

12 Funciones de proporcionalidad

INTRODUCCIÓN

La representación gráfica de funciones de proporcionalidad es una de las formas más directas de entender y verificar la relación entre variables. Estas gráficas se utilizan en el ámbito científico para interpretar y modelizar las leyes que rigen algunos fenómenos.

Conviene mostrar a los alumnos que, conociendo estas funciones y gráficas, se pueden describir fenómenos naturales y, en algunos casos, hasta predecirlos.

Es importante que los alumnos tengan clara la relación entre la expresión algebraica de una función de proporcionalidad y su representación gráfica, y que sean capaces de obtener una cualquiera de ellas a partir de la otra.

El cálculo de la ecuación de una recta presenta también cierta dificultad dependiendo de los datos, por lo que hay que insistir en su obtención, así como aprender a distinguir si dos rectas dadas son paralelas o secantes.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Función de proporcionalidad directa o función lineal:* $y = mx$. Su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el origen de coordenadas.
- *Función afín:* $y = mx + n$. Su gráfica es una recta de pendiente m . La ordenada en el origen es n .
- Si la pendiente de una recta es positiva: $m > 0$, la recta es creciente; si la pendiente de una recta es negativa: $m < 0$, la recta es decreciente.
- *Ecuación de una recta que pasa por dos puntos:* se calcula la pendiente de la recta; se sustituyen las coordenadas de uno de los puntos dados en la ecuación general de la recta, y se obtiene la ordenada en el origen; luego, con los valores de la pendiente y la ordenada, se escribe la ecuación de la recta.
- *Rectas paralelas:* tienen igual pendiente.
- *Rectas secantes:* tienen distinta pendiente. Se cortan en un punto que se obtiene gráfica o analíticamente.

| OBJETIVOS | CONTENIDOS | PROCEDIMIENTOS |
|---|---|---|
| 1. Conocer la función de proporcionalidad directa. | <ul style="list-style-type: none"> • Función lineal o de proporcionalidad directa. • Pendiente de una recta. • Representación gráfica. | <ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento y representación de funciones de la forma $y = mx$. • Resolución de problemas reales representados por funciones lineales. |
| 2. Conocer la función afín. | <ul style="list-style-type: none"> • Función afín. • Pendiente de una recta. • Ordenada en el origen. • Representación gráfica. | <ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento y representación de funciones de la forma $y = mx + n$. • Comparación de rectas en función de su pendiente, dependiendo del crecimiento y decrecimiento. |
| 3. Obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. | <ul style="list-style-type: none"> • Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. | <ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, conocidos su pendiente y la ordenada en el origen, o su pendiente y un punto por donde pasa. |
| 4. Distinguir las rectas paralelas y las rectas secantes. | <ul style="list-style-type: none"> • Posición relativa de dos rectas respecto a sus pendientes. • Punto de corte de dos rectas secantes. | <ul style="list-style-type: none"> • Determinación de si dos rectas son paralelas o secantes, de manera gráfica y analítica. • Cálculo del punto de corte. |

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Una **función de proporcionalidad directa o función lineal** se expresa de la forma:

$$y = m \cdot x, \text{ siendo } m \text{ un número cualquiera.}$$

- La **representación gráfica** de estas funciones es una **recta que pasa por el origen de coordenadas**.
- La inclinación de esta recta respecto al eje de abscisas (X) viene representada por el número m , que recibe el nombre de **pendiente**. Cuanto mayor sea m , más inclinada estará la recta respecto del eje X , es decir, mayor será el ángulo que esta recta forma con la horizontal.
- Si entre dos magnitudes existe una **relación de proporcionalidad directa**, la función que representa dicha relación es una función lineal.

EJEMPLO

Observa la tabla y determina si la relación entre las magnitudes es de proporcionalidad directa.

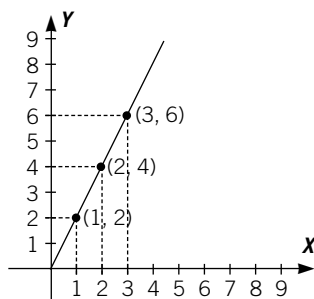
| | | | | | | |
|----------------------------|---|---|---|---|----|----|
| BOLSAS DE PALOMITAS | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| IMPORTE (€) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |

- El número de bolsas de palomitas y el dinero que cuestan son magnitudes directamente proporcionales, ya que al comprar el doble de bolsas se duplicará el coste...
- La constante de proporcionalidad es: $m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \dots = 2$.
- La expresión algebraica de la función se puede expresar de la forma:

$$y = m \cdot x \rightarrow y = 2 \cdot x$$

donde x es el número de bolsas de palomitas e y es el importe en euros.

