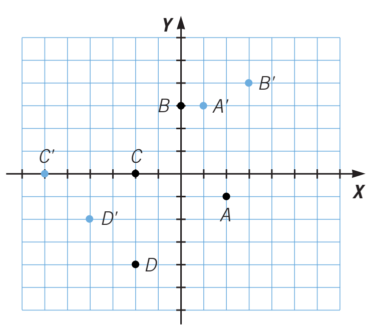
En los aeropuertos se controlan los movimientos de los aviones para coordinar los aterrizajes y despegues.

Este trabajo lo realizan los controladores aéreos, quienes mediante el radar sitúan la posición de los aviones y establecen su trayectoria, posición y velocidad con la que se aproximan a las pistas de aterrizaje.

En la pantalla de un radar se observa, en un momento determinado, la posición de cuatro aviones que siguen trayectorias rectilíneas.

Tras unos minutos, la posición de los aviones ha cambiado y desde la torre de control deben informar de la nueva posición, la trayectoria y la velocidad de cada uno de los aviones.

Describe la trayectoria de los cuatro aviones y compara sus velocidades.



$A(2, -1) \longrightarrow A'(1, 3)$. Trayectoria $(-1, 4)$; módulo $\sqrt{17}$.

$B(0, 3) \longrightarrow B'(3, 4)$. Trayectoria $(3, 1)$; módulo $\sqrt{10}$.

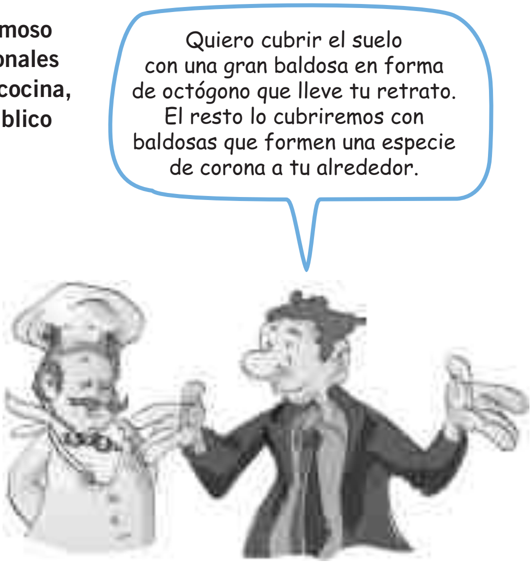
$C(-2, 0) \longrightarrow C'(-6, 0)$. Trayectoria $(-4, 0)$; módulo 4.

$D(-2, -4) \rightarrow D'(-4, -2)$. Trayectoria $(-2, 2)$; módulo $\sqrt{8}$.

La mayor velocidad es la del avión rojo, seguida de la velocidad de los aviones azul claro, azul oscuro y blanco.

086 ●●● **En el restaurante EL MANJAR su famoso *chef* mezcla los productos tradicionales con un toque imaginativo de alta cocina, por lo que es muy valorado por público y críticos.**

El dueño del restaurante, Julián Guisado, ante la nueva reforma que se hará del local, ha ideado una forma de potenciar la figura del *chef* dentro del restaurante.



En el primer diseño que ha realizado ha colocado el octógono en el centro de la sala rectangular, y luego lo ha rodeado con distintas baldosas amarillas, cubriendo completamente la sala.

¿Es posible hacerlo? ¿Cómo debe colocar las coronas para lograrlo?

Sí es posible. Una manera de hacerlo es la siguiente.