Unidad Didáctica 4

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

3º ESO

Ejercicios Resueltos

TEMA 4: POLINOMIOS

1.- Si en una librería, el precio de un libro es x euros y el de una libreta es 7 € menos, expresa algebraicamente lo que cuestan:

Cuatro libros	$4x$
Tres libretas	$3(x-7) = 3x - 21$
La mitad de lo que cuestan 5 libretas	$\frac{5}{2}(x-7)$
Tres libros y 2 libretas	$3x + 2(x-7) = 5x - 14$
Cinco libros con un descuento del 20%	$5 \cdot (0,8x) = 4x$
Seis libros y una libreta con rebaja de 5€	$6x + (x-7) - 5 = 7x - 12$

2.- Considerando un rebaño de "x" ovejas, expresa en lenguaje algebraico:

Número de patas del rebaño	$4x$
Número de orejas del rebaño	$2x$
Número de patas si se mueren 6 ovejas	$4(x-6)$
número de ovejas si se mueren la tercera parte	$2x/3$
La mitad de sus orejas	x
La cuarta parte de sus patas	x

3.- Considerando que Wiam tiene "x" euros, expresa en función de x:

Enrique tiene 100 euros más que Wiam	$x + 100$
Susana tiene el doble de Enrique	$2(x+100) = 2x + 200$
Fátima tiene 400 euros menos que Enrique	$2x + 200 - 400 = 2x - 200$
Manolo tiene el triple que Wiam y Enrique juntos	$3(x + x + 100) = 6x + 300$
Adam tiene la mitad de Susana y Fátima	$\frac{2x+200+2x-200}{2} = 2x$
El dinero de todos juntos	$x + x + 100 + 2x + 200 + 2x - 200 + 6x + 300 + 2x = 14x + 400$

4.- Expresa en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

El doble de un número	Si x es el número, el doble será: $2x$
El cociente entre dos números correlativos:	Si el primero es x, el siguiente será x+1; $(x+1)/x$
Un número impar	Si 2x son los pares, los impares serán: $2x-1$
Un múltiplo de 5	Los múltiplos de 5 son: $5x$
El cuadrado de la diferencia de dos nº consecutivos:	1

5.- Expresa en lenguaje algebraico:

Los tres quintos de un número menos uno	$3/5\,x - 1$
Si en un gallinero hay *x* gallinas, entre picos y patas son:	$3x$
Un chico tiene *x* años, otro 6 menos y otro, 3 más, entre los tres tienen:	$3x - 3$
Un bidón tiene *x* litros. Se extrae 1/5 del total y después 10 litros. Quedan:	$4/5\,x - 10$
Carmen tiene *x* años y su padre, el triple. Dentro de 5 años, la suma de sus edades será:	$4x + 10$
Perímetro de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 4 cm menos que los otros	$3x - 4$
La tercera parte del área del rectángulo cuya base es el doble que su altura	$2/3\,x^2$
Lo que pago por una camisa si me descuentan el 20% de su precio en las rebajas	$0{,}8\,x$

6.- Completa la siguiente tabla de monomios:

Monomio	Grado	Parte literal	Coeficiente	Monomio Semejante
$4x^5$	5	x^5	4	$2x^5$
$-p$	1	p	-1	$5p$
-7	0	/	-7	12
$3x^3y^5$	8	x^3y^5	3	$13x^3y^5$
$8x^4yz^2$	7	x^4yz^2	8	$28x^4yz^2$

7.- Completa la siguiente tabla de polinomios:

Polinomio	Grado	¿Completo?	Término Independiente	P(0)=	P(−1)=
$7x^3+5x^4-3x^2+7$	4	No (x)	7	7	2
$5+3x-9x^4+5x^3$	4	No (x^2)	5	5	-12
$3x-3x^2-3+3x^3$	3	Si	-3	-3	-12
$3y^2+4y-3y^2-6$	1	Si	-6	-6	-10

8.- Traduce del lenguaje algebraico sabiendo que x es la edad de Carlos e y la edad de Andrés

$\dfrac{x+y}{x-y}$	El cociente de la suma de las edades de Carlos y Andrés entre su diferencia.