- La representación gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene por pendiente $m = 2$. Para representarla hay que señalar en unos ejes de coordenadas los puntos (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)... y unirlos mediante una recta.



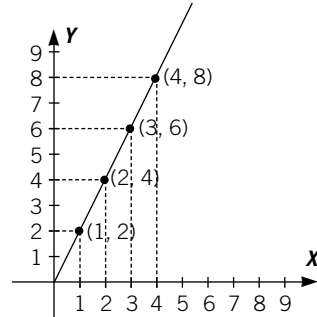
- 1** Señala si estos pares de valores son magnitudes directa o inversamente proporcionales. ¿Cuáles se pueden representar mediante una función lineal?

- | | |
|----------------------------|---|
| a) Un número y su opuesto. | e) Un número y el doble de su inverso. |
| b) Un número y su inverso. | f) Un número y el triple del opuesto de su inverso. |
| c) Un número y su triple. | g) Un número y el doble del inverso del opuesto. |
| d) Un número y su mitad. | h) Un número y el inverso de su triple. |

- 2 Compara las funciones que representan la relación entre el número de fotocopias realizadas en varios establecimientos y su importe. Obtén la tabla de valores, la función lineal y la gráfica correspondiente.

Establecimiento 1: cada fotocopia cuesta 2 céntimos de euro.

| N.º DE FOTOCOPIAS | IMPORTE (cént.) |
|-------------------|-----------------|
| 1 | $1 \cdot 2 = 2$ |
| 2 | $2 \cdot 2 = 4$ |
| 3 | $3 \cdot 2 = 6$ |
| 4 | $4 \cdot 2 = 8$ |
| ... | ... |

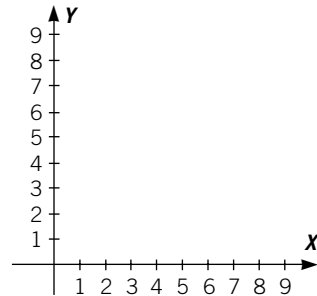


Constante de proporcionalidad $\rightarrow m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$

Función de proporcionalidad o función lineal $\rightarrow y = 2x$

Establecimiento 2: cada fotocopia cuesta 3 céntimos de euro.

| N.º DE FOTOCOPIAS | IMPORTE (cént.) |
|-------------------|-----------------|
| 1 | $1 \cdot 3 = 3$ |
| | |
| | |
| | |
| | |

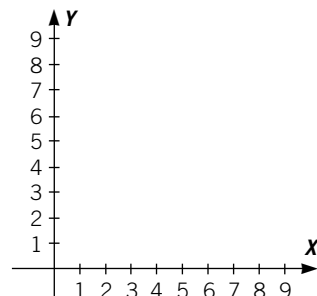


Constante de proporcionalidad $\rightarrow m =$

Función de proporcionalidad o función lineal $\rightarrow y =$

Establecimiento 3: cada fotocopia cuesta 1,5 céntimos de euro.

| N.º DE FOTOCOPIAS | IMPORTE (cént.) |
|-------------------|---------------------|
| 1 | $1 \cdot 1,5 = 1,5$ |
| 2 | $2 \cdot 1,5 = 3$ |
| | |
| | |
| | |



Constante de proporcionalidad $\rightarrow m =$

Función de proporcionalidad o función lineal $\rightarrow y =$

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Una **función afín** se expresa de la forma:

$$y = m \cdot x + n, \text{ siendo } m \text{ y } n \text{ dos números cualesquiera.}$$

m: pendiente de la recta.

Si $m > 0$, la recta es **creciente**.

Si $m < 0$, la recta es **decreciente**.

n: ordenada en el origen.

- La representación gráfica de estas funciones es una recta que no pasa por el origen de coordenadas, sino por el punto $(0, n)$.
- Las funciones de proporcionalidad directa o **funciones lineales** son un caso particular de las funciones afines cuando $n = 0$.

EJEMPLO

Dadas las funciones $y = 2x - 1$ e $y = -3x + 4$:

- Determina su pendiente.
- Halla la ordenada en el origen.
- Representálas gráficamente.
- ¿Cuál de ellas tiene mayor pendiente?
- ¿Cómo son las rectas, crecientes o decrecientes?

