Ejercicios y Problemas

Unidad Didáctica 2

POTENCIAS Y RAÍCES

3º ESO

Colección de ejercicios de examen resueltos

TEMA 2: POTENCIAS Y RAÍCES

1.– Reduce a <u>una sola potencia:</u>

a) $2^3\cdot 2\cdot\left(\dfrac{2^3\cdot 2}{2^4\cdot 2^2}\right)=2^4\cdot\left(\dfrac{2^4}{2^6}\right)=2^4\cdot 2^{-2}=2^2$

b) $16^6:\left(8^5\cdot 4^2\right)=\left(2^4\right)^6:\left[\left(2^3\right)^5\cdot\left(2^2\right)^2\right]=2^{24}:\left(2^{15}\cdot 2^4\right)=2^{24}:2^{19}=2^5$

c) $\dfrac{2^5\cdot 3^2\cdot 4^{-1}}{2^3\cdot 9^{-1}}=\dfrac{2^5\cdot 3^2\cdot 2^{-2}}{2^3\cdot 3^{-2}}=2^{5-2-3}\cdot 3^{2-(-2)}=2^0\cdot 3^4=3^4$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3:\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3:\left(\dfrac{1}{2^2}\right)^2=2^{-3}:2^{-4}=2^{-3-(-4)}=2^{-3+4}=2^1=2$

2.– Simplifica empleando las **propiedades de las potencias**, y expresa el resultado con <u>**exponentes positivos:**</u>

a) $\dfrac{3^{-2}\cdot(-7)^2\cdot 3\cdot 7^{-4}\cdot(-3)^5}{(-7)^3\cdot 3^{-1}\cdot 7^{-5}\cdot 3^4}\underset{\substack{\text{Primero calculamos}\\ \text{el signo por comodidad}}}{=}+3^{-2+1+5-4+1}\cdot 7^{2-4-3+5}=3\cdot 7^0=3$

b) $\dfrac{2^3\cdot 8^{-3}\cdot 12^{-1}\cdot(-3)^{-2}}{6^2\cdot 16^{-2}\cdot 3^{-3}}=\dfrac{2^3\cdot\left(2^3\right)^{-3}\cdot\left(2^2\cdot 3\right)^{-1}\cdot 3^{-2}}{2^2\cdot 3^2\cdot\left(2^4\right)^{-2}\cdot 3^{-3}}=2^{3-9-2-2+8}\cdot 3^{-1-2-2+3}=2^{-2}\cdot 3^{-2}=\dfrac{1}{2^2\cdot 3^2}$

3.– Simplifica empleando las **propiedades de las potencias**:

a) $\dfrac{\left[\left(2^3\cdot 3^3\right):\left(3^{-2}\cdot 2^{-2}\right)\right]:6^{-2}}{\left[\left(14^3:7^3\right)\cdot 3^3\right]:\left(6^{-1}:6^{-4}\right)}=\dfrac{\left[6^3:6^{-2}\right]:6^{-2}}{\left[2^3\cdot 3^3\right]:\left(6^3\right)}=\dfrac{\left[6^5\right]:6^{-2}}{\left[6^3\right]:\left(6^3\right)}=\dfrac{6^7}{1}=6^7$

b) $\dfrac{9^2\cdot 3^{-3}\cdot 25}{125\cdot 81}=\dfrac{3^4\cdot 3^{-3}\cdot 5^2}{5^3\cdot 3^4}=\dfrac{1}{5\cdot 3^3}=\dfrac{1}{135}$

c) $\dfrac{9^5\cdot 3^{-3}\cdot 25^2}{125\cdot 27^3}=\dfrac{\left(3^2\right)^5\cdot 3^{-3}\cdot\left(5^2\right)^2}{5^3\cdot\left(3^3\right)^3}=\dfrac{3^{10}\cdot 3^{-3}\cdot 5^4}{5^3\cdot 3^9}=\dfrac{3^7\cdot 5^4}{5^3\cdot 3^9}=\dfrac{5}{3^2}=\dfrac{5}{9}$

d) $\dfrac{81^3\cdot 3^{-3}\cdot 25^{-2}}{125^{-3}\cdot 27^3}=\dfrac{\left(3^4\right)^3\cdot 3^{-3}\cdot\left(5^2\right)^{-2}}{\left(5^3\right)^{-3}\cdot\left(3^3\right)^3}=\dfrac{3^{12}\cdot 3^{-3}\cdot 5^{-4}}{5^{-9}\cdot 3^9}=\dfrac{3^9\cdot 5^9}{3^9\cdot 5^4}=5^5$

4.– Los terrenos de dos parcelas miden 3^8 y 3^4 metros cuadrados, respectivamente. Mohamed duda si la primera parcela es doble que la segunda o no. De no ser doble, ¿cuántas veces es mayor la primera que la segunda?

Para saber si es el doble, al dividir la grande entre la pequeña nos tiene que dar 2, así que vamos a comprobarlo:

$$3^8:3^4=3^{8-4}=3^4=81$$

Por tanto, la parcela grande no es el doble de la pequeña, sino que es 81 veces mayor.

5.- La masa de la Luna es de $7{,}34\cdot10^{22}$ kilogramos, y la de la Tierra, de $5{,}98\cdot10^{24}$ kilogramos. ¿A cuántas Lunas equivale la masa de la Tierra?

Bastaría con dividir la masa de una entre la de la otra:

$$\frac{masa_{Tierra}}{masa_{Luna}}=\frac{5{,}98\cdot10^{24}}{7{,}34\cdot10^{22}}=81{,}47$$

La masa de la tierra, equivale a poco más de 81 veces la masa de la luna.

6.- Si el área del huerto cuadrado de mi abuelo es la mitad que el de mi tío, que tiene 200 m², ¿cuánto mide el lado del huerto de mi abuelo?

Si el área del huerto del abuelo es la mitad que la del tío, su área será de 100 m², que es la mitad de 200, y por tanto el lado se corresponde con la raíz cuadrada.

$$A=l^2 \quad\rightarrow\quad l=\sqrt{A} \quad\rightarrow\quad l=\sqrt{100}=10 \text{ metros}$$

Así que el lado del huerto cuadrado del abuelo mide 10 m.

7.- La unidad de memoria de un ordenador es el byte. Un kilobyte (kB) son 2^{10} = 1.024 bytes, un megabyte (MB) son 2^{10}=1.024 kB, un gigabyte (GB) equivale a 2^{10}=1.024 MB y un terabyte (TB) equivale a 2^{10}=1.024 GB. Expresa en forma de potencia y en notación científica los bytes que tiene mi disco duro extraíble Seagate Exos M de 36 TB.