9.- Completa la siguiente tabla:

Monomio	Coeficiente	Parte Literal	Grado	Monomio Semejante
$3x^2$	3	x^2	2	$543x^2$
$-9mn^3$	-9	mn^3	4	$-8mn^3$
$5x^5$	5	x^5	5	$3x^5$
$x^3y^2z^5$	1	$x^3y^2z^5$	10	$9x^3y^2z^5$

10.- Completa la siguiente tabla de polinomios:

Polinomio	Grado	¿Completo?	Término Independiente	P(0)=
$7x^3+5x^5-3x^2+3$	5	No (x^4)	3	3
$5+3x-9x^4+x^2-5x^3$	4	Si	5	5
$3x-3x^2-3+3x^3$	3	Si	-3	-3
$2y^2-5y-8$	2	Si	-8	-8

11.- Calcula el resultado de las siguientes operaciones de monomios:

a) $2x+2x-3x=x$

b) $\dfrac{6xy^3z}{36xy}=\dfrac{y^2z}{6}$

c) $\dfrac{11xzm}{3xz}+4m=\dfrac{11}{3}m+4m=\dfrac{23}{3}m$

d) $\dfrac{1}{2}x^2a\cdot\dfrac{3}{7}xy=\dfrac{3}{14}ax^3y$

12.- Dados los polinomios $\begin{cases} p(x)=4x^5+3x^3-2x^2+5 \\ q(x)=-5x^3-2x^2+3x \\ r(x)=2x^2-x+3 \end{cases}$ calcula: $\begin{cases} a)\ 2p(x)-3q(x)+r(x)= \\ b)\ \left[q(x)\right]^2= \\ c)\ p(x):r(x)= \end{cases}$

a) $2p(x)-3q(x)+r(x)=2(4x^5+3x^3-2x^2+5)-3(-5x^3-2x^2+3x)+2x^2-x+3=$
$=8x^5+6x^3-4x^2+10+15x^3+6x^2-9x+2x^2-x+3=8x^5+21x^3+4x^2-10x+13$

b) $\left[q(x)\right]^2=(q(x))\cdot(q(x))=(-5x^3-2x^2+3x)\cdot(-5x^3-2x^2+3x)=25x^6+10x^5-15x^4+$
$+10x^5+4x^4-6x^3-15x^4-6x^3+9x^2=25x^6+20x^5-26x^4-12x^3+9x^2$

c) $p(x):r(x)=$

$$\begin{array}{cccccc|l}
4x^5 & +0x & +3x^3 & -2x^2 & +0x & +5 & 2x^2-x+3 \\ \cline{7-7}
\underline{-4x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-6x^3} & \downarrow & & & 2x^3+x^2-x-3 \\
0 & +2x^4 & -3x^3 & -2x^2 & & & \\
 & \underline{-2x^4} & \underline{+x^3} & \underline{-3x^2} & \downarrow & & \\
 & 0 & -2x^3 & -5x^2 & +0x & \downarrow & C(x)=2x^3+x^2-x-3 \\
 & & \underline{+2x^3} & \underline{-x^2} & \underline{+3x} & 5 & \\
 & & 0 & -6x^2 & +3x & +5 & R(x)=14 \\
 & & & \underline{6x^2} & \underline{-3x} & \underline{+9} & \\
 & & & & & +14 &
\end{array}$$

13.- Completa los términos que faltan con la ayuda de las identidades notables:

a) $(3x+4)^2=9x^2+24x+16$

b) $(3x^2-2)^2=9x^4-12x^2+4$

c) $(3x^3+5)\cdot(3x^3-5)=9x^6-25$

14.- Dados los polinomios $\begin{cases} p(x)=3x^5-x^4+8x^2-5x-2 \\ q(x)=-5x^3-2x^2+3x \\ r(x)=x^2-x+1 \end{cases}$ calcula: $\begin{cases} a)\ 2p(x)-3q(x)+r(x)= \\ b)\ 4\cdot p(x)\cdot q(x)= \\ c)\ p(x):r(x)= \end{cases}$

$$a)\ 2p(x)-3q(x)+r(x)=2\cdot\left(3x^5-x^4+8x^2-5x-2\right)-3\cdot\left(-5x^3-2x^2+3x\right)+\left(x^2-x+1\right)=\cancel{6x^5}-\cancel{2x^4}+\cancel{16x^2}$$
$$-\cancel{10x}-\cancel{4}+\cancel{15x^3}+\cancel{6x^2}-\cancel{9x}+\cancel{x^2}-\cancel{x}+\cancel{1}=6x^5-2x^4+15x^3+23x^2-20x-3$$