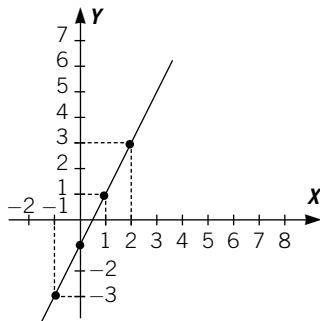
Función 1

a) $m_1 = 2$

b) $n_1 = -1$

c)

| x | y |
|----|----|
| 0 | -1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| -1 | -3 |

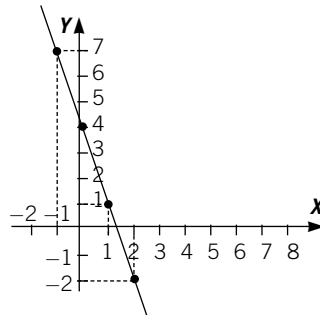


Función 2

$m_2 = -3$

$n_2 = 4$

| x | y |
|----|----|
| 0 | 4 |
| 1 | 1 |
| 2 | -2 |
| -1 | 7 |



d) $m_1 > m_2$

e) $m_1 > 0 \rightarrow$ Creciente

$m_2 < 0 \rightarrow$ Decreciente

1 Clasifica las funciones en lineales y afines, y escribe el valor de la pendiente y la ordenada en el origen.

a) $y = -0,7x \rightarrow$ Función lineal
 $m = -0,7 \quad n = 0$

c) $y = -\frac{1}{3}x$

b) $y = \frac{1}{2}x + 3$

d) $y = -3,5x - 3$

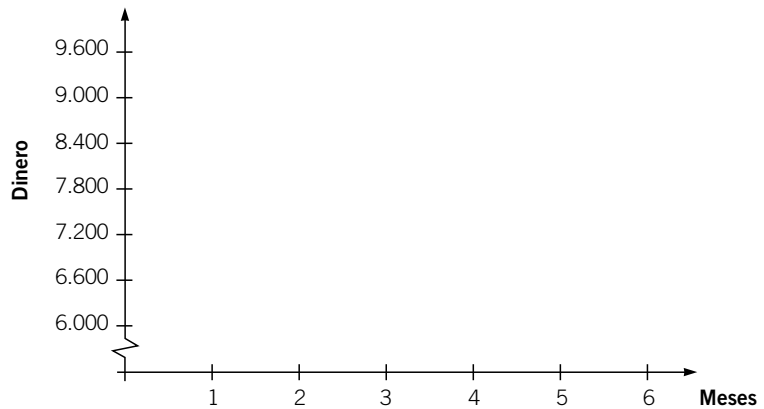
2 Rosa ha pagado 6.000 € de entrada para comprar un piso y tiene que abonar 600 € mensuales.

a) Haz una tabla que refleje lo que ha pagado al cabo de 1, 2, 3, ..., 6 meses.

| | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|
| MESES | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| DINERO | | | | | | | |

b) Escribe una función que exprese el dinero pagado en función del número de meses transcurridos.

c) Representa la gráfica de la función.



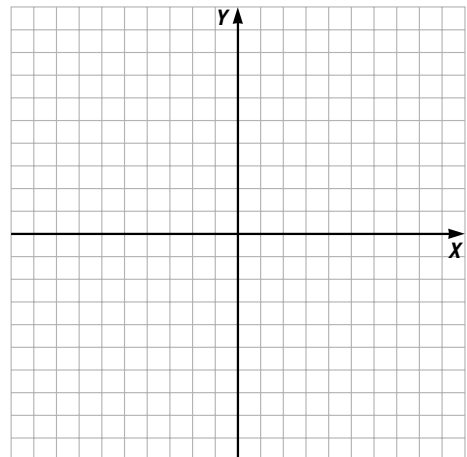
d) ¿Cuál es la pendiente?

e) ¿Y la ordenada en el origen?

3 La pendiente de una función de la forma $y = mx + n$ es 3 y su ordenada en el origen es 2. Representala.

a) Escribe la función.

b) Halla el valor de y para $x = -2,5$.



4 Obtén la tabla de valores de estas funciones y represéntalas en los ejes de coordenadas.

$$y = 5x - 1$$

$$y = 3x - 1$$

$$y = x - 1$$

$$y = -x - 1$$

$$y = -3x - 1$$

Función 1

| x | $y = 5x - 1$ |
|----|------------------------------------|
| -3 | $5 \cdot (-3) - 1 = -15 - 1 = -16$ |
| -2 | $5 \cdot (-2) - 1 = -10 - 1 = -11$ |
| -1 | $5 \cdot (-1) - 1 = -5 - 1 = -6$ |
| 0 | $5 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$ |
| 1 | $5 \cdot 1 - 1 = 5 - 1 = 4$ |
| 2 | $5 \cdot 2 - 1 = 10 - 1 = 9$ |
| 3 | $5 \cdot 3 - 1 = 15 - 1 = 14$ |