En forma de potencia basta con expresar todo en potencias de números primos y agrupar todo lo posible:

$$36\text{ TB}=36\text{ TB}\cdot\frac{2^{10}\text{ GB}}{1\text{ TB}}\cdot\frac{2^{10}\text{ MB}}{1\text{ GB}}\cdot\frac{2^{10}\text{ kB}}{1\text{ MB}}\cdot\frac{2^{10}\text{ bytes}}{1\text{ KB}}=36\ \cancel{\text{TB}}\cdot\frac{2^{10}\ \cancel{\text{GB}}}{1\ \cancel{\text{TB}}}\cdot\frac{2^{10}\ \cancel{\text{MB}}}{1\ \cancel{\text{GB}}}\cdot\frac{2^{10}\ \cancel{\text{kB}}}{1\ \cancel{\text{MB}}}\cdot\frac{2^{10}\text{ bytes}}{1\ \cancel{\text{kB}}}=$$

$$=36\cdot\left(2^{10}\right)^4=36\cdot2^{40}=2^2\cdot3^2\cdot2^{40}=3^2\cdot2^{42}\text{ bytes}$$

Y en notación científica, hacemos los mismo pero la final calculamos directamente:

$$36\text{ TB}=36\text{ TB}\cdot\frac{2^{10}\text{ GB}}{1\text{ TB}}\cdot\frac{2^{10}\text{ MB}}{1\text{ GB}}\cdot\frac{2^{10}\text{ kB}}{1\text{ MB}}\cdot\frac{2^{10}\text{ bytes}}{1\text{ KB}}=36\ \cancel{\text{TB}}\cdot\frac{2^{10}\ \cancel{\text{GB}}}{1\ \cancel{\text{TB}}}\cdot\frac{2^{10}\ \cancel{\text{MB}}}{1\ \cancel{\text{GB}}}\cdot\frac{2^{10}\ \cancel{\text{kB}}}{1\ \cancel{\text{MB}}}\cdot\frac{2^{10}\text{ bytes}}{1\ \cancel{\text{kB}}}=$$

$$=36\cdot\left(2^{10}\right)^4=36\cdot2^{40}=3{,}958\cdot10^{13}\text{ bytes}$$

Así que en potencia es $3^2\cdot2^{42}$ bytes y en notación científica $3{,}958\cdot10^{13}$ bytes

8.- Queremos construir un cubo de cartón cuyo volumen sea 6 metros cúbicos. ¿Qué superficie de cartón se necesita? Expresa el resultado en forma radical.

Sabemos que el volumen de un cubo de arista **a** es: $V=a^3$, además, sabemos también, que un cubo tiene 6 caras cuadradas iguales, por tanto, su superficie será: $S=6\cdot a^2$.

Pues conocido el volumen, podemos calcular su arista: $V=a^3 \quad\rightarrow\quad a=\sqrt[3]{V} \quad\rightarrow\quad a=\sqrt[3]{6}$ m

Y con la arista, ya podemos calcular su área: $S=6\cdot a^2=6\cdot\left(\sqrt[3]{6}\right)^2=6\sqrt[3]{6^2}$ m²

Por tanto, necesitaremos $6\sqrt[3]{6^2}$ metros cuadrados de cartón.

9.– Extrae __todos__ los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{81 \cdot a^5 \cdot b \cdot c^6} = \sqrt{3^4 \cdot a^5 \cdot b \cdot c^6} = 3^2 \cdot a^2 \cdot c^3 \sqrt{a \cdot b}$

b) $\sqrt[3]{125 \cdot a^9 \cdot b^{17} \cdot c^{25}} = \sqrt[3]{5^3 \cdot a^9 \cdot b^{17} \cdot c^{25}} = 5 \cdot a^3 \cdot b^5 \cdot c^8 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot c}$

10.– Efectúa las siguientes multiplicaciones y divisiones con radicales:

a) $14\sqrt{12} : 7\sqrt{3} = \dfrac{14\sqrt{12}}{7\sqrt{3}} = 2\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{\dfrac{12}{3}} = 2\sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$

b) $3\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt{2} = 15 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = 15 \cdot \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = 15 \cdot \sqrt[6]{2^2 \cdot 2^3} = 15 \cdot \sqrt[6]{2^5}$

Redicimos los radicales a índice común para poder multiplicarlos / dividirlos

c) $18\sqrt[3]{7} : 9\sqrt[5]{7} = \dfrac{18\sqrt[3]{7}}{9\sqrt[5]{7}} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[5]{7}} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt[15]{7^5}}{\sqrt[15]{7^3}} = 2 \cdot \sqrt[15]{\dfrac{7^5}{7^3}} = 2\sqrt[15]{7^2}$

11.– Extrae los factores que se puedan de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{729} b^5 \cdot c^7 \cdot m^{14}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3}{3^6} b^5 \cdot c^7 \cdot m^{14}} = \dfrac{2}{3^2} \cdot b \cdot c^2 \cdot m^4 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot c \cdot m^2}$

b) $\sqrt{\dfrac{81}{32} z^6 \cdot y^7 \cdot x^{17}} = \sqrt{\dfrac{3^4}{2^5} z^6 \cdot y^7 \cdot x^{17}} = \dfrac{3^2}{2^2} \cdot z^3 \cdot y^3 \cdot x^8 \sqrt{\dfrac{x \cdot y}{2}} = \dfrac{9}{4} \cdot z^3 \cdot y^3 \cdot x^8 \cdot \sqrt{\dfrac{x \cdot y}{2}}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{216}{343} m^{12} b^{15} c} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3 \cdot 3^3}{7^3} m^{12} b^{15} c} = \dfrac{2 \cdot 3}{7} \cdot m^4 \cdot b^5 \sqrt[3]{c} = \dfrac{6}{7} \cdot m^4 \cdot b^5 \sqrt[3]{c}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{243} b^7 \cdot m^{45} \cdot c^{18} \cdot x^5} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{3^5} b^7 \cdot m^{45} \cdot c^{18} \cdot x^5} = \dfrac{1}{3} \cdot b \cdot m^{11} \cdot c^4 \cdot x \cdot \sqrt[4]{\dfrac{1}{3} b^3 \cdot m \cdot c^2 \cdot x} = \dfrac{b \cdot m^{11} \cdot c^4 \cdot x}{3} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{b^3 \cdot m \cdot c^2 \cdot x}{3}}$

12.– Considera las potencias 2^{-2}, 2^{-3} y 2^{-5}.

a) ¿Cuál es la mayor?

