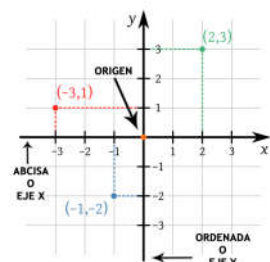
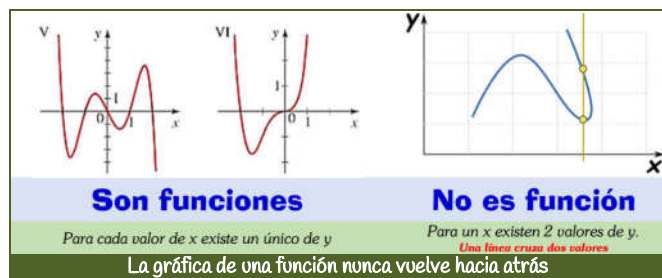


Funciones

Una **función** es una relación entre dos variables, x e y , de forma que, a cada valor de la **variable independiente**, x , le hace corresponder un único valor de la **variable dependiente**, y .

Se representa por: $y = f(x)$



Representando los pares de valores relacionados (x, y) en un sistema cartesiano de coordenadas obtenemos la gráfica de la función.

La primera coordenada o abscisa, x , nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje vertical, y la segunda coordenada u ordenada, y , nos indica la distancia a la que dicho punto se encuentra del eje horizontal.

Formas de expresar una función

Las funciones vienen dadas de diversas formas: mediante una **gráfica**, una **tabla de valores**, una **fórmula** o mediante un **enunciado**.

Función definida por un enunciado

Cuando una función viene dada por un enunciado o una descripción, la idea que nos podemos hacer de ella es, casi siempre, cuantitativamente poco precisa. Pero si el enunciado se acompaña con datos numéricos, la función puede quedar perfectamente determinada.

En un teatro cada entrada cuesta 18€. La relación entre las entradas vendidas y la recaudación, ¿es una función?

A la magnitud entradas vendidas la llamamos x , y toma los valores 1, 2, 3, 4, ... Es la **variable independiente**.

La magnitud recaudación del teatro, que llamamos y , toma los valores 18, 36, 54, ... en función de la cantidad de entradas vendidas. Es la **variable dependiente**.

A cada número de entradas vendidas le corresponde una única recaudación. Es decir, a cada valor de x le corresponde un único valor de y , así que **la relación es una función**.

Función definida por una expresión algebraica

En ocasiones, las funciones vienen dadas por una expresión algebraica. La expresión $y = f(x)$ hace referencia a la ecuación de una función. Esta expresión algebraica es la forma más precisa y operativa de dar una función.

La ecuación del espacio recorrido por un móvil es $S(t) = 5 + 3t + 2t^2$, donde s , se expresa en metros y t en segundos. ¿Qué longitud ha recorrido el móvil al cabo de 5 segundos de iniciar el movimiento?

El móvil habrá recorrido: $S(5) = 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 = 5 + 15 + 50 = 70 \text{ m}$

Función definida mediante una tabla

Con frecuencia se nos dan los valores de una función mediante una tabla en la cual se obtienen directamente los datos buscados. Sin embargo, en otros casos hay que efectuar complejos cálculos para obtener lo que se busca.

Al estudiar el movimiento de un objeto, se han obtenido los siguientes resultados:

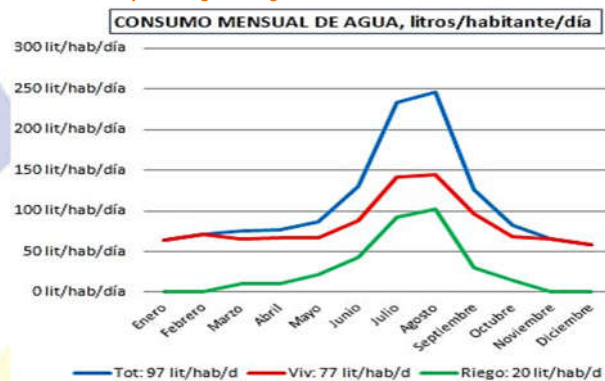
Posición (cm)	4	16,5	24	29	54
Tiempo (s)	0	5	8	10	20

Función definida mediante una gráfica

La forma más frecuente de encontrarnos con una función es mediante su gráfica. Recordar que, en el eje de las x , eje de

abscisas, se representa la variable independiente, mientras que, en el eje de ordenadas, eje y , se representa la variable dependiente.