Función 2

| x | $y = 3x - 1$ |
|----|--------------|
| -3 | |
| -2 | |
| -1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |

Función 3

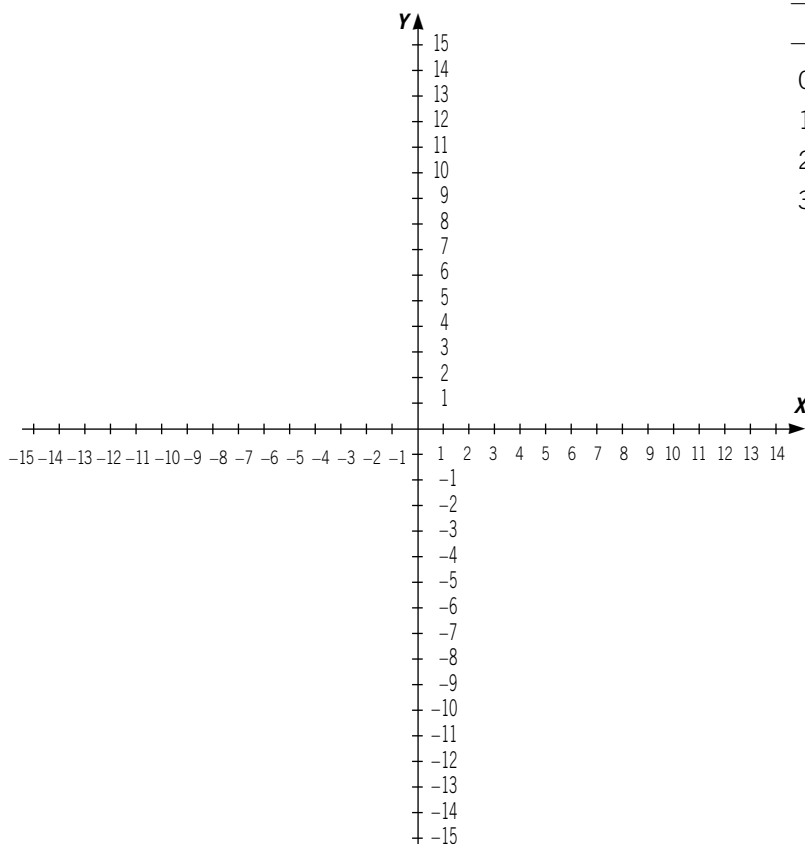
| x | $y = x - 1$ |
|----|-------------|
| -3 | |
| -2 | |
| -1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |

Función 4

| x | $y = -x - 1$ |
|----|--------------|
| -3 | |
| -2 | |
| -1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |

Función 5

| x | $y = -3x - 1$ |
|----|---------------|
| -3 | |
| -2 | |
| -1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |



De las funciones anteriores:

- ¿Cuáles son crecientes?
- ¿Y cuáles son decrecientes?
- ¿Hay alguna característica en la expresión de las funciones: $y = 5x - 1$, $y = 3x - 1$, $y = x - 1$, $y = -x - 1$, $y = -3x - 1$ que indique cuáles son crecientes y decrecientes?

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Para representar una recta basta con conocer dos puntos por los que pasa.
- Para hallar la ecuación de la recta $y = mx + n$ que pasa por dos puntos, conocidas sus coordenadas, $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$, se procede así:

1.º **Calculamos el valor de la pendiente** $\rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2.º Sustituimos las coordenadas de uno de los puntos en la ecuación general de la recta, **y obtenemos el valor de la ordenada en el origen, n** :

$$y_1 = mx_1 + n \rightarrow n = y_1 - mx_1$$

o bien:

$$y_2 = mx_2 + n \rightarrow n = y_2 - mx_2$$

3.º **Sustituimos los valores obtenidos** para la pendiente (m) y la ordenada en el origen (n), en la ecuación general de la recta.

EJEMPLO

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(4, 0)$.