$$b)\ 4\cdot p(x)\cdot q(x)=4\cdot\left[\left(3x^5-x^4+8x^2-5x-2\right)\cdot\left(-5x^3-2x^2+3x\right)\right]=4\cdot\left[-\cancel{15x^8}-\cancel{6x^7}+\cancel{9x^6}+\cancel{5x^7}+\cancel{2x^6}\right.$$
$$\left.-\cancel{3x^5}-\cancel{40x^5}-\cancel{16x^4}+\cancel{24x^3}+\cancel{25x^4}+\cancel{10x^3}-\cancel{15x^2}+\cancel{10x^3}+\cancel{4x^2}-\cancel{6x}\right]=4\cdot\left(-15x^8-x^7+11x^6-43x^5\right.$$
$$\left.+9x^4+44x^3-11x^2-6x\right)=-60x^8-4x^7+44x^6-172x^5+36x^4+176x^3-44x^2-24x$$

$$c)\ p(x):r(x)=\begin{cases} C(x)=3x^3+2x^2-x+5 \\ R(x)=x-7 \end{cases}$$

$3x^5$	$-x^4$	$+0x^3$	$+8x^2$	$-5x$	-2	x^2-x+1
$-3x^5$	$+3x^4$	$-3x^3$	$\downarrow$			$3x^3+2x^2-x+5$
0	$2x^4$	$-3x^3$	$+8x^2$		$\downarrow$	Cociente
	$-2x^4$	$+2x^3$	$-2x^2$	$\downarrow$		
	0	$-x^3$	$+6x^2$	$-5x$		
		$+x^3$	$-x^2$	$+x$	$\downarrow$	
		0	$+5x^2$	$-4x$	-2	
			$-5x^2$	$+5x$	-5	
			0	x	-7	
				Resto		

15.- Si nos juntas nos anulas, si nos multiplicas nos transformas y si nos divides nos conviertes en –1, ¿Qué monomios somos?

Si hacemos una división y el resultado es –1, quiere decir que las cosas que dividimos son iguales en valor absoluto, lo único que las diferencia es el signo. Además, al juntarlas (sumarlas) se anulan, luego queda claro que son dos monomios opuestos.

Somos dos monomios Opuestos

16.- Calcula los siguientes productos notables:

$a)\left(x+4\right)^2=x^2+8x+16$ $\qquad b)\left(x+2\right)\cdot\left(x-2\right)=x^2-4$ $\qquad c)\left(x-3\right)^2=x^2-6x+9$

17.- Extrae factor común en la siguiente expresión algebraica:

$$8x^2yz^4+16x^2yz^3-18x^3y^2z^2=2^3x^2yz^4+2^4x^2yz^3-2\cdot3^2x^3y^2z^2=2x^2yz^2\left(4z^2+8z-9xy\right)$$

18.- Simplifica la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{3x^3-9x^2+6x}=$

Empezaremos sacando factor común tanto en el numerador, como en el denominador:

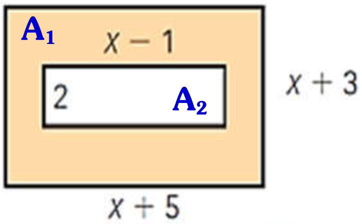
$$\frac{x^4-3x^3+2x^2}{3x^3-9x^2+6x}=\frac{x^2\cdot\left(x^2-3x+2\right)}{3x\cdot\left(x^2-3x+2\right)}=\frac{x\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{\left(x^2-3x+2\right)}}{3\cancel{x}\cdot\cancel{\left(x^2-3x+2\right)}}=\frac{x}{3}$$

Como podemos observar, no ha hecho falta hacer Ruffini puesto que, al sacar fator común, ya podíamos ver lo que se repetía tanto arriba como abajo, así que, simplificando llegamos a x/3.

19.- Completa la siguiente tabla de polinomios:

Polinomio	Grado	Término Independiente	¿Completo?	P(-3)=
$5x^3+2x^4-x^2+12$	4	12	No (x)	30
$5+3x-9x^4+5x^2$	4	5	No (x^3)	-706
$3x-3x^2-3+3x^3$	3	-3	Si	-120
$3y^2+4y$	2	0	No (T.ind)	15

20.- Expresa el área de la siguiente figura mediante un polinomio.