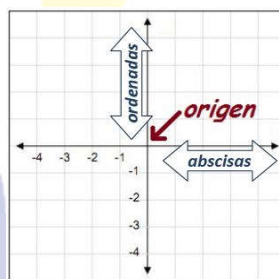
El consumo de agua en una vivienda unifamiliar de Madrid durante el año 2018 viene dado por la siguiente gráfica:



- ¿Qué mes del año se consume más agua? **Agosto**
- ¿En qué mes se consume menos? **Diciembre**
- ¿por qué crees que es así? **Por el clima, en agosto hace + calor**

Representación de una función lineal

Para representar la **gráfica** de una función lineal haremos lo mismo que hacíamos en la resolución de sistemas por método gráfico, despejamos y , hacemos una tabla de doble entrada en la



que nos inventaremos los valores de la variable independiente, x (siempre fáciles y no muy grandes), como, por ejemplo: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 y los sustituimos en la función para calcular los distintos valores de y . Con ellos ya tenemos los puntos (x, y) , que pintaremos en un sistema cartesiano y los uniremos con una regla.

Representa la gráfica de la función dada por la ecuación general: $3x + y = 45$

lo primero es despejar la variable y : $y = f(x) = 45 - 3x$

Una vez despejada, hacemos una tabla de doble entrada en la que nos inventamos algunos valores de x .

x	0	5	10	15	20	30
y	45	30	15	0	-15	-45

Y calculamos su valor sustituyendo en la función:

$$f(0) = 45 - 3 \cdot 0 = 45 - 0 = 45$$

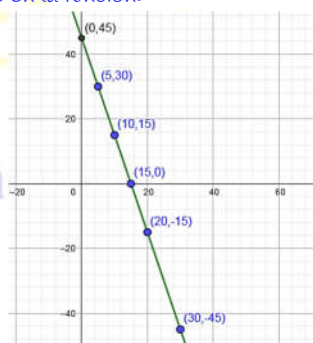
$$f(5) = 45 - 3 \cdot 5 = 45 - 15 = 30$$

$$f(10) = 45 - 3 \cdot 10 = 45 - 30 = 15$$

$$f(15) = 45 - 3 \cdot 15 = 45 - 45 = 0$$

Después, se representan todos los puntos (x, y) obtenidos en el plano cartesiano que quedaran alineados en una recta que trazaremos con una regla.

Recta de ecuación: $3x + y = 45$



Características de una función

Hay ciertas características que permiten analizar y clasificar una función y que se refieren a los puntos especiales y a la forma y comportamiento de la curva.

Domínio y Recorrido

Llamamos **dominio** de una función a los valores de x (variable independiente) para los que hay dibujo. Y llamamos **recorrido de una función** a los valores de y (variable dependiente) para los que también lo hay.

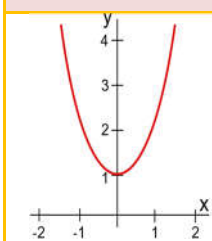


Continuidad

Una **función es continua** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, $f(x)$ es continua si puede dibujarse sin separar el lápiz de la hoja de papel. Si en algún punto la función no es continua, se suele decir que la función es continua excepto en el punto $x=a$ donde presenta una discontinuidad.

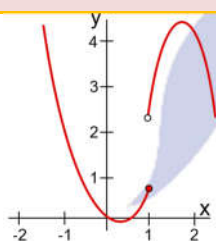
Cuando en un punto a los valores de la función por la izquierda y por la derecha no coinciden, se denomina **discontinuidad de salto**.

Función Continua



Función continua

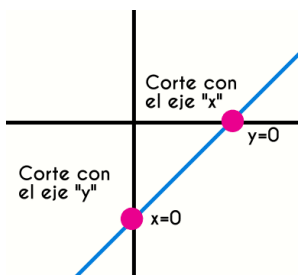
Función discontinua



Función continua en todo su dominio excepto en $x=1$ donde presenta una discontinuidad de salto

Cortes con los ejes

Llamamos **puntos de corte con los ejes** a los puntos donde la función $f(x)$ corta con los ejes de ordenadas y de abscisas.