1.º Calculamos el valor de la pendiente:

$$m = \frac{0 - 2}{4 - 3} = -2$$

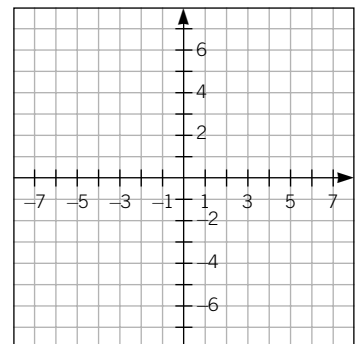
2.º Obtenemos el valor de la ordenada en el origen sustituyendo, por ejemplo, el punto A:

$$2 = -2 \cdot 3 + n \rightarrow n = 8$$

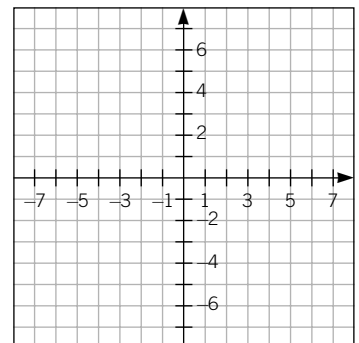
3.º Sustituimos los valores obtenidos:

$$y = mx + n \xrightarrow{m = -2, n = 8} y = -2x + 8$$

1 Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(-3, -4)$ y represéntala.



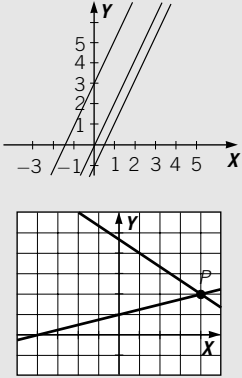
2 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -1)$ y tiene de pendiente $m = -2$. Haz una tabla de valores y represéntala.



ADAPTACIÓN CURRICULAR

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.
- Las rectas secantes no tienen la misma pendiente.
- Las rectas secantes se cortan en un punto. Podemos calcular este punto de dos formas:
 - **Método gráfico:** dibujamos las rectas y observamos en qué punto se cortan.
 - **Método algebraico:** resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las dos rectas.



EJEMPLO

Determina si las siguientes rectas son paralelas o secantes.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x + 3 \rightarrow m = 2 \\ y = -x + 5 \rightarrow m = -1 \end{array} \right\} \text{Sus pendientes son distintas} \rightarrow \text{Rectas secantes}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x + 5 \rightarrow m = 3 \\ y = 3x - 0,5 \rightarrow m = 3 \end{array} \right\} \text{Sus pendientes son iguales} \rightarrow \text{Rectas paralelas}$$

1 Une mediante flechas las rectas paralelas.

| |
|---------------|
| $y = 5x - 2$ |
| $y = 3x + 5$ |
| $y = -3x + 5$ |
| $y = -x + 2$ |

| |
|---------------|
| $y = -3x + 1$ |
| $y = -x + 7$ |
| $y = 3x - 2$ |
| $y = 5x + 1$ |

EJEMPLO

Halla gráfica y algebraicamente el punto de corte de las rectas $y = x - 1$ e $y = -x + 3$.

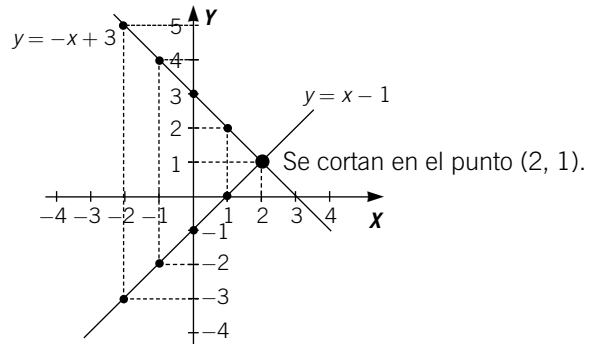
Método gráfico. Hallamos la tabla de valores de cada función y las representamos en los ejes de coordenadas.

$y = x - 1$

| x | y |
|----|----|
| -2 | -3 |
| -1 | -2 |
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |

$y = -x + 3$

| x | y |
|----|---|
| -2 | 5 |
| -1 | 4 |
| 0 | 3 |
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |



Método algebraico. Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = -x + 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x - 1 = -x + 3 \\ x + x = 3 + 1 \rightarrow x = 2 \\ y = x - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array} \rightarrow \text{Se cortan en el punto } (2, 1).$$

- 2 Calcula de forma gráfica y algebraica el punto de corte de las rectas $y = 2x - 1$ e $y = 3x + 1$.

- 3 Calcula de forma gráfica y algebraica el punto de corte de las rectas $y = -7x + 2$ e $y = 3x - 1$.

- 4 Representa las siguientes funciones. Escribe su pendiente y señala cuáles son paralelas o secantes.

$$y = -x + 1$$

$$y = 3x + 2$$

$$y = -x + 5$$

$$y = x + 1$$

- 5 Halla la ecuación de la recta paralela a $y = 5x - 3$ y que pasa por el origen de coordenadas.

- 6 Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(5, 0)$ y tiene la misma pendiente que la recta $y = -3x - 6$.