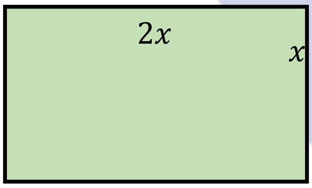


El área de la figura marrón la vamos a calcular como la diferencia entre el área del rectángulo grande (exterior y marrón) y el rectángulo pequeño (interior, blanco), por tanto:

$$A(x)=A_1(x)-A_2(x)=(x+5)\cdot(x+3)-2\cdot(x-1)=$$
$$=x^2+5x+3x+15-2x+2=x^2+6x+17$$

Por tanto, el área pedida es $A(x) = x^2 + 6x + 17$

21.- Expresa el área total y el perímetro de la siguiente figura mediante una expresión algebraica y calcula el área para x=2.



El perímetro de cualquier figura geométrica es la suma de sus lados, por tanto:

$$P(x)=2x+2x+x+x=6x$$

Y el área, es el producto de la base por su altura:

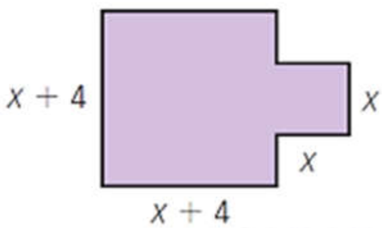
$$A(x)=base\ x\ altura=2x\cdot x=2x^2$$

Para calcular el área para x=2, solo tenemos que calcular el valor numérico del polinomio A(x) en x=2:

$$A(x)=2x^2 \quad \rightarrow \quad A(2)=2\cdot(2)^2=2\cdot 4=8 \text{ unidades de área}$$

Así que, el perímetro es $6x$ y el área $2x^2$, y para x=2 el área es de 8 u.a.

22.- Expresa algebraicamente el perímetro y el área de la figura siguiente.



El perímetro es la suma de sus lados:

$$P(x) = 4\cdot(x+4) + 2x = 6x + 16$$

Y el área es la suma de las áreas de cada uno de los cuadrados:

$$A(x) = (x+4)^2 + x^2 = x^2 + 8x + 16 + x^2 = 2x^2 + 8x + 16$$

23.- Elena es profesora de 2º ESO y mientras corregía un examen se encontró con lo siguiente:

$$(2x-3)^2=4x^2+9$$

Razona por qué se trata de un grave error e indica cuál sería la respuesta correcta.

Es un error grave porque se trata de una identidad notable, más concretamente el cuadrado de una diferencia, cuyo desarrollo es el cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo menos el doble del primero por el segundo.

$$(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

Así que faltada el término cruzado.

24.- Relaciona mediante flechas cada enunciado con su expresión algebraica.

El doble de un número más dos unidades	$x-5$
Un número disminuido en cinco unidades	$\frac{x}{3}$
La tercera parte de un número	$2x+2$
El cubo de un número	$x+10$
El doble de un número	$2x$
Un número aumentado en diez unidades	x^3
La diferencia de dos números	$x+1$
El número siguiente a un número entero	$x-y$

25.- Calcula mediante la *regla de Ruffini* la siguiente división, indicando el cociente y el resto.

$$\left(3x^3+2x^2+2x-1\right) : (x-1)$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & & 3 & 5 & 7 \\ \hline & 3 & 5 & 7 & \boxed{6} \end{array}$$

$$C(x) = 3x^2+5x+7 \qquad y \qquad R(x) = 6$$

26.- Reduce la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{x^2-1}{x^3+2x^2-x-2} =$

$$\frac{x^2-1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x+1)}\cdot(x+2)} = \frac{1}{(x+2)}$$

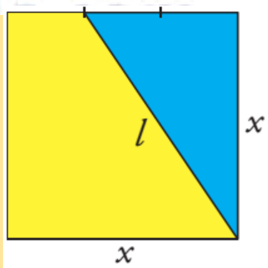
27.- Fíjate en el cuadrado ucraniano y expresa algebraicamente:

a) El área del triángulo Azul.

b) El área del trapecio amarillo.

c) La longitud de l.

d) Calcula la longitud de l, si x=5 cm.



