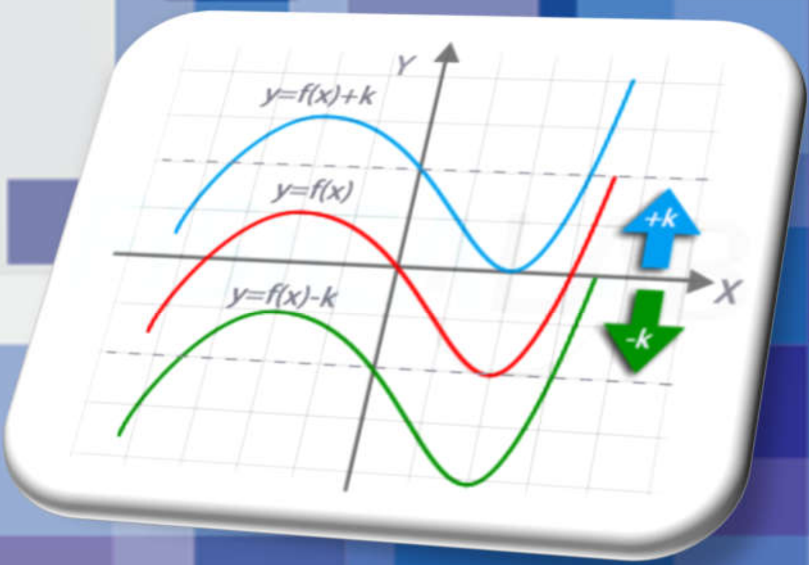
Ejercicios y Problemas

Unidad Didáctica 10

Funciones

3º ESO



Colección de ejercicios de examen resueltos

TEMA 10: FUNCIONES

1.- Indica en la parte izquierda las coordenadas de los puntos del plano cartesiano central y representa en dicho gráfico los puntos indicados a la derecha.

P(x, y)

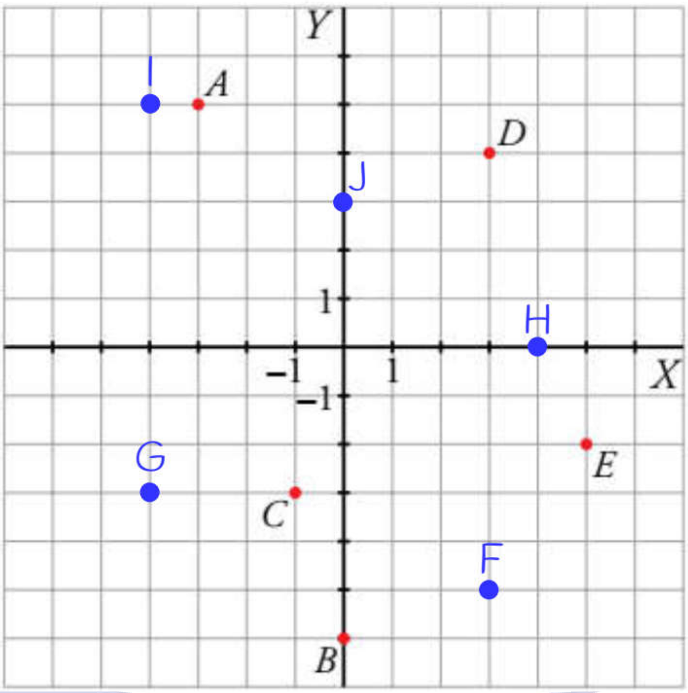
A(-3, 5)

B(0, -6)

C(-1, -3)

D(3, 4)

E(5, -2)



P(x, y)

F(3, -5)

