

Ecuaciones Lineales

Una **ecuación lineal** es una ecuación de primer grado en la que aparecen varias incógnitas. Nos centraremos en las **ecuaciones lineales con dos incógnitas** que podemos expresar de la forma:

$$ax + by = c$$

Donde **x**, **y** son las incógnitas y **a**, **b** y **c** son números conocidos; **a** y **b** son los **coeficientes** y **c** es el **término independiente**.

La **solución** de una ecuación lineal con dos incógnitas es cualquier par de números, uno para cada incógnita, que hacen cierta (o también decimos, que verifican) la igualdad.

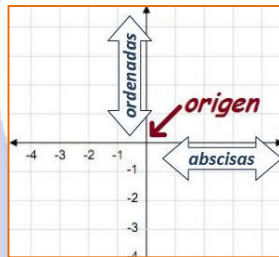
Llamamos **ecuaciones lineales equivalentes** a aquellas ecuaciones que tienen las mismas soluciones.

Representación gráfica de una ecuación

Para obtener distintas soluciones de una ecuación lineal, se puede hacer de forma gráfica. Para ello, se suele despejar una de las incógnitas en función de la otra (normalmente la **y**) y dar valores a la otra (normalmente la **x**). Los valores obtenidos se recogen, ordenados, en una **tabla de doble entrada** y después se representan en el plano cartesiano.

x	y

El **plano cartesiano** son dos ejes perpendiculares, uno horizontal, el **eje x**, también llamado **eje de abscisas** y un eje vertical, el **eje y**, también llamado **eje de ordenadas**. El punto donde se cruzan ambos ejes se denomina punto **O**, y se le denomina **Origen de coordenadas**.



Representa la ecuación lineal $3x + y = 45$

Vamos a representar las distintas soluciones de la ecuación:

$$3x + y = 45$$

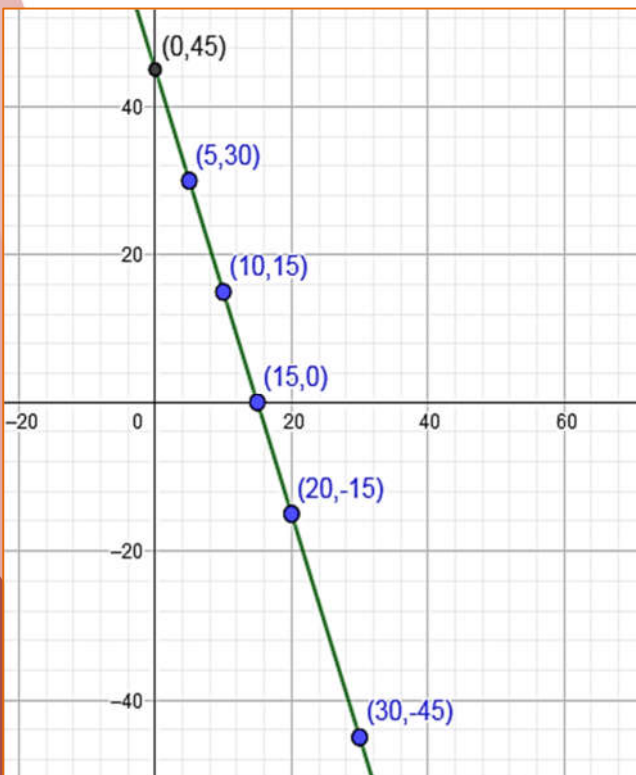
Para ello, lo primero es despejar la variable **y**: $y = 45 - 3x$

Una vez despejada, hacemos una tabla de doble entrada

x	0	5	10	15	20	30
y	45	30	15	0	-15	-45

Y una vez hecho esto se representan todos los puntos (x,y) en el plano cartesiano y, cómo podemos observar, quedan alineados en una recta.

Recta de ecuación: $3x + y = 45$



Por tanto, a la hora de hacer la representación gráfica de una ecuación, hemos de tener en cuenta que:

Cada ecuación lineal tiene una recta asociada en el plano.

Cada punto de esa recta representa una de las infinitas soluciones de la ecuación lineal.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** son dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común. Son de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

ejemplo: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 12 \end{cases}$

Donde **a**, **b**, **d** y **e** son los coeficientes y **c** y **f** son los términos independientes.

La **solución** de un sistema es un par de números, uno para **x** y otro para **y** (x,y) que hace ciertas (o que verifica) las dos ecuaciones lineales a la vez.