a) La base del triángulo es x y la altura es 2/3 de x, por tanto, su área viene dada por:

$$A(x)_{Triángulo} = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{2}{3}x = \frac{x^2}{3} \quad \rightarrow \quad A(x)_{Triángulo} = \frac{x^2}{3}$$

b) El área de le trapecio amarillo se puede calcular de varias formas, pero la mas fácil es restarle al cuadrado el área del triángulo, por tanto, su área será:

$$A_{Trapecio}=A_{Cuadrado}-A_{Triángulo}=x^2-\frac{x^2}{3}=\frac{2x^2}{3} \quad \rightarrow \quad A(x)_{Trapecio}=\frac{2x^2}{3}$$

c) La longitud de l la podemos calcular mediante el teorema de Pitágoras:

$$l^2=x^2+\left(\frac{2}{3}x\right)^2=x^2+\frac{4}{9}x^2=\frac{13}{9}x^2 \quad \rightarrow \quad l(x)=\frac{13}{9}x^2$$

d) Si x=5, entonces el valor de l será:

$$Si \qquad l(x)=\frac{13}{9}x^2 \quad \rightarrow \quad l(5)=\frac{13}{9}(5)^2=\frac{13\cdot 25}{9}=\frac{325}{9}=36,11 \quad \rightarrow \quad l(5)=36,11\ u.l.$$

28.- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x^4+2x^3+2x^2+10x-15}=\frac{x^2\cdot(x+2x-3)}{(x^2+5)(x+3)\cdot(x-1)}=\frac{x\cdot\cancel{(x+3)}\cdot\cancel{(x-1)}}{(x^2+5)\cancel{(x+3)}\cdot\cancel{(x-1)}}=\frac{x}{x^2+5}$$

29.- Dados los polinomios $\begin{cases} p(x)=2x^5-x^3+2x^2-3x-3 \\ q(x)=4x^3-3x^2+2x-1 \\ r(x)=2x^2-3 \end{cases}$ calcula: $\begin{cases} a)\ p(x)-2q(x)+3r(x)= \\ b)\ p(x)\cdot r(x)= \\ c)\ p(x):r(x)= \end{cases}$

$a)\ p(x)-2q(x)+3r(x)=(2x^5-x^3+2x^2-3x-3)-2\cdot(4x^3-3x^2+2x-1)+3\cdot(2x^2-3)=2x^5-x^3+2x^2-3x-3-$
$-8x^3+6x^2-4x+2+6x^2-9=2x^5-9x^3+14x^2-7x-10$

$b)\ p(x)\cdot r(x)=(2x^5-x^3+2x^2-3x-3)(2x^2-3)=4x^7-6x^5-2x^5+3x^3+4x^4-6x^2-6x^3+9x-6x^2+9=$
$=4x^7-8x^5+4x^4-3x^3-12x^2+9x+9$

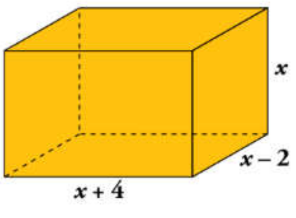
$c)\ p(x):r(x)=$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
2x^5 & +\ 0x^4 & -\ x^3 & +\ 2x^2 & -\ 3x & -\ 3 & & 2x-3 \\
\hline
-\ 2x^5 & & +\ 3x^3 & & & & & x^3+x+1 \\
\hline
0x^5 & 0x^4 & +\ 2x^3 & +\ 2x^2 & -\ 3x & & & \\
& & -\ 2x^3 & & +\ 3x & & & \\
\hline
& & & +\ 2x^2 & & -\ 3 & & \\
& & & -\ 2x^2 & & +\ 3 & & \\
\hline
& & & & & 0 & &
\end{array}$$

La división es exacta de cociente
$C(x) = x^3+x+1$

30.- Expresa mediante una expresión algebraica el área total de este ortoedro y calcúlala para $x=2$.

Como podemos observar en la figura, un ortoedro no es más que una caja de zapatos donde las caras son iguales dos a dos, por tanto, calcularemos la superficie de cada una de las caras diferentes y las multiplicaremos por dos:



$$\left.\begin{array}{l} A_1=(x+4)\cdot(x-2)=x^2-2x+4x-8=x^2+2x-8 \\ A_2=(x+4)\cdot(x)=x^2+4x \\ A_3=(x)\cdot(x-2)=x^2-2x \end{array}\right\} A=A_1+A_2+A_3=3x^2+4x-8$$

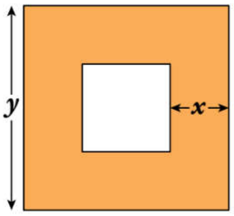
Y como las caras son iguales dos a dos, basta multiplicar este resultado por dos:

$$A_{Total} = 2(A_1 + A_2 + A_3) = 2\cdot\left(3x^2 + 4x - 8\right) = 6x^2 + 8x - 16 \quad \to \quad A(x) = 6x^2 + 8x - 16$$