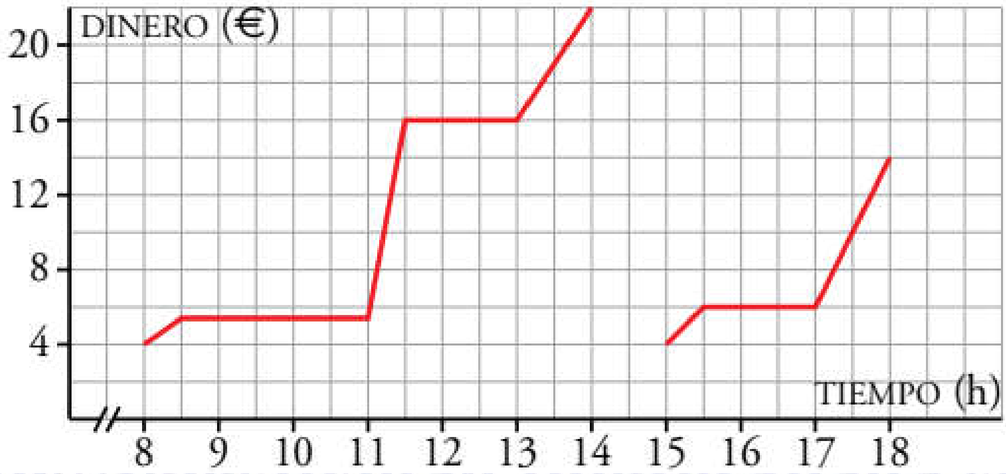
G(-4, -3)

H(4, 0)

I(-4, 5)

J(0, 3)

2.- En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En la siguiente gráfica se refleja la cantidad de dinero que hay en la caja registradora a lo largo de un día:



a) ¿A qué hora empiezan las clases de la mañana?

Las clases comienzan a las 8:30 horas.

b) ¿A qué hora es el recreo? ¿Cuánto dura?

Entre las 11:00 y las 11:30 horas.

c) El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?

Si en la caja había 4 € y a las 14:00 h hay 22 €, los ingresos de la mañana ascienden a 18 €.

d) ¿Cuál es el horario de tarde en el colegio?

De 15:30 h a 17:00 horas

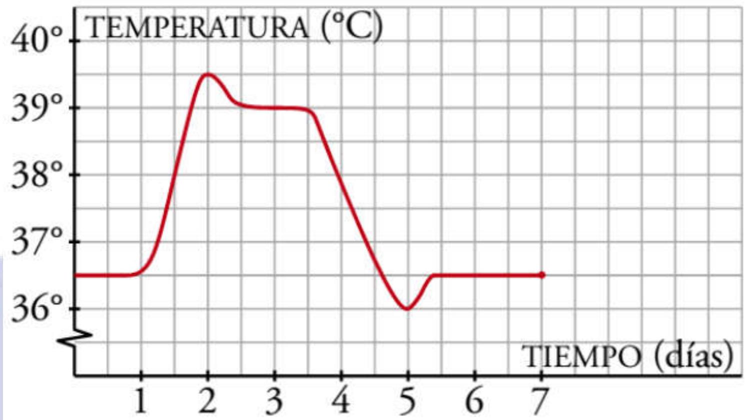
e) ¿Es esta una función continua o discontinua?

Es claramente discontinua puesto que entre las 14:00 h y las 15:00 horas no tenemos información ninguna.

f) ¿Cuánto dinero ha recaudado en todo el día?

Pues 18 de la mañana, y 14−4=10 € de la tarde hacen: 18+10=28 €

3.– Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de un enfermo:



a) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación?

El paciente estuvo en observación durante una semana (7 días)

b) ¿En qué día la temperatura alcanza un máximo? ¿Y un mínimo?

Al final del segundo día y principios del tercero.

c) ¿En qué intervalos de tiempo crece la temperatura y en cuáles decrece?

Crece durante el segundo día y el sexto día.

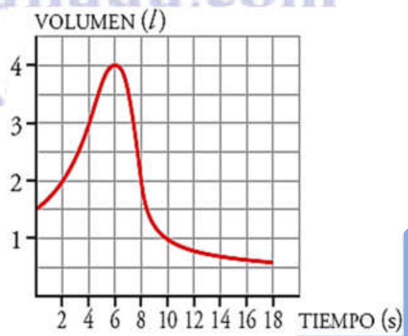
d) ¿Qué tendencia tiene la temperatura?

Tiende a estabilizarse en 36,5 grados con el paso del tiempo.

e) Elabora un pequeño informe interpretando tus resultados.