Métodos de resolución de Sistemas de Ecuaciones

Resolver un sistema de ecuaciones, será encontrar ese par de números (x,y) que verifiquen las dos ecuaciones a la vez.

Existen **cuatro métodos diferentes** para resolver un sistema, uno de ellos gráfico y otros tres algebraicos.

Método Gráfico

El **método gráfico** consiste en representar gráficamente las rectas de las dos ecuaciones en la misma gráfica (o mismo sistema de ejes cartesianos) y el **punto donde se corten será la solución del sistema**.

Los pasos a seguir son los siguientes:

- 1) Despejamos la **y** en las dos ecuaciones.
- 2) Realizamos la tabla de valores de cada una de ellas.
- 3) Representamos gráficamente las dos ecuaciones.
- 4) El punto de cruce de ambas rectas es la solución.

Resuelve gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Si numeramos las ecuaciones, el trabajo nos resultará más fácil:

De la ecuación (1), despejamos **y**: $y = x - 4$

Nos inventamos algunos valores para **x**, los sustituimos en la ecuación y calculamos los valores de **y**.

Repetimos el proceso con la otra ecuación:

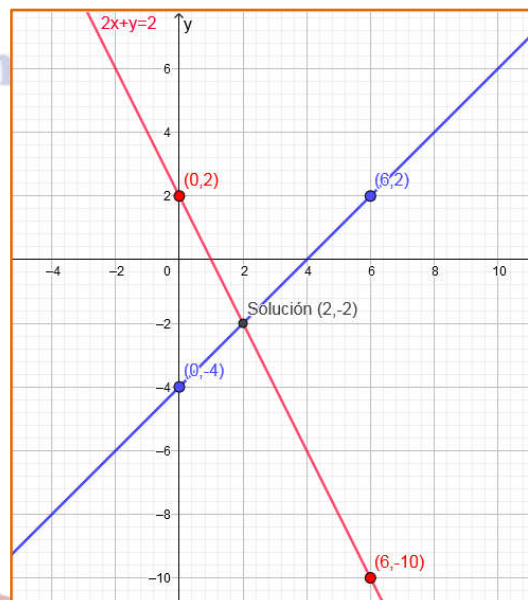
de la ecuación (2), despejamos **y**: $y = 2 - 2x$

Nos inventamos algunos valores para **x**, los sustituimos en la ecuación y calculamos los valores de **y**.

Después **representamos ambas rectas en el mismo plano cartesiano** y observamos el punto de corte entre ambas rectas. A veces puede ocurrir que en ambas tablas ya salga la solución, como ha ocurrido en este caso (2,-2)

x	y
0	-4
2	-2
4	0
6	2

x	y
0	2
2	-2
4	-6
6	-10



Método de Sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra.

Los pasos a seguir son los siguientes:

- 1) Despejamos de una de las ecuaciones una de las incógnitas. (**Siempre la más fácil**)
- 2) Sustituimos en la otra ecuación y obtenemos una ecuación de primer grado.
- 3) Resolvemos la ecuación y obtenemos el valor de una de las incógnitas.
- 4) Sustituimos este valor en la expresión del paso (1) y obtenemos el valor de la otra incógnita.
- 5) Damos la solución del sistema indicando de qué tipo de sistema se trata.

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1) \ x - y = 4 \\ 2) \ 2x + y = 2 \end{cases}$$

De la ecuación (2) despejamos la y: $y = 2 - 2x$

En la ecuación (1) sustituimos la y por lo obtenido en el paso anterior:

$$\begin{aligned} x - y = 4 &\rightarrow x - (2 - 2x) = 4 && x - 2 + 2x = 4 \\ &\rightarrow 3x - 2 = 4 \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$3x - 2 = 4 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

Sustituimos en la ecuación (2) el valor obtenido para x, y obtenemos el valor de y:

$$y = 2 - 2x \rightarrow y = 2 - 2(2) = 2 - 4 = -2$$

La solución del sistema es:

$$x = 2 \quad y = -2 \rightarrow (x, y) = (2, -2)$$

Por tanto, el sistema es: S.C.D. $\{x = 2; y = -2\}$

Método de Igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las dos expresiones resultantes.