Para x=2: $Si\ A(x) = 6x^2 + 8x - 16 \quad \to \quad A(2) = 6(2)^2 + 8\cdot 2 - 16 = 24 + 16 - 16 = 24\ u.a.$

Así que, el área total del ortoedro es $A(x)=6x^2+8x-16$ y para x=2 el área es A(2)=24 unidades de área

31.- Expresa algebraicamente el área de la parte sombreada (parte naranja) utilizando las variables x e y. Además, calcula su valor para *x=3* e *y=1*



Observando la figura, podemos calcular el área sombreada, restándole al cuadrado naranja (grande) el cuadrado blanco (interior):

El área del cuadrado naranja viene dada por: $A_G = y^2$

Para el área del blanco, primero necesitamos conocer el lado, y el lado lo calcularemos con la ayuda del grande, es decir el lado del blanco es y – dos veces x: $l_B = y - 2x$, por tanto, su área vendrá dada por: $A_B = (y-2x)^2 = y^2 - 4xy + 4x^2$

Así que el área sombreada será:

$$A_{sombreada} = A_G - A_B = y^2 - \left(y^2 - 4xy + 4x^2\right) = y^2 - y^2 + 4xy - 4x^2 = 4xy - 4x^2 = 4x(y-x)$$

Por tanto: $A(x,y) = 4x\cdot(y-x)$

Para x=3 e y=1: $\quad \to \quad A(x,y) = 4x\cdot(y-x) \quad \to \quad A(3,1) = 4\cdot 3\cdot(1-3) = -24$

Cosa que es imposible porque las áreas no pueden ser negativas.

Además, observando la figura, vemos que y no puede ser en ningún caso, más pequeño que x.

En el caso contrario, para x=1 e y=3: $A(x,y) = 4x\cdot(y-x) \quad \to \quad A(1,3) = 4\cdot 1\cdot(3-1) = 8\ u.a.$

32.- Simplifica la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$

Empezamos haciendo Ruffini (mentalmente) en la de arriba:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{(x-3)\cdot(x-1)}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} =$$

Ahora, como es una fracción que esperamos poder simplificar, haremos Ruffini en el denominador, pero usando las raíces (binomios) obtenidos en el numerador:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & +11 & -6 \\ 3 & & 3 & -9 & +6 \\ \hline & 1 & -3 & +2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array} \quad \to \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$$

Y sustituyendo en la fracción algebraica llegamos a:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{(x-3)\cdot(x-1)}{(x-3)\cdot(x-1)\cdot(x-2)} = \frac{\cancel{(x-3)}\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-3)}\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

33.– Simplifica la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{x^3+7x^2+12x}{x^3+3x^2-16x-48}$

$$\frac{x^3+7x^2+12x}{x^3+3x^2-16x-48}=\frac{x\left(x^2+7x+12\right)}{x^3+3x^2-16x-48}=\frac{x\,\cancel{(x+3)}\cdot\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+3)}\cdot\cancel{(x+4)}\cdot(x-4)}=\frac{x}{x-4}$$

En donde hemos sacado factor común en el numerador y luego hemos descompuesto en factores mediante Ruffini, y en el denominador, hemos hecho también Ruffini, pero usando las raíces del numerador.

34.– Expresa el polinomio P(x)= x^6 – $14x^4$ + $49x^2$ –36 como un producto de binomios con la ayuda de la regla de Ruffini.

Como siempre, empezamos probando con los divisores del término independiente:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 0 & -14 & 0 & 49 & 0 & -36 \\
2 & & 2 & 4 & -20 & -40 & 18 & 36 \\
\hline
 & 1 & 2 & -10 & -20 & 9 & 18 & \underline{|0} \\
-2 & & -2 & 0 & 20 & 0 & -18 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 & 0 & \\
1 & & 1 & 1 & -9 & -9 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & -9 & -9 & \underline{|0} & & \\
-1 & & -1 & 0 & 9 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & \underline{|0} & & & \\
-3 & & -3 & +9 & & & & \\
\hline
 & 1 & -3 & \underline{|0} & & & &
\end{array}$$

$$P(x)=x^6-14x^4+49x^2-36=(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)$$