Al paciente le sube la temperatura en tres grados durante el segundo día, luego le baja un poco hasta 39 grados, donde permanece otro día, y luego baja lentamente hasta llegar a 36 grados el quinto día, a partir del cual la temperatura en 36,5 grados y hasta que se le da el alta.

4.– Para medir la capacidad espiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro. Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.



a) ¿Cuánto tiempo duró la observación? 18 segundos.

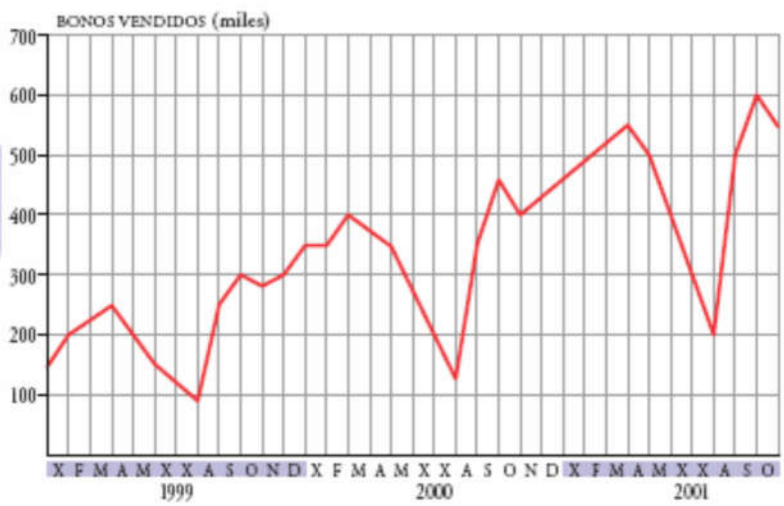
b) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial? 1,5 litros

c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona? 4 litros

d) ¿Cuál es el volumen a los 8 segundos de iniciarse la prueba? 2 litros

e) ¿Pasado cuánto tiempo hay 3 litros de aire en los pulmones del paciente? Pasados 4 segundos

5.- Una compañía de transporte público recogió en una gráfica la información que tiene sobre la venta de bonos para viajar en sus líneas.



a) ¿Durante cuánto tiempo se hizo este estudio?

Durante casi 3 años, 34 meses para ser exactos

b) ¿En qué momento del año 1999 se vendieron menos bonos?

A finales de julio, principios de agosto.

c) ¿Y en cada uno de los años 2000 y 2001?

Igual, finales de julio, principios de agosto.

d) ¿En qué momento del año 2001 se produce la máxima venta?

A finales de septiembre y principios de octubre.

e) ¿A qué lo atribuyes?

Podría ser al inicio del curso escolar, sobre todo el universitario.

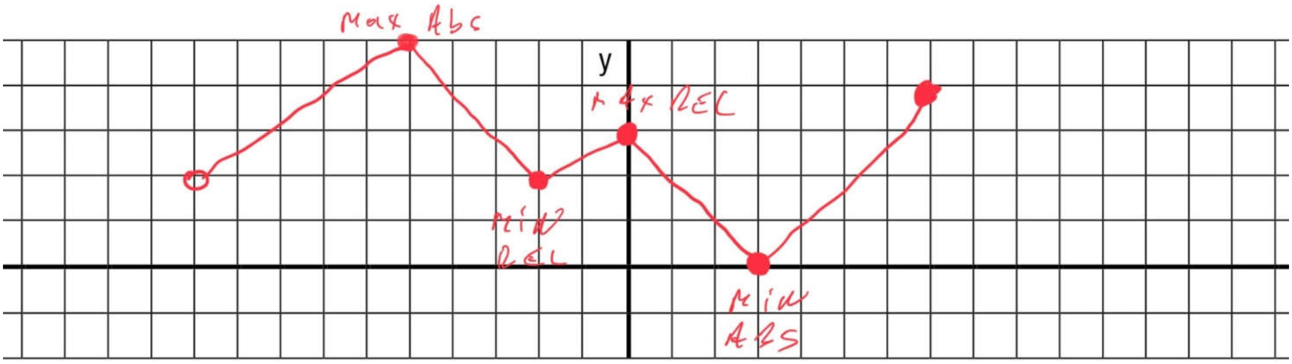
f) ¿En qué periodos anuales es mayor el crecimiento en la venta de bonos?