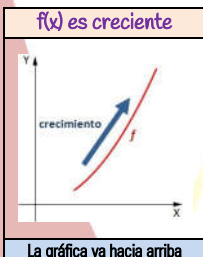


Con el eje x: Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen igualando la función a cero $f(x)=0$. Son de la forma $(a,0)$ y pueden existir varios puntos.

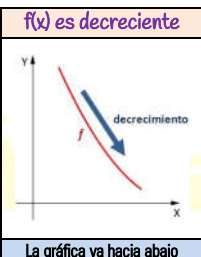
Con el eje y: El punto de corte con el eje de ordenadas si existe es único y se obtiene sustituyendo el cero en la función. Es de la forma $(0, f(0))$.

Monotonía: Crecimiento y decrecimiento

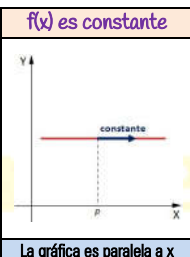
En la gráfica de una función, estudiar su **monotonía**, es ver si la función es **creciente**, **decreciente** o **constante**.



La gráfica va hacia arriba

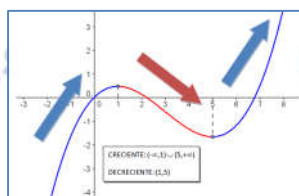


La gráfica va hacia abajo



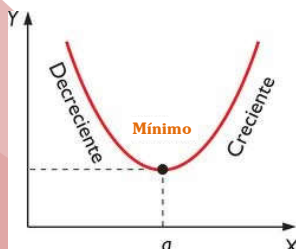
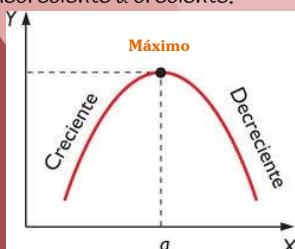
La gráfica es paralela a x

En muchas ocasiones, nos encontraremos con funciones que, no son siempre crecientes o decrecientes, sino que tendrán intervalos crecientes, intervalos decrecientes y otros intervalos donde la función es constante.

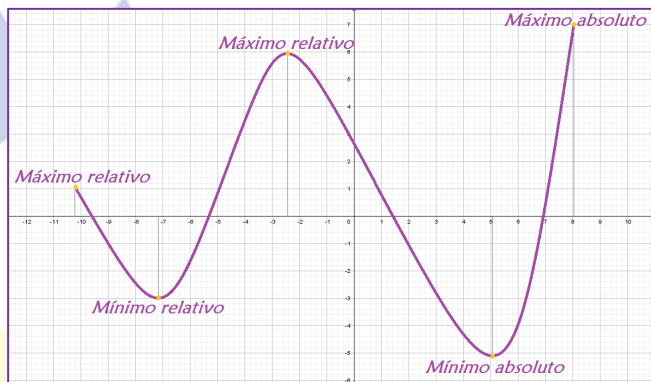


Máximos y mínimos

Diremos que una función $f(x)$ tiene un **máximo** en el punto $x=a$, si en dicho punto la función pasa de ser creciente a decreciente, y tiene un **mínimo** si la función pasa en ese mismo punto de ser decreciente a creciente.



Un punto $x=a$ de una gráfica es el **máximo absoluto**, si además de ser **máximo**, es el **punto más alto de la gráfica**, en caso contrario diremos que se trata de un **máximo relativo**. De forma similar, es el **mínimo absoluto**, si además de ser **mínimo**, es el **punto más bajo de la gráfica**, en caso contrario diremos que se trata de un **mínimo relativo**.

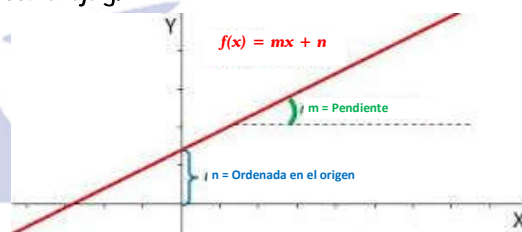


Funciones Lineales

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado cuya gráfica es una línea recta. Su expresión algebraica es de la forma:

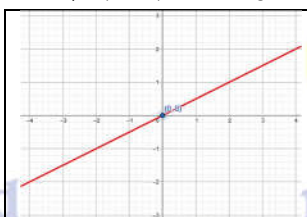
$$y = mx + n \rightarrow \begin{cases} m = \text{Pendiente de la recta} \\ n = \text{Ordenada en el origen} \end{cases}$$

Donde **m** es la **pendiente** e indica la inclinación de la recta con respecto al eje x, y **n**, **ordenada en el origen** e indica el **punto de corte con el eje y**.