35.– Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $$\frac{x^3-4x}{x^3+x^2-2x}=\frac{x\left(x^2-4\right)}{x\left(x^2+x-2\right)}=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot(x-2)}{\cancel{x}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot(x-1)}=\frac{(x-2)}{(x-1)}$$

b) $$\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x^4+2x^3+2x^2+10x-15}=\frac{x^2\cdot(x+2x-3)}{\left(x^2+5\right)(x+3)\cdot(x-1)}=\frac{x\cdot\cancel{(x+3)}\cdot\cancel{(x-1)}}{\left(x^2+5\right)\cancel{(x+3)}\cdot\cancel{(x-1)}}=\frac{x}{x^2+5}$$

c) $$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{(x+1)^2\cdot(x-1)}{x\cdot(x+2x+1)}=\frac{(x+1)\cdot\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{(x-1)}}{x\cdot\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{(x-1)}}=\frac{x+1}{x}$$

d) $$\frac{x^3-16x}{4x^3+32x^2+64x}=\frac{x\cdot\left(x^2-16\right)}{4x\cdot\left(x^2+8x+16\right)}=\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x+4)}\cdot(x-4)}{4\cancel{x}\cdot(x+4)^{\cancel{2}}}=\frac{x-4}{4x+16}$$

En donde hemos sacado factor común, hemos utilizado las identidades notables y hemos descompuesto los polinomios en factores usando Ruffini, para después simplificar todo lo posible.

36.- Dados los polinomios $\begin{cases} p(x)=4x^5-3x^3+5x^2-7 \\ q(x)=-5x^3-2x^2+3x \\ r(x)=2x^2-3x+5 \end{cases}$ calcula: $\begin{cases} a)\ 3p(x)+q(x)-2r(x)= \\ b)\ \left[p(x)\right]^2= \\ c)\ p(x):r(x)= \end{cases}$

$a)\ 3p(x)+q(x)-2r(x)=3(4x^5-3x^3+5x^2-7)+(-5x^3-2x^2+3x)-2(2x^2-3x+5)=12x^5-9x^3+$
$+15x^2-21-5x^3-2x^2+3x-4x^2+6-10=12x^5-14x^3+9x^2+3x-31$

$b)\ \left[p(x)\right]^2=p(x)\cdot p(x)=(4x^5-3x^3+5x^2-7)\cdot(4x^5-3x^3+5x^2-7)=\cancel{16x^{10}}\ \cancel{-12x^8}\ \cancel{+20x^7}\ \cancel{-28x^5}-$
$\cancel{-12x^8}\ \cancel{+9x^6}\ \cancel{-15x^5}\ \cancel{+21x^3}\ \cancel{+20x^7}\ \cancel{-15x^5}\ \cancel{+25x^4}\ \cancel{-35x^2}\ \cancel{-28x^5}\ \cancel{+21x^3}\ \cancel{-35x^2}+19=$
$=16x^{10}-24x^8+40x^7+9x^6-86x^5+25x^4+42x^3-70x^2$

$c)\ p(x):r(x)=$

$$\begin{array}{cccccc|l}
4x^5 & +0x & -3x^3 & +5x^2 & +0x & -7 & 2x^2-3x+5 \\ \cline{7-7}
\underline{-4x^5} & \underline{+6x^4} & \underline{-10x^3} & \downarrow & & & 2x^3+3x^2-2x-8 \\
0 & +6x^4 & -13x^3 & +5x^2 & & & \\
 & \underline{-6x^4} & \underline{+9x^3} & \underline{-15x^2} & \downarrow & & \\
 & 0 & -4x^3 & -10x^2 & +0x & \downarrow & C(x)=2x^3+3x^2-2x-8 \\
 & & \underline{+4x^3} & \underline{-6x^2} & \underline{+10x} & 5 & \\
 & & 0 & -16x^2 & +10x & -7 & R(x)=-14x+33 \\
 & & & \underline{16x^2} & \underline{-24x} & \underline{+40} & \\
 & & & & -14x & +33 &
\end{array}$$