Durante los meses de septiembre

g) ¿En qué estación del año es decreciente la venta?

Desde el mes de abril hasta el mes de julio.

6.- Representa la gráfica de una función continua con un máximo absoluto en (−5, 5), un máximo relativo en (0, 3), un mínimo absoluto en (3, 0) y un mínimo relativo en (−2, 2).

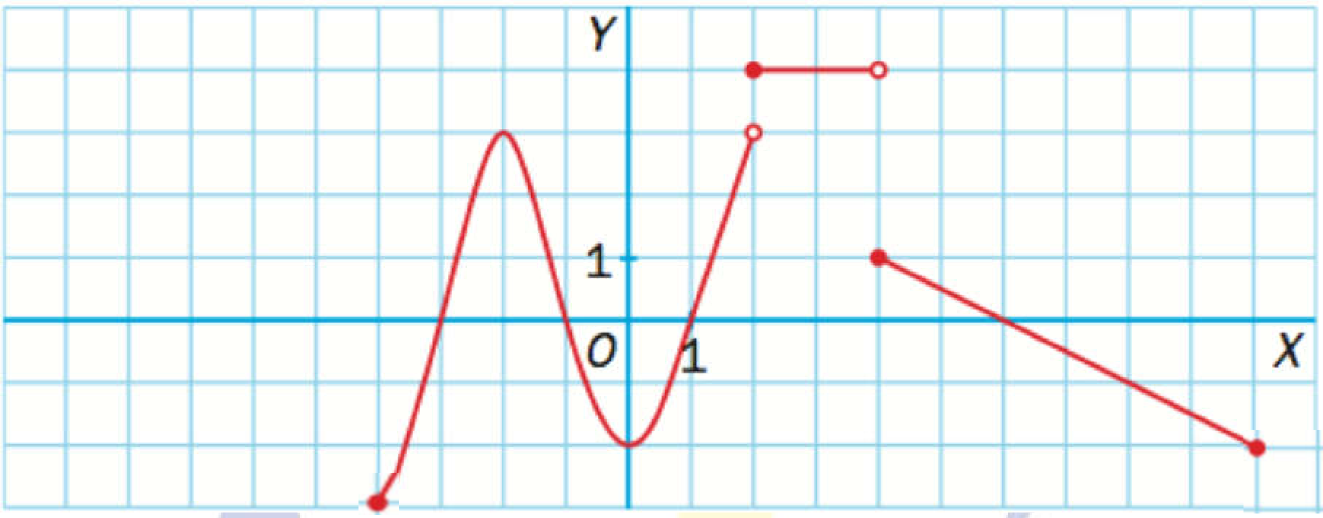


Una vez representada di todo lo que puedas de ella además de lo que ya sabemos.

El dibujo es libre, lo único que ha de pasar por los puntos que nos dicen, pero lo demás es a nuestra elección.

En mi dibujo, el dominio es $dom(f)=(-10,7]$, el recorrido es $\text{Im}(f)=[0,5]$, es creciente en los intervalos: $(-10,-5)\cup(-2,0)\cup(3,7)$, es decreciente en: $(-5,-2)\cup(0,3)$, no es ni simétrica, ni periódica y corta con el eje x en el punto (3,0) y con el eje y en el (0,3).

7.- Estudia de la siguiente función: Dominio y recorrido, simetrías, periodicidad, continuidad, puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos.



a) Dominio: El **dominio son los valores de** x para los que existe y, o **para los que existe dibujo**. Por tanto, tenemos dibujo desde x=−4 (incluido), hasta x=10 (también incluido), así que: $dom(f)=[-4,10]$

b) Recorrido: El **recorrido son los valores de y para los que hay dibujo**, (lo mismo que el dominio, pero fijándonos en el eje y). Por tanto, tenemos dibujo desde y=−3 hasta y=3 ambos incluidos y luego en y=4, así que: $\text{Im}(f)=[-3,3]\cup[4,4]$

c) Simetrías: No es simétrica porque no tiene ningún eje de simetría.

d) Periodicidad: Tampoco es periódica porque el dibujo no se repite infinitamente.

e) Continuidad: Como podemos ver, la gráfica no se puede pintar de inicio a fin sin levantar el lápiz del papel, puesto que en los puntos x=2 y x=4 lo hemos hecho.