La potencia mayor es 2^{-2}.

b) ¿Cómo es la potencia a medida que el exponente negativo aumenta en valor absoluto?

El valor de la potencia disminuye a medida que aumenta el exponente en valor absoluto.

c) Contesta a las cuestiones anteriores para las potencias $0{,}7^{-3}$, $0{,}7^{-4}$ y $0{,}7^{-5}$.

La mayor es $0{,}7^{-5}$. El valor de la potencia aumenta a medida que lo hace el exponente en valor absoluto. La diferencia con el caso anterior es porque la base es ahora menor que la unidad.

13.- La distribución del último modelo de Iphone ha comenzado a principios de septiembre. Al puerto de Algeciras y de Valencia han llegado dos barcos con 16 contenedores cada uno, llenos de estos teléfonos inteligentes. Si en cada contenedor caben 32 palets y en cada palet entran 64 cajas de teléfonos que contienen 16 teléfonos cada una. Indica en forma de potencia y en notación científica el numero de teléfonos que han llegado a España este último mes de septiembre.

A España llegan: $2 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 16 = 2 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^4 = 2^{20}$ teléfonos

Eso hace un total de 1.048.576 smartphones, que en notación científica son $1{,}048576 \cdot 10^6$

Por tanto, han llegado $2^{20} = 1{,}048576 \cdot 10^6$ teléfonos.

14.- Efectúa las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $2\sqrt{20}+4\sqrt{80}-5\sqrt{180}+3\sqrt{125}=2\sqrt{2^2\cdot 5}+4\sqrt{2^4\cdot 5}-5\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}+3\sqrt{5^3}=$
$=2\cdot 2\sqrt{5}+4\cdot 2^2\sqrt{5}-5\cdot 2\cdot 3\sqrt{5}+3\cdot 5\sqrt{5}=4\sqrt{5}+16\sqrt{5}-30\sqrt{5}+15\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

b) $\frac{1}{4}\sqrt{128}+6\sqrt{512}-\frac{1}{2}\sqrt{32}-3\sqrt{98}=\frac{1}{4}\sqrt{2^7}+6\sqrt{2^9}-\frac{1}{2}\sqrt{2^5}-3\sqrt{2\cdot 7^2}=$
$=\frac{1}{4}\cdot 2^3\sqrt{2}+6\cdot 2^4\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sqrt{2}-3\cdot 7\sqrt{2}=2\sqrt{2}+96\sqrt{2}-2\sqrt{2}-21\sqrt{2}=75\sqrt{2}$

c) $\frac{3}{2}\sqrt{45}-\frac{\sqrt{20}}{3}+4\sqrt{125}-2\sqrt{5}=\frac{3}{2}\sqrt{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3}\sqrt{2^2\cdot 5}+4\sqrt{5^3}-2\sqrt{5}=$
$=\frac{3}{2}\cdot 3\sqrt{5}-\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{5}+4\cdot 5\sqrt{5}-2\sqrt{5}=\frac{9}{2}\sqrt{5}-\frac{2}{3}\sqrt{5}+18\sqrt{5}=\frac{131}{6}\sqrt{5}$

d) $2\sqrt{x^2y}-\sqrt{9yx^2}+\sqrt{16xy^2}-\sqrt{4y^2x}=2x\sqrt{y}-3x\sqrt{y}+4y\sqrt{x}-2y\sqrt{x}=2y\sqrt{x}-x\sqrt{y}$

15.- Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\xrightarrow[\text{por el radical del denominador}]{\text{Multiplicamos y dividimos}}\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{2\cdot 3}}{\sqrt{3\cdot 3}}=\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{9}}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3a}}=\xrightarrow[\text{por radical denominador}]{\text{Multiplicamos y dividimos}}\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3a}}\cdot\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}}=\frac{2\sqrt{a}\cdot\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}\cdot\sqrt{3a}}=\frac{2\sqrt{3a\cdot a}}{\sqrt{3a\cdot 3a}}=\frac{2\sqrt{3a^2}}{\sqrt{3^2\cdot a^2}}=\frac{2a\sqrt{3}}{3\cdot a}=\frac{2\cancel{a}\sqrt{3}}{3\cdot\cancel{a}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5\cdot 2}+2\sqrt{3\cdot 2}}{2\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{6}}{2\cdot 2}=\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{6}}{4}$

16.- Efectúa las siguientes sumas y restas de radicales:

a) $3\sqrt{27}-2\sqrt{243}+\sqrt{75}-2\sqrt{48}=3\cdot\sqrt{3^3}-2\sqrt{3^5}+\sqrt{3\cdot 5^2}-2\cdot\sqrt{3\cdot 2^4}=3\cdot 3\sqrt{3}-2\cdot 3^2\cdot\sqrt{3}+5\sqrt{3}-$
$-2\cdot 2^2\cdot\sqrt{3}=9\sqrt{3}-18\sqrt{3}+5\sqrt{3}-8\sqrt{3}=-12\sqrt{3}$

$b)\quad \frac{2}{5}\sqrt{20}-\frac{3}{5}\sqrt{80}+\frac{1}{2}\sqrt{180}+6\sqrt{45}=\frac{2}{5}\sqrt{2^2\cdot 5}-\frac{3}{5}\sqrt{2^4\cdot 5}+\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}+6\sqrt{3^2\cdot 5}=\frac{2}{5}\cdot 2\sqrt{5}-$

$-\frac{3}{5}\cdot 2^2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{5}++6\cdot 3\sqrt{5}=\frac{4}{5}\sqrt{5}-\frac{12}{5}\sqrt{5}+3\sqrt{5}+18\sqrt{5}=\frac{4-12+15+90}{5}\sqrt{5}=\frac{97}{5}\sqrt{5}$

$c)\quad 5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\frac{3}{2}\sqrt{80}=5\sqrt{5^3}+6\sqrt{3^2\cdot 5}-7\sqrt{2^2\cdot 5}+\frac{3}{2}\sqrt{2^4\cdot 5}=5\cdot 5\sqrt{5}+6\cdot 3\sqrt{5}-$

$-7\cdot 2\sqrt{5}+\frac{3}{2}\cdot 2^2\sqrt{5}=25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5}=35\sqrt{5}$

$d)\quad 3\sqrt{5}-7\sqrt{125}+\frac{3}{2}\sqrt{405}+\frac{5}{6}\sqrt{20}=3\sqrt{5}-7\sqrt{5^3}+\frac{3}{2}\sqrt{3^4\cdot 5}+\frac{5}{6}\sqrt{2^2\cdot 5}=3\sqrt{5}-7\sqrt{5^3}+\frac{3}{2}\sqrt{3^4\cdot 5}$

$+\frac{5}{6}\sqrt{2^2\cdot 5}=3\sqrt{5}-7\cdot 5\sqrt{5}+\frac{3}{2}\cdot 3^2\sqrt{5}+\frac{5}{6}\cdot 2\sqrt{5}=3\sqrt{5}-35\sqrt{5}+\frac{27}{2}\sqrt{5}+\frac{5}{3}\sqrt{5}=\left(3-35+\frac{27}{2}+\frac{5}{3}\right)\sqrt{5}=$

$=\frac{-101}{6}\sqrt{5}$

17.– Calcula paso a paso las siguientes operaciones.