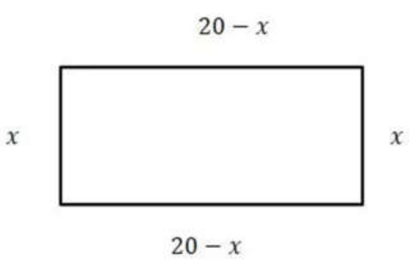
37.- Expresa el siguiente polinomio como un producto de binomios con la ayuda de la regla de Ruffini:

$$Q(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6=$$

Pues como siempre, probaremos con los divisores del término independiente:

$$\left.\begin{array}{r|rrrrr}
 & +1 & -1 & -7 & +1 & -6 \\
-2 & & -2 & +6 & +2 & +6 \\ \hline
 & +1 & -3 & -1 & +3 & \underline{|0} \\
+3 & & +3 & 0 & +3 & \\ \hline
 & +1 & 0 & -1 & \underline{|0} & \\
-1 & & -1 & +1 & & \\ \hline
 & +1 & -1 & \underline{|0} & &
\end{array}\right\} \rightarrow \quad x^4-x^3-7x^2+x+6=(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$$

38.- Jugando con un trozo de alambre, podemos formar figuras geométricas planas. Si doblamos un trozo de alambre de 40 cm y formamos un rectángulo, estoy seguro de que seríais capaces de hallar la expresión algebraica que definiría su área y calcular su valor para x=4.



Si llamamos x a la altura del rectángulo, las dos bases del rectángulo medirán 40−2x, y por tanto, su base mediría la mitad.

Representando estos datos en un dibujo, llegamos a:

Como el área de un rectángulo es el producto de su base por su altura, tenemos que:

$$A = \text{base x altura} = (20-x)\cdot x \quad \rightarrow \quad A(x) = 20x - x^2$$

Cuando nos piden que calculemos su área para x=4, en realidad nos están pidiendo el valor numérico del polinomio A cuando x es 4:

$$A(x) = 20x - x^2 \quad \rightarrow \quad A(4) = 20\cdot 4 - 4^2 = 80 - 16 = 64 \text{ cm}^2$$

Por tanto, su área viene dada por $A(x)=20x-x^2$ y para x=4, $A(4)=64 \text{ cm}^2$

39.- Calcula el valor de "m" para que al dividir el polinomio $P(x)=2x^5-4x^4+3x^2-(m+5)x+18$ por el binomio $(x-3)$ de resto 60.

Como se trata de una división de un polinomio por un binomio, la podemos realizar mediante la regla de Ruffini, así que cogemos los coeficientes y usamos el 3:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -4 & 0 & 3 & -m-5 & 18 \\ 3 & & 6 & 6 & 18 & 63 & -3m+174 \\ \hline & 2 & 2 & 6 & 21 & -m+58 & \underline{|60} \end{array}$$

Como el resto, según el enunciado, es 60 llegamos a que:

$$18 - 3m + 174 = 60$$

Que es una ecuación de primer grado en m y cuya solución es:

$$192 - 3m = 60 \quad \rightarrow \quad -3m = 60 - 192 \quad \rightarrow \quad -3m = -132 \quad \rightarrow \quad m = \frac{132}{3} \quad \rightarrow \quad m = 44$$

Por tanto, m=44

40.- Halla el valor de "k" para que el resto de la siguiente división sea −7

$$2kx^4 - (k+1)x^3 + kx - 8 \quad \underline{|x+1}$$

Como se trata de una división de un polinomio por un binomio, la podemos realizar mediante la regla de Ruffini, así que cogemos los coeficientes y usamos el −1:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2k & -k-1 & 0 & k & -8 \\ -1 & & -2k & 3k+1 & -3k-1 & 2k+1 \\ \hline & 2k & -3k-1 & 3k+1 & -2k-1 & \underline{|2k-7} \end{array}$$

Como el resto, según el enunciado, es −7 llegamos a que: $2k-7=-7$

Que es una ecuación de primer grado en m y cuya solución es:

$$2k - 7 = -7 \quad \rightarrow \quad 2k = 0 \quad \rightarrow \quad k = 0$$

Por tanto, k=0

41.- Calcula el valor de **m** para que el polinomio $P(x)= x^3 - mx^2 + 5x - 2$ sea divisible por x+1.

Sabemos que un polinomio es divisible por otro cuando el resto de la división es cero, y además, cuando el divisor es un polinomio es de la forma x − a, la división puede realizarse de un modo más sencillo, empleando un algoritmo conocido como Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -m & 5 & -2 \\ -1 & & -1 & m+1 & -m-6 \\ \hline & 1 & -m-1 & m+6 & \underline{|-m-8} \end{array}$$

Como es exacta, tiene que ocurrir que el resto es cero, así que lo igualamos a 0 y calculamos el valor de m.

$$-m - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad -8 = m \quad \rightarrow \quad m = -8$$

Así que, para que P(x) sea divisible por x+1, m ha de valer: m=−8