Así que, la función f(x) es continua **en todo su dominio** menos en los puntos de abscisas x=2 y x=4 donde presenta dos discontinuidades de salto.

f) Puntos de corte con los ejes: Son los puntos donde la función corta con los ejes cartesianos. Mirando la gráfica los podemos obtener rápidamente:

1) Con el eje x: En los puntos x=−3, x=−1, x=1 y x=6
2) Con el eje y: En el punto (0,−2)

g) *Monotonía:* Son los intervalos donde la función es creciente, decreciente o constante.

1) f es creciente en: $(-4,-2)\cup(0,2)$
2) f es decreciente en: $(-2,0)\cup(4,10)$
3) f es constante en: $(2,4)$

h) *Máximos y Mínimos:* Máximo relativo en el punto $(-2,3)$ y mínimo relativo en $(0,-2)$. No hay ni máximos ni mínimos absolutos.

8.- Calcula el dominio y los puntos de corte de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2+9x}{x^3-4x^2}$

Sabemos que el dominio de una función son los valores de la variable independiente, para los que existe valor de la dependiente, como la función es una función racional, cociente de funciones polinómicas, solo tendrá problemas en los puntos donde se anule el denominador. Por tanto, vamos a ver cuáles son esos puntos igualándolo a cero y calculando sus raíces.

$$x^3-4x^2=0 \quad \leftrightarrow \quad x^2(x-4)=0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2=0 & \rightarrow \quad x_1=0 \\ x-4=0 & \rightarrow \quad x_2=4 \end{cases}$$

Luego el dominio son todos los números reales, menos los que anulan el denominador:

$$dom(f)=\mathbb{R}-\{0,4\}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes hacíamos:

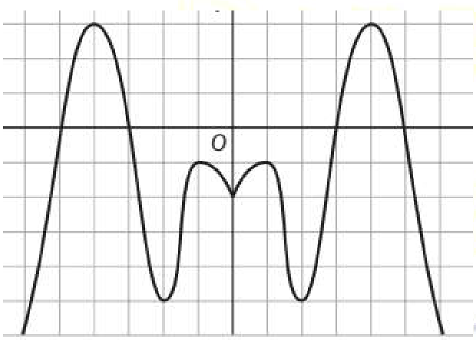
- Con el eje x, igualamos el numerador a cero:

$$x^2+9x=0 \quad \leftrightarrow \quad x\cdot(x+9)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 & \rightarrow \quad x_1=0 \quad \rightarrow \quad \text{no pertenece al dominio} \\ x+9=0 & \rightarrow \quad x_2=-9 \end{cases}$$

- Con el eje y, calculamos f(0): No podemos hacerlo porque el 0 no pertenece al dominio.

Por tanto, el único punto de corte con los ejes es el (-9,0)

9.- Estudia la gráfica de la siguiente función:



a) dominio: $dom(f)=(-\infty,+\infty)$

b) Recorrido: $\mathrm{Im}(f)=(-\infty,4]$

c) La función presenta simetría PAR.