$a)\quad -4\cdot(4-2)^{-2}-(-3+1)^3+(2\cdot 3)^2:(-1-5)-4:(2-3)^{-7}=-4\cdot(2)^{-2}-(-2)^3+(6)^2:(-6)-$

$-4:(-1)^{-7}=\frac{-4}{2^2}+8-6+4=\frac{-4}{4}+8-6+4=-1+8-6+4=5$

$b)\quad \left(\frac{10}{50}\right)^{-3}-\sqrt[3]{\frac{125}{27}}-\sqrt{\frac{25}{3}-\frac{11}{9}}\cdot\left(\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}-\sqrt[3]{\frac{5^3}{3^3}}-\sqrt{\frac{75}{9}-\frac{11}{9}}\cdot\left(\sqrt[3]{-\frac{2^3}{5^3}}\right)^{-1}=$

$=5^3-\frac{5}{3}-\sqrt{\frac{64}{9}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{5^3}{2^3}}=5^3-\frac{5}{3}+\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{2}=125-\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{1}=125-\frac{5}{3}+\frac{20}{3}=125+5=130$

18.– Ordena de menor a mayor estos radicales. $\sqrt{7}$ $\sqrt[3]{5}$ $\sqrt[4]{11}$

Para poder ordenarlos, primero tenemos que reducir a índice común:

$\sqrt{7}\quad \sqrt[3]{5}\quad \sqrt[4]{11}\ \rightarrow\ m.c.m.(2,3,4)=12\ \rightarrow\ \sqrt[12]{7^6}\quad \sqrt[12]{5^4}\quad \sqrt[12]{11^3}$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[12]{7^6}=\sqrt[12]{117649}\\ \sqrt[12]{5^4}=\sqrt[12]{625}\\ \sqrt[12]{11^3}=\sqrt[12]{1331}\end{array}\right\}\ \rightarrow\ \sqrt[12]{5^4}<\sqrt[12]{11^3}<\sqrt[12]{7^6}\ \rightarrow\ \sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{11}<\sqrt{7}$$

19.– Expresa en forma de un solo radical las siguientes expresiones:

$a)\quad \sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[2\cdot 3]{3}=\sqrt[6]{3}$

$b)\quad \sqrt[3]{\sqrt{128}}=\sqrt[3\cdot 2]{128}=\sqrt[6]{2^7}=2\sqrt[6]{2}$

$c)\quad \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}}=\sqrt[2\cdot 3\cdot 4]{64}=\sqrt[24]{2^6}=\sqrt[4]{6}$

$d)\quad \sqrt{\sqrt[5]{81}}=\sqrt[2\cdot 5]{81}=\sqrt[10]{3^4}=\sqrt[5]{3^2}=\sqrt[5]{9}$

20.- Calcula aplicando las propiedades de las potencias de base 10:

$$\frac{1000^2\cdot\left(\frac{10}{0,1}\right)^{-2}:(0,001)^2\cdot 100^{-3}\cdot 5^0}{(0,001)^{-2}\cdot 100^4:(0,1)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{0,01}\right)^{-3}} = \frac{\left(10^3\right)^2\cdot\left(\frac{10}{10^{-1}}\right)^{-2}:\left(10^{-3}\right)^2\cdot\left(10^2\right)^{-3}}{\left(10^{-3}\right)^{-2}\cdot\left(10^2\right)^4:\left(10^{-1}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{10^{-2}}\right)^{-3}} = \frac{10^6\cdot 10^{-4}:10^{-6}\cdot 10^{-6}}{10^{-6}\cdot 10^8:10^3\cdot 10^6}=\frac{10^2}{10^5}=10^{-3}$$

21.- Calcula los valores de **a, b, c** y **d** en esta igualdad: $\sqrt{10^4\cdot 14^6\cdot 81^{12}}=2^a\cdot d^b\cdot 5^c\cdot 7^d$

- Descomponemos los números del radicando en factores primos y sacamos lo que se pueda:

$$\sqrt{10^4\cdot 14^6\cdot 81^{12}}=\sqrt{(2\cdot 5)^4\cdot(2\cdot 7)^6\cdot\left(3^4\right)^{12}}=\sqrt{2^4\cdot 5^4\cdot 2^6\cdot 7^6\cdot 3^{48}}=\sqrt{2^{10}\cdot 3^{48}\cdot 5^4\cdot 7^6}=2^5\cdot 3^{24}\cdot 5^2\cdot 7^3$$

Después, por comparación podemos obtener el valor de los parámetros a, b, c y d.

$$2^5\cdot 3^{24}\cdot 5^2\cdot 7^3=2^a\cdot d^b\cdot 5^c\cdot 7^d \quad\rightarrow\quad \begin{cases} a=5\\ b=24\\ c=2\\ d=3\end{cases}$$

Por lo tanto, a=5, b=24, c=2 y d=3.

22.- Un profesor escribe en la pizarra la siguiente operación: $\sqrt[5]{8^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ Y pide a la mitad de la clase que la resuelva mediante las propiedades de los radicales, y a la otra mitad, que lo hagan con las propiedades de las potencias. ¿Qué resultado obtendrá cada una de las partes de la clase?