Los pasos a seguir son los siguientes:

- 1) Despejamos la misma incógnita en cada una de las ecuaciones.
- 2) Igualamos ambas expresiones, lo cual da lugar a una ecuación de primer grado.
- 3) Resolvemos la ecuación, obteniendo el valor de una de las incógnitas.
- 4) Sustituimos dicho valor en una de las dos expresiones obtenida en el paso (1), normalmente la más fácil y obtenemos el valor de la otra incógnita.
- 5) Damos la solución del sistema indicando de qué tipo de sistema se trata.

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1) \ x - y = 4 \\ 2) \ 2x + y = 2 \end{cases}$$

De la ecuación (1) despejamos la y: $y = x - 4$

De la ecuación (2) despejamos la y: $y = 2 - 2x$

Igualemos ambas expresiones: $x - 4 = 2 - 2x$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$x + 2x = 4 + 2 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

Sustituimos en alguna de las ecuaciones del paso (1):

$$y = x - 4 \rightarrow y = 2 - 4 = -2$$

Por tanto, el sistema es: S.C.D. $\{x = 2; y = -2\}$

Método de Reducción

El **método de reducción** consiste en preparar las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, pero con distinto signo. Sumando las ecuaciones resultantes,

miembro a miembro, se obtiene otra ecuación con solo una incógnita (se ha reducido el número de incógnitas, de ahí su nombre).

Los pasos a seguir son los siguientes:

- 1) Preparamos ambas ecuaciones multiplicándolas por los números que nos convenga, normalmente la primera por el coeficiente de la x (o de la y) de la segunda y la segunda por el opuesto del coeficiente x (o el de la y) de la primera ecuación.
- 2) Sumamos las dos ecuaciones y desaparece una de las incógnitas.
- 3) Resolvemos la ecuación resultante.
- 4) Sustituimos dicho valor en una de las dos ecuaciones y obtenemos el valor de la otra incógnita.
- 5) Damos la solución indicando de qué tipo de sistema se trata.

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1) \ 2x - 3y = 9 \\ 2) \ 5x + 4y = 11 \end{cases}$$

Vamos a reducir la x, y para ello multiplicamos la ecuación (1) por 5, el coeficiente x de la ecuación (2), y la ecuación (2) por -2, el opuesto del coeficiente x de la ecuación (1), porque ambas tienen el mismo signo:

$$\begin{aligned} (1) \ 2x - 3y &= 9 &\rightarrow & 5(2x - 3y = 9) &\rightarrow & 10x - 15y = 45 \\ (2) \ 5x + 4y &= 11 &\rightarrow & -2(5x + 4y = 11) &\rightarrow & -10x - 8y = -22 \end{aligned}$$

Se suman las dos ecuaciones para reducir la variable x:

$$\begin{array}{r} 10x - 15y = 45 \\ + \quad -10x - 8y = -22 \\ \hline 0x - 23y = 23 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación: $-23y = 23 \rightarrow y = \frac{23}{-23} = -1$

En la ecuación (1), sustituimos y por -1:

$$2x - 3y = 9 \rightarrow 2x - 3(-1) = 9 \rightarrow 2x + 3 = 9$$

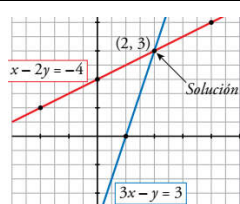
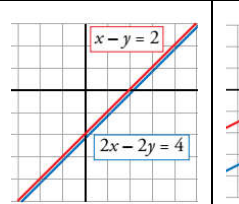
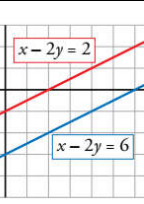
$$2x = 9 - 3 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Por tanto, el sistema es: S.C.D. $\{x = 3; y = -1\}$

Cuando en un sistema multiplicamos alguna de las ecuaciones, o incluso ambas, por números, encontramos otro sistema, con la misma solución que el anterior. Por eso decimos que es un sistema equivalente.

Se dice que **dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero lo es también del segundo y, recíprocamente, cada solución del segundo es también solución del primero.

Resumiendo, los sistemas pueden ser:

S.C.D.	S.C.I.	S.I.
Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible
Tiene una solución	Infinitas soluciones	Sin solución
$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$
		
Rectas secantes	Rectas coincidentes	Rectas paralelas
Encontramos x e y.	Llegamos a: $0x + 0y = 0$	Llegamos a: $0x + 0y = k$

Resuelve los siguientes sistemas usando los 4 métodos:

$$\begin{aligned} a) \ &\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 5y = 3 \end{cases} & b) \ &\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 5x + 4y = 11 \end{cases} & c) \ &\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 6y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$