d) No es periódica

e) Es continua en su dominio

f) Corta el eje x en -5, -3, +3 y +5

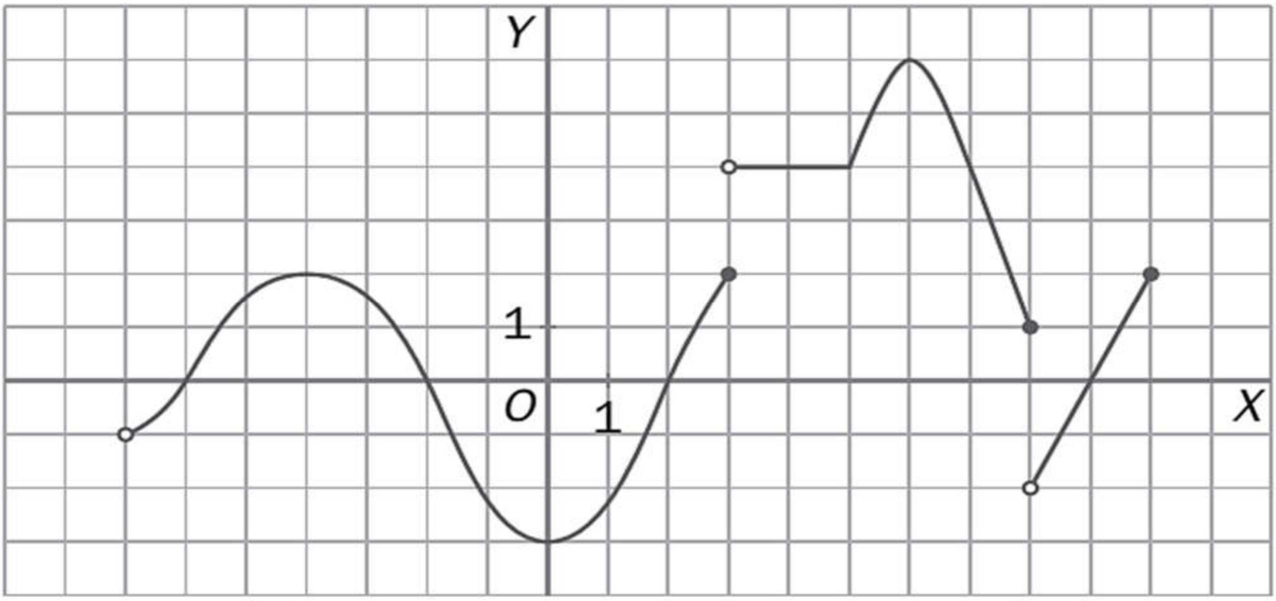
g) Corta el eje y en (0,-2)

h) La función crece en $(-\infty,-4)\cup(-2,-1)\cup(0,1)\cup(2,4)$

i) La función decrece en $(-4,-2)\cup(-1,0)\cup(1,2)\cup(4,+\infty)$

j) La función presenta máximos absolutos en (-4,3) y (4,3), Máximos relativos en (-1,-1) y (1,-1) y mínimos relativos en (-2,-5) y (2,-5). No presenta mínimo absoluto.

10.- Estudia de la siguiente función: Dominio y recorrido, continuidad, puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos.



a) Dominio: El dominio son los valores de x para los que existe y, o para los que existe dibujo. Por tanto, tenemos dibujo desde x=−7 (no incluido), hasta x=10 (incluido), así que: $dom(f)=(-7,10]$

b) Recorrido: El recorrido son los valores de y para los que hay dibujo, (lo mismo que el dominio, pero fijándonos en el eje y). Por tanto, tenemos dibujo desde y=−3 hasta y=6 ambos incluidos, así que: $\operatorname{Im}(f)=[-3,6]$

c) Continuidad: La función f(x) es continua en todo su dominio menos en los puntos de abscisas x=3 y x=8 donde presenta dos discontinuidades de salto.

d) Puntos de corte con los ejes: Son los puntos donde la función corta con los ejes cartesianos.
   1) Con el eje x: En los puntos x=−6, x=−2, x=2 y x=9
   2) Con el eje y: En el punto (0,−3)