Funciones de proporcionalidad

En una función lineal, si $n=0$, la función queda de la forma **$y=mx$** y se llaman **funciones de proporcionalidad**. Su gráfica es una línea recta que pasa por el Origen de coordenadas $(0,0)$.



Si $m > 0$

Función Creciente



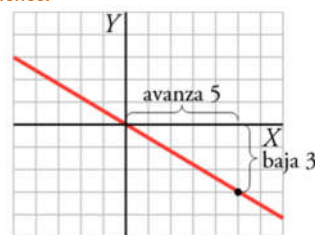
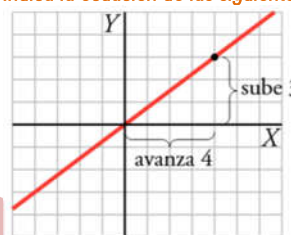
Si $m < 0$

Función Decreciente

Conociendo un punto de la recta (x_0, y_0) diferente del origen de coordenadas, podemos calcular la pendiente despejándola de la expresión:

$$y = mx \rightarrow m = \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\text{Lo que sube (o baja)}}{\text{Lo que avanza}}$$

Indica la ecuación de las siguientes funciones:

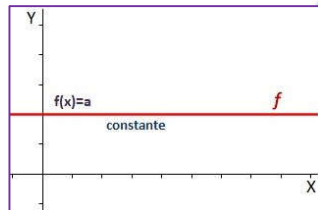


$$a) m = \frac{y}{x} = \frac{\text{Lo que sube}}{\text{Lo que avanza}} = \frac{3}{4} \rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

$$b) m = \frac{y}{x} = \frac{-\text{Lo que baja}}{\text{Lo que avanza}} = \frac{-3}{5} = -2 \rightarrow y = -\frac{3}{5}x$$

Función Constante

Se llama **función constante** a la función lineal que en la que el valor de y es siempre el mismo independientemente del valor de la x. Su pendiente es **m=0**, su ordenada en el origen es **(0,b)** y su gráfica es paralela al eje y.



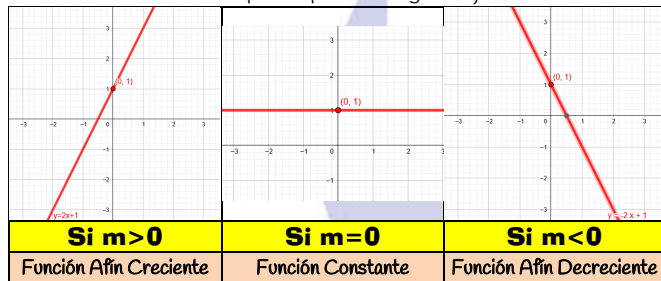
$$\text{Si } m=0 \rightarrow y = mx + n = 0 \cdot x + n = n \rightarrow y = n$$

Función Afín

Se llama **función afín** a la función lineal donde m y n son no nulos.

$$\text{Si } \begin{cases} m \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \rightarrow y = mx + b \rightarrow \text{función afín}$$

Las funciones afines no pasan por el Origen (0,0).



Conocidos dos puntos de una recta (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , podemos calcular la pendiente de la recta que los une calculando primero la m y luego la n:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Lo que sube (o baja)}}{\text{Lo que avanza}} \quad n = \text{Utilizamos un punto}$$

Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos M(0,5) y N(2,-5).