- Mediante las propiedades de las potencias:

$$\sqrt[5]{8^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{\frac{6}{5}}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{6}{5}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=2^{\frac{36-20-15}{30}}=2^{\frac{36-35}{30}}=2^{\frac{1}{30}}$$

- Mediante las propiedades de los radicales:

$$\sqrt[5]{8^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt[30]{8^{12}}\cdot\sqrt[30]{\frac{1}{4^{10}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[30]{2^{15}}}=\sqrt[30]{\left(2^3\right)^{12}}\cdot\sqrt[30]{\frac{1}{\left(2^2\right)^{10}}}\cdot\sqrt[30]{\frac{1}{2^{15}}}=\sqrt[30]{\frac{2^{36}}{2^{20}\cdot 2^{15}}}=\sqrt[30]{2}$$

Es evidente que de ambas formas obtenemos el mismo resultado: $2^{\frac{1}{30}}=\sqrt[30]{2}$

23.- Calcula los valores de a, b, c ,y d en esta igualdad $\sqrt[3]{100^9\cdot 98^9\cdot 81^{15}}=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d$

Como el radicando está formado por números compuestos, vamos a empezar por descomponerlos en factores primos:

$$\sqrt[3]{100^9\cdot 98^9\cdot 81^{15}}=\sqrt[3]{\left(10^2\right)^9\cdot\left(2\cdot 7^2\right)^9\cdot\left(3^4\right)^{15}}=\sqrt[3]{\left[(2\cdot 5)^2\right]^9\cdot\left(2\cdot 7^2\right)^9\cdot\left(3^4\right)^{15}}=\sqrt[3]{2^{18}\cdot 5^{18}\cdot 2^9\cdot 7^{18}\cdot 3^{60}}=$$

$$=\sqrt[3]{2^{27}\cdot 3^{60}\cdot 5^{18}\cdot 7^{18}}=2^9\cdot 3^{20}\cdot 5^6\cdot 7^6$$

Por tanto, a=9, b=20, c=d=6

24.– Calcula el valor de k en la siguiente expresión: $\sqrt[4]{k}=\dfrac{1}{3}$

Mediante la definición de raíz cuarta: $\sqrt[4]{k}=\dfrac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \left(\dfrac{1}{3}\right)^4=k \quad \rightarrow \quad k=\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{1}{81}$

25.– Calcula paso a paso:

$$\frac{\left(2\sqrt{54}-6\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{10+\sqrt{36}}}}}=\frac{\left(2\sqrt{2\cdot 3^3}-6\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{10+6}}}}=\frac{\left(2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}-6\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}=$$

$$=\frac{\left(6\sqrt{6}-6\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{5+4}}}=\frac{6\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+\sqrt{9}}}=\frac{6(6-3)}{\sqrt{1+3}}=\frac{6\cdot 3}{\sqrt{4}}=\frac{18}{2}=9$$

26.– Efectúa las siguientes operaciones con radicales:

a) $7\sqrt{5}-\dfrac{4}{5}\sqrt{500}+2\sqrt{405}+\dfrac{7}{3}\sqrt{45}=7\sqrt{5}-\dfrac{4}{5}\sqrt{5\cdot 10^2}+2\sqrt{3^4\cdot 5}+\dfrac{7}{3}\sqrt{3^2\cdot 5}=7\sqrt{5}-\dfrac{4}{5}\cdot 10\sqrt{5}+2\cdot 3^2\sqrt{5}+$

$+\dfrac{7}{3}\cdot 3\sqrt{5}=7\sqrt{5}-8\sqrt{5}+18\sqrt{5}+7\sqrt{5}=24\sqrt{5}$

b) $3\sqrt{5}-7\sqrt{125}+\dfrac{3}{2}\sqrt{405}+\dfrac{5}{6}\sqrt{20}=3\sqrt{5}-7\sqrt{5^3}+\dfrac{3}{2}\sqrt{3^4\cdot 5}+\dfrac{5}{6}\sqrt{2^2\cdot 5}=3\sqrt{5}-7\sqrt{5^3}+\dfrac{3}{2}\sqrt{3^4\cdot 5}+\dfrac{5}{6}\sqrt{2^2\cdot 5}=$

$=3\sqrt{5}-7\cdot 5\sqrt{5}+\dfrac{3}{2}\cdot 3^2\sqrt{5}+\dfrac{5}{6}\cdot 2\sqrt{5}=3\sqrt{5}-35\sqrt{5}+\dfrac{27}{2}\sqrt{5}+\dfrac{5}{3}\sqrt{5}=\left(3-35+\dfrac{27}{2}+\dfrac{5}{3}\right)\sqrt{5}=\dfrac{-101}{6}\sqrt{5}$

27.– Realiza los siguientes productos de radicales:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2 3}\cdot\sqrt[6]{2^3 3^2}=\sqrt[12]{2^6\cdot 2^8\cdot 3^4\cdot 2^6\cdot 3^4}=\sqrt[12]{2^{20}\cdot 3^8}=2\cdot\sqrt[12]{2^8\cdot 3^8}=2\cdot\sqrt[12]{6^8}=2\cdot\sqrt[3]{6^2}=2\cdot\sqrt[3]{36}$

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3^2 2}\cdot\sqrt[6]{2^3 3^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot 3^4\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 3^2}=\sqrt[6]{3^9\cdot 2^5}=3\cdot\sqrt[6]{3^3\cdot 2^5}$

28.– Extrae los factores que se puedan de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[5]{1024\cdot b^8\cdot m^{37}\cdot c^{18}}=\sqrt[5]{2^{10}\cdot b^8\cdot m^{37}\cdot c^{18}}=4\cdot b\cdot m^7\cdot c^3\cdot\sqrt[5]{b^3\cdot m^2\cdot c^3}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{81}{49}\cdot b^8\cdot m^{27}\cdot c^{20}}=\sqrt[3]{\dfrac{3^4}{7^2}\cdot b^8\cdot m^{27}\cdot c^{20}}=3\cdot b^2\cdot m^9\cdot c^6\sqrt[3]{\dfrac{3}{49}\cdot b^2\cdot c^2}$

c) $\sqrt[3]{81\cdot b^8\cdot m^{27}\cdot c^{20}}=\sqrt[3]{3^4\cdot b^8\cdot m^{27}\cdot c^{20}}=3b^2m^9c^6\cdot\sqrt[3]{3\cdot b^2\cdot c^2}$

29.– Racionaliza paso a paso:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\overset{\text{Multiplicamos y dividimos por }\sqrt{7}}{=}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{7^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

$$c)\quad \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \overset{\text{Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador}}{=} \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{5-2}=\frac{4\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$$

$$d)\quad \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}}\cdot\frac{3-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{18}}{9-6}=\frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$e)\quad \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}$$