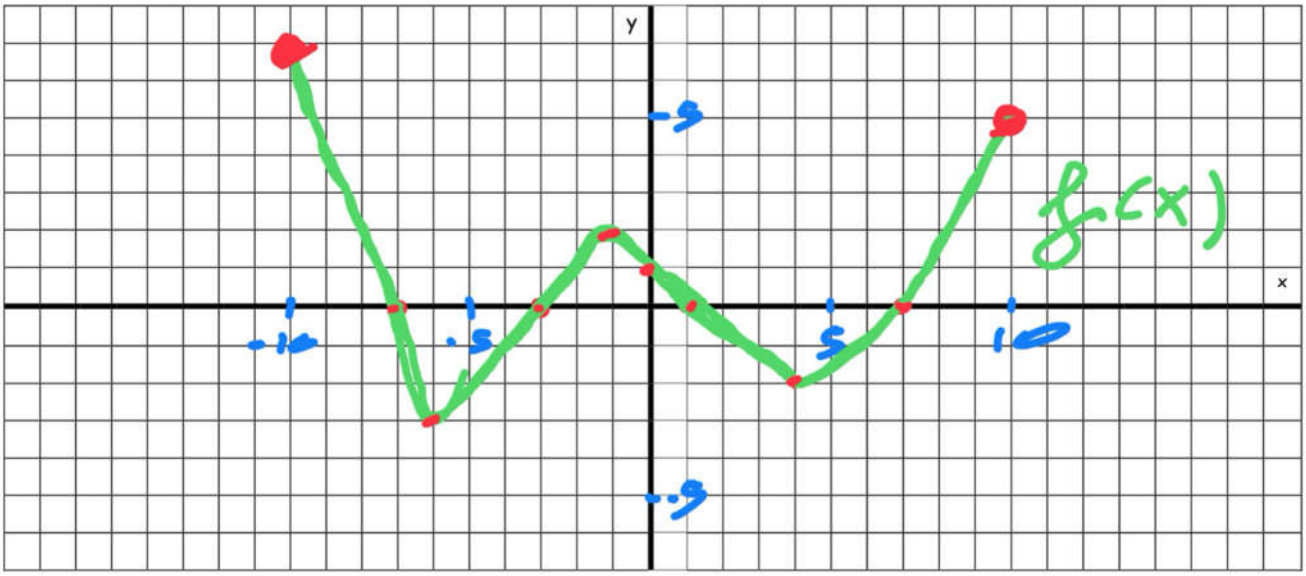
e) *Monotonía:* Son los intervalos donde la función es creciente, decreciente o constante.
   1) f *es creciente en*: $(-7,-4)\cup(0,3)\cup(5,6)$
   2) f *es decreciente en*: $(-4,0)\cup(6,8)$
   3) f *es constante en*: $(3,5)$

i) *Máximos y Mínimos:* Máximo relativo en el punto (−4,2), Máximo Absoluto en (6,6) y Mínimo Absoluto en (0,−3). No hay mínimo relativo.

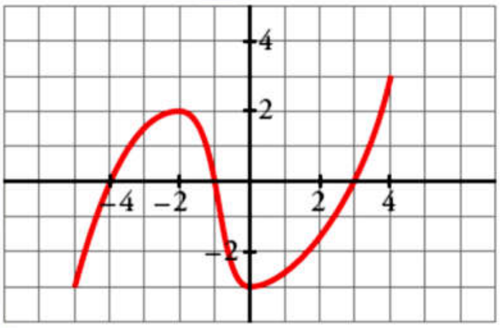
11.- Representa la función de la que sabemos:

- $Dom(f)=[-10,10]$
- $f(-10)=7 \quad y \quad f(10)=5$
- Es continua en [−10,10]
- f *es creciente en* $[-6,-1]\cup[4,10]$
- f *es decreciente en* $[-10,-6]\cup[-1,4]$

- f presenta un máximo en (−1,2), y mínimos en (−6,−3) y (4,−2). ¿Alguno es Absoluto?
- La función corta al eje X en los puntos (−7,0), (−3,0), (1,0) y (7,0).
- La función corta el eje Y en el punto (0,1)



12.− Estudiar la siguiente función: (dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, periodicidad y tendencia, continuidad, máximos y mínimos relativos y absolutos, cortes con los ejes......)



El dominio de la función es desde −5 hasta 4, ambos incluidos:

$$dom(f)=[-5,4]$$

El recorrido va desde −3 hasta 3, también ambos incluidos: $Im(f)=[-3,3]$

La función es continua en todo su dominio.

La función es creciente desde −5 hasta −2 y desde 0 hasta 4: f ↑ (−5,−2) ∪ (0,4)

La función es decreciente desde −2 hasta 0: f ↓ (−2,0)

La función presenta un máximo relativo en (−2,2) y un mínimo relativo en (0,−3), además no hay extremos absolutos.

No se trata de una función periódica ni tampoco simétrica.

Corta con el eje x en los puntos (−4,0), (−1,0) y en (3,0)

Corta con el eje y en el punto (0,−3)