30.- Simplifica empleando las **propiedades de las potencias**:

$$a)\quad \frac{9^5\cdot 3^{-3}\cdot 125^2}{25^2\cdot 81^3}=\frac{\left(3^2\right)^5\cdot 3^{-3}\cdot\left(5^3\right)^2}{\left(5^2\right)^2\cdot\left(3^4\right)^3}=\frac{3^{10}\cdot 3^{-3}\cdot 5^6}{5^4\cdot 3^{12}}=\frac{3^7\cdot 5^6}{5^4\cdot 3^{12}}=\frac{5^2}{3^5}$$

$$b)\quad \frac{2^{-1}\cdot\left(2^5\right)^{-3}\cdot 4^2\cdot 32}{8^3\cdot 2^{-4}\cdot 16}=\frac{2^{-1}\cdot\left(2^5\right)^{-3}\cdot\left(2^2\right)^2\cdot 2^5}{\left(2^3\right)^3\cdot 2^{-4}\cdot 2^4}=\frac{2^{-1}\cdot 2^{-15}\cdot 2^4\cdot 2^5}{2^9\cdot 2^{-4}\cdot 2^4}=\frac{2^{-7}}{2^9}=2^{-16}$$

$$c)\quad \frac{2^5\cdot 27^2\cdot 4^{-1}\cdot 8^{-3}}{2^{-3}\cdot 16\cdot 81}=\frac{2^5\cdot 3^6\cdot 2^{-2}\cdot 2^{-9}}{2^{-3}\cdot 2^4\cdot 3^4}=\frac{2^{-6}\cdot 3^6}{2\cdot 3^4}=\frac{3^2}{2^7}$$

31.- Utilizando las propiedades de las potencias, calcula el valor de x en la siguiente expresión

$$\sqrt[3]{9^{3x-4}}=3^{1-x}\ \rightarrow\ \left(9^{3x-4}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{1-x}\ \rightarrow\ \left(\left(3^2\right)^{3x-4}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{1-x}\ \rightarrow\ 3^{\frac{6x-8}{3}}=3^{1-x}$$

$$\rightarrow\ \frac{6x-8}{3}=1-x\ \rightarrow\ 6x-8=3-3x\ \rightarrow\ 9x=11\ \rightarrow\ x=\frac{11}{9}$$

32.- Calcula aplicando las propiedades de las potencias: $\left[\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-3)^2\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2}{2\cdot 3^6-\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}}\right]^{-3}$

Para calcularlo vamos a expresarlo todo en potencias de base 3 y utilizaremos las propiedades de las potencias para operar:

$$\left[\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-3)^2\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2}{2\cdot 3^6-\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}}\right]^{-3}=\left[\frac{3^{-2}\cdot 3^2\cdot\left[(3)^3\right]^2}{2\cdot 3^6-3^6}\right]^{-3}=\left[\frac{3^{-2}\cdot 3^2\cdot 3^6}{3^6(2-1)}\right]^{-3}=\left[\frac{3^{-2+2+6}}{3^6\cdot 1}\right]^{-3}=\left[\frac{3^6}{3^6}\right]^{-3}=1^{-3}=1$$

33.- Calcula:

a) $5\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{128}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{54}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{250} \underset{\substack{\text{Descomponemos}\\ \text{en factores}\\ \text{primos}}}{=} 5\sqrt[3]{2^4}-3\sqrt[3]{2^7}+\frac{4}{3}\sqrt[3]{2\cdot3^3}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{2\cdot5^3} = \underset{\substack{\text{Sacamos lo}\\ \text{que se pueda}}}{=}$

$=5\cdot2\sqrt[3]{2}-3\cdot2^2\sqrt[3]{2}+\frac{4}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}\sqrt[3]{2}-\frac{3}{\cancel{5}}\cdot\cancel{5}\sqrt[3]{2} = \underset{\text{Operamos}}{=} 10\sqrt[3]{2}-12\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2} \underset{\text{y agrupamos}}{=} =-\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{75}-\frac{\sqrt{18}}{3}+\frac{3\sqrt{12}}{4}-\sqrt{8,\hat{3}} = \underset{\substack{\text{Descomponemos}\\ \text{en factores}\\ \text{primos}}}{=} \sqrt{3\cdot5^2}-\frac{\sqrt{2\cdot3^2}}{3}+\frac{3\sqrt{2^2\cdot3}}{4}-\sqrt{\frac{5^2}{3}} = \underset{\substack{\text{Sacamos lo}\\ \text{que se pueda}}}{=}$

$=5\sqrt{3}-\frac{\cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{3}}+\frac{3\cdot\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{4}\cdot2}-5\frac{1}{\sqrt{3}} = \underset{\substack{\text{Operamos y}\\ \text{racionalizamos}\\ \text{el último}}}{=} 5\sqrt{3}-\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{5}{3}\sqrt{3} = \underset{\text{y agrupamos}}{=} =\frac{29}{6}\sqrt{3}-\sqrt{2}$

a) $\frac{\left(\sqrt{27}\right)^3\cdot\sqrt{\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{81}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3} = \frac{\left(\sqrt{3^3}\right)^3\cdot\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[3]{3^4}\cdot\sqrt{3^3}} \underset{\substack{\text{Operamos y sacamos}\\ \text{de las raíces todo lo}\\ \text{que se pueda}}}{=} \frac{\sqrt{3^9}\cdot\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}\cdot3\sqrt{3}} = \frac{3^4\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot\cancel{\sqrt[3]{3}}}{3^2\cdot\cancel{\sqrt[3]{3}}\cdot\cancel{\sqrt{3}}} = 3^2 = 9$

34.- Calcula paso a paso las siguientes operaciones utilizando las propiedades que sean necesarias:

a) $\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{9}{8}-\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{4}-\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{9}{8}-\frac{10}{8}\right)^{-2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^{-2} = -2^{-6}\cdot2^6 = -2^0 = -1$

b) $1+\frac{1}{1-\frac{1}{2-\frac{3}{4}}} = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{8}{4}-\frac{3}{4}}} = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{5}{4}}} = 1+\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 1+\frac{1}{\frac{5}{5}-\frac{4}{5}} = 1+\frac{1}{\frac{1}{5}} = 1+5 = 6$

c) $\frac{2^3\cdot8^{-3}\cdot12^{-1}\cdot(-3)^{-2}}{6^2\cdot16^{-2}\cdot3^{-3}} = \frac{2^3\cdot\left(2^3\right)^{-3}\cdot2^{-2}\cdot3^{-1}\cdot(-3)^{-2}}{2^2\cdot3^2\cdot\left(2^4\right)^{-2}\cdot3^{-3}} = \frac{2^3\cdot2^{-9}\cdot2^{-2}\cdot3^{-1}\cdot3^{-2}}{2^2\cdot3^2\cdot2^{-8}\cdot3^{-3}} = \frac{2^{-8}\cdot3^{-3}}{2^{-6}\cdot3^{-1}} = 2^{-2}\cdot3^{-2} = 6^{-2} = \frac{1}{36}$

d) $\frac{\left[\left(2^2\right)^3\cdot4^6\right]:8^3}{16^2}-\frac{3\cdot3^2}{3^{-4}} = \frac{\left[\left(2^2\right)^3\cdot\left(2^2\right)^6\right]:\left(2^3\right)^3}{\left(2^4\right)^2}-\frac{3^3}{3^{-4}} = \frac{\left[2^6\cdot2^{12}\right]:2^9}{2^8}-3^7 = 2-3^7 = 2-2187 = -2185$

e) $\sqrt{48}-2\sqrt{12}+4\sqrt{27}-3\sqrt{75} = 4\sqrt{3}-2\cdot2\sqrt{3}+4\cdot3\sqrt{3}-3\cdot5\cdot\sqrt{3} = 4\sqrt{3}-4\sqrt{3}+12\sqrt{3}-15\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$

f) $\frac{\sqrt[3]{81x^3\cdot y^5}\cdot\sqrt{3x^3\cdot y^5}}{\sqrt{27x^5\cdot y^7}} = \frac{\sqrt[3]{3^4\cdot x^3\cdot y^5}\cdot\sqrt{3x^3\cdot y^5}}{\sqrt{3^3\cdot x^5\cdot y^7}} = \frac{3\cdot x\cdot y\sqrt[3]{3\cdot y^2}\cdot x\cdot y^2\cdot\cancel{\sqrt{3x\cdot y}}}{3\cdot x^2\cdot y^3\cdot\cancel{\sqrt{3x\cdot y}}} = \frac{3\cdot\cancel{x^2}\cdot\cancel{y^3}\cdot\sqrt[3]{3\cdot y^2}}{3\cdot\cancel{x^2}\cdot\cancel{y^3}} = \sqrt[3]{3y^2}$

g) $\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4-3} = 2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}$

35.– Calcula el valor de **a, b, c y d** en la siguiente igualdad: $9^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{6^3}}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{c}{d}}$

Escribimos todo en forma de potencia y aplicamos las propiedades de las potencias

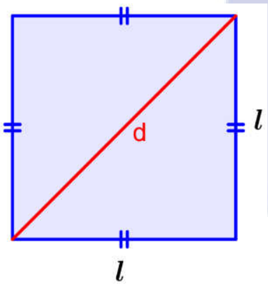
$$9^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{6^3}}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}}=\left(3^2\right)^{\frac{3}{4}}\cdot 6^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{-\frac{3}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{3}{4}+\frac{2}{4}}\cdot 3^{\frac{6}{4}-\frac{3}{4}-\frac{2}{4}}=2^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}=\frac{3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Después, si comparamos con el resultado que nos dan, podemos obtener fácilmente los valores pedidos:

$$\rightarrow\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{c}{d}}\quad\rightarrow\quad \begin{cases}a=3\\ b=2\\ c=1\\ d=4\end{cases}$$

Así que, a=3, b=2, c=1 y d=4

36.– Halla la diagonal de un cuadrado de lado l.



La diagonal d, de un cuadrado es la línea que une dos vértices no consecutivos de un cuadrado. Al trazarla, d, parte el cuadrado en dos triángulos isósceles que además son rectángulos, por ello, si aplicamos el teorema de Pitágoras en cualquiera de ellos, podemos calcular fácilmente el valor de la diagonal d.

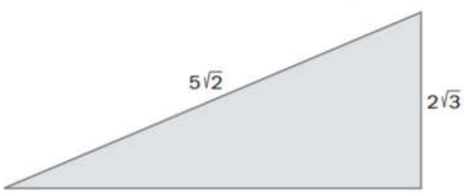
$$d^2=l^2+l^2=2l^2$$

Si despejamos d:

$$d^2=2l^2\quad\rightarrow\quad\sqrt{d^2}=\sqrt{2l^2}\quad\rightarrow\quad d=\sqrt{2l^2}=l\sqrt{2}\quad\rightarrow\quad d=l\sqrt{2}$$

Así que, la diagonal pedida es $d=l\sqrt{2}$

37.– Dado el siguiente triángulo, calcula cuánto mide el cateto desconocido.



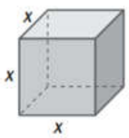
Utilizando el teorema de Pitágoras podemos calcular el cateto:

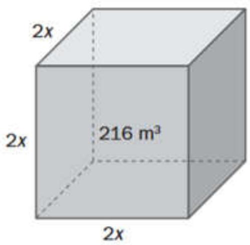
$$a^2=b^2+c^2\quad\rightarrow\quad c^2=a^2-b^2\quad\rightarrow\quad c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{50-12}=\sqrt{2^4\cdot 3}=4\sqrt{3}$$

El cateto mide $4\sqrt{3}$

38.– Si en un cubo duplicamos su lado, el volumen del nuevo cubo es 216 metros cúbicos. ¿Cuál era el volumen del cubo inicial?





Sabemos que el volumen de un cubo de arista l, viene dado por:

$$V=l^3$$

Si la arista del cubo original es x, la del cubo grande será 2x.

Así que con todo esto podemos calcular el volumen del cubo:

$$(2x)^3=216 \quad\to\quad 8x^3=216 \quad\to\quad x^3=\frac{216}{8}=27$$

Por tanto, el volumen del cubo inicial es de 27 m³

39.– Halla el valor de x en las siguientes expresiones.

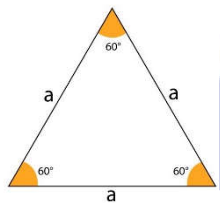
a) $16^x=2^5 \quad\to\quad (2^4)^x=2^5 \quad\to\quad 2^{4x}=2^5 \quad\to\quad 4x=5 \quad\to\quad x=\frac{5}{4}$

b) $3^{x+2}=9^x \quad\to\quad 3^{x+2}=(3^2)^x \quad\to\quad 3^{x+2}=3^{2x} \quad\to\quad x+2=2x \quad\to\quad x=2$

c) $5^{x+1}=625 \quad\to\quad 5^{x+1}=5^4 \quad\to\quad x+1=4 \quad\to\quad x=3$

a) $2^{2x-5}=8 \quad\to\quad 2^{2x-5}=2^3 \quad\to\quad 2x-5=3 \quad\to\quad 2x=8 \quad\to\quad x=4$

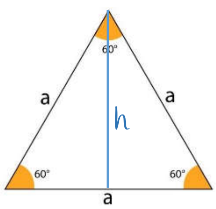
40.– Halla la fórmula del área de un triángulo equilátero de lado a.



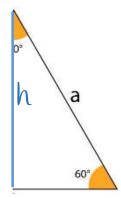
Sabemos que un triángulo equilátero es aquel que tiene todos sus lados y sus ángulos iguales, y además sabemos, o debemos saber, que el área de cualquier triángulo viene dada por la expresión:

$$\text{Área} = \frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{b\cdot h}{2}$$

La base ya la conocemos, **a**, pero la altura no, así que, si nos ayudamos de un dibujo en el que trazamos su altura, h, dicha altura parte el triángulo original en dos triángulos rectángulos iguales.



De forma que, si nos fijamos solo en uno de ellos, la hipotenusa es **a** y uno de los catetos es **a/2**. Aplicando el **Teorema de Pitágoras**, esto nos permitirá calcular la altura:



$$a^2=h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad\to\quad a^2=h^2+\frac{a^2}{4} \quad\to\quad h^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}a^2$$

$\frac{a}{2}$

de donde despejando h, llegamos a:

$$h^2=\frac{3}{4}a^2 \quad\to\quad h=\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=\sqrt{\frac{3\cdot a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3} \quad\to\quad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Así que, conocida la altura, ya podemos calcular el área:

$$\text{Área} = \frac{b\cdot h}{2}=\frac{a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Por tanto, el área pedida es: $A=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

41.– Realiza **paso a paso** los siguientes ejercicios de radicales:

a) Calcula: $\frac{1}{2}\sqrt{180}+3\sqrt{5}-7\sqrt{125}+\frac{3}{2}\sqrt{405}+\frac{5}{6}\sqrt{20}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{180}+3\sqrt{5}-7\sqrt{125}+\frac{3}{2}\sqrt{405}+\frac{5}{6}\sqrt{20}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot3^2\cdot5}+3\sqrt{5}-7\sqrt{5^3}+\frac{3}{2}\sqrt{3^4\cdot5}+\frac{5}{6}\sqrt{2^2\cdot5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sqrt{5}+3\sqrt{5}-7\cdot5\sqrt{5}+\frac{3}{2}\cdot3^2\sqrt{5}+\frac{5}{6}\cdot2\sqrt{5}=3\sqrt{5}+3\sqrt{5}-35\sqrt{5}+\frac{27}{2}\sqrt{5}+\frac{5}{3}\sqrt{5}=-\frac{83\sqrt{5}}{6}$$

b) Expresa en forma de potencia única: $\frac{1}{4^{-1}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{125}}\cdot\sqrt[5]{0,5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{25^3}}=2^2\cdot5^{-\frac{3}{5}}\cdot2^{-\frac{1}{5}}\cdot5^{-\frac{6}{5}}=$

$$\frac{1}{4^{-1}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{125}}\cdot\sqrt[5]{0,5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{25^3}}\overset{\text{Escribimos todos en foma de potencia}}{=}2^2\cdot5^{-\frac{3}{5}}\cdot2^{-\frac{1}{5}}\cdot5^{-\frac{6}{5}}\overset{\text{Operamos}}{=}2^{\frac{9}{5}}\cdot5^{-\frac{9}{5}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{9}{5}}$$

c) Calcula: $\frac{3}{2}\sqrt{45}-\frac{\sqrt{20}}{3}+4\sqrt{125}-2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{180}$

$$\frac{3}{2}\sqrt{45}-\frac{\sqrt{20}}{3}+4\sqrt{125}-2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{180}=\frac{3}{2}\sqrt{3^2\cdot5}-\frac{1}{3}\sqrt{2^2\cdot5}+4\sqrt{5^3}-2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot3^2\cdot5}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot3\sqrt{5}-\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{5}+4\cdot5\sqrt{5}-2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sqrt{5}=\frac{9}{2}\sqrt{5}-\frac{2}{3}\sqrt{5}+20\sqrt{5}-2\sqrt{5}+3\sqrt{5}=\frac{149\sqrt{5}}{6}$$

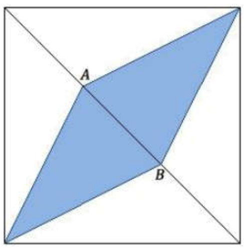
d) Extrae los factores que se puedan de la raíz: $\sqrt[3]{\frac{216}{343}m^{12}b^{15}c}$

$$\sqrt[3]{\frac{216}{343}m^{12}b^{15}c}=\sqrt[3]{\frac{6^3}{7^3}\cdot m^{12}\cdot b^{15}\cdot c}=\frac{6}{7}\cdot m^4\cdot b^5\cdot\sqrt[3]{c}$$

e) Racionaliza: $\frac{\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

$$\frac{\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\overset{\text{Multiplicamos y dividimos por el conjugado}}{=}\frac{\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{24}-5\sqrt{16}}{8}=\frac{2\sqrt{6}-5\cdot4}{8}=\frac{2\sqrt{6}-20}{8}=\frac{\sqrt{6}-10}{4}$$

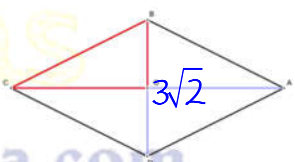
42.– Los puntos A y B dividen la diagonal del cuadrado en tres partes iguales. Si el área del cuadrado es 81 cm^2, ¿cuánto medirá el lado del rombo? Da el valor exacto. (1,5 puntos)



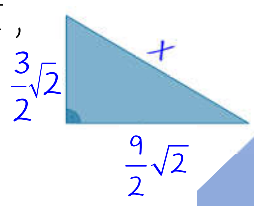
Si el área del cuadrado es de 81 cm^2, su lado será: $l=\sqrt{81}=9\ cm$, y aplicando el Teorema de Pitágoras calculamos la longitud de la diagonal:

$$a^2=b^2+c^2\quad\rightarrow\quad d^2=2l^2\quad\rightarrow\quad d=\sqrt{2\cdot l^2}=\sqrt{2\cdot9^2}=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$$

Como dice que los puntos A y B dividen a la diagonal en tres partes iguales, cada una de esas partes medirá $\frac{1}{3}\cdot9\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ cm, por tanto, ya tenemos la medida de la diagonal menor del rombo.



Si nos fijamos solo en uno de los 4 triángulos rectángulos que forman el rombo podemos observar que un cateto mide la mitad de lo que mide cada parte, $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ y el otro la mitad de lo que mide la diagonal, $\frac{9}{2}\sqrt{2}$, así que, con estos datos y aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras llegamos a:



$$x^2=b^2+c^2\quad\rightarrow\quad x=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{81}{2}}=\sqrt{\frac{90}{2}}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}\ cm$$

Por tanto, el lado del rombo mide $3\sqrt{5}$ cm