Lo primero es calcular la pendiente de la recta que pasa por ellos, para ellos nos ayudaremos de la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 - 5}{2 - 0} = -5 \rightarrow m = -5$$

Una vez obtenida la pendiente, con cualquiera de los puntos obtenemos la ordenada en el origen n:

$$y = mx + n \Rightarrow y = -5x + n$$

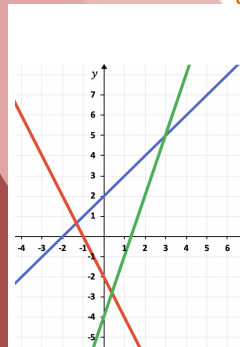
Con el punto M(0,5) calculamos el valor de n:

$$5 = -5 \cdot 0 + b \rightarrow b = 5$$

Por tanto, la recta pedida es: **y = -5x + 5**

Si nos dan las gráficas de las funciones y nos piden calcular sus ecuaciones, bastaría con calcular la pendiente m de cada una de ellas, puesto que la ordenada en el origen la podríamos obtener de la misma gráfica.

Indica la ecuación de las siguientes rectas:



azul) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Lo que sube (o baja)}}{\text{Lo que avanza}} = \frac{3}{3} = 1$
 $\rightarrow y = 1x + b$

Corta al eje y en el punto b=2 $\rightarrow y = x + 2$

rojo) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Lo que sube (o baja)}}{\text{Lo que avanza}} = \frac{-2}{1} = -2$
 $\rightarrow y = -2x + b$

Corta al eje y en el punto b=-2 $\rightarrow y = -2x - 2$

verde) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Lo que sube (o baja)}}{\text{Lo que avanza}} = \frac{3}{1} = 3$
 $\rightarrow y = 3x + b$

Corta al eje y en el punto b=-4 $\rightarrow y = 3x - 4$

Ecuaciones de la Recta

Existen distintas formas de escribir la ecuación de una recta:

$$y = mx + n$$

Forma Explícita

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Forma Punto - Pendiente

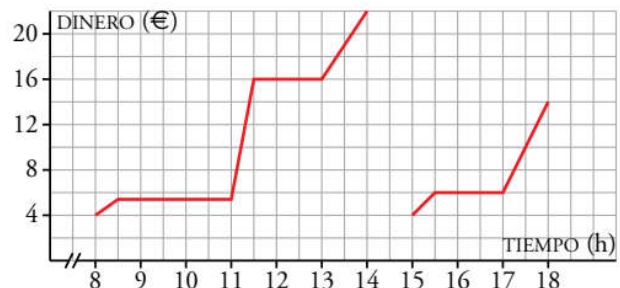
$$ax + by - c = 0$$

Forma General

Para calcular la ecuación de una recta necesitamos:

Dos puntos ó Un punto y la pendiente

En la puerta de un colegio hay un puesto de golosinas. En esta gráfica refleja la cantidad de dinero que hay en su caja a lo largo de un día:



¿A qué hora empiezan las clases de la mañana? A las 8:30 horas

¿A qué hora es el recreo? A las 11 h

¿Cuánto dura el recreo? 30 minutos

El puesto se cierra a mediodía, y el dueño se lleva el dinero a casa. ¿Cuáles fueron los ingresos de la mañana?

Si en la caja había 4 € y a las 14:00 h hay 22 €, los ingresos de la mañana ascienden a 18 €.

¿Cuál es el horario de tarde en el colegio? De 15:30 a 17 horas

¿Es esta una función continua o discontinua?

Discontinua porque no tenemos dibujo entre las 14 y las 15 h.

¿Cuánto dinero ha recaudado en todo el día?

Pues 18 de la mañana, y 14-4=10 € de la tarde hacen: 18+10=28 €

Se rompe la lavadora de tu casa y tu madre busca en internet un técnico para repararla. Un técnico de reparaciones de electrodomésticos A cobra 45 € por la visita, más 25 € por cada hora de trabajo y otro técnico B cobra 40 € por cada hora trabajada.

Escribe la expresión algebraica que represente el coste de la reparación en función del número de horas de trabajo realizadas por cada técnico.

Si llamamos x al tiempo en horas que pasa reparando la lavadora:

$$\text{Técnico A: } y_A = f(x) = 45 + 25x \quad \text{Técnico B: } y_B = g(x) = 40x$$

¿Qué tipo de funciones son?

La primera f(x) es una función afín mientras que la segunda, g(x) es una función de proporcionalidad.

¿Qué técnico de los dos es más interesante?

Pues depende del tiempo que tarde en reparar la lavadora.

Para responder a esta cuestión vamos a representar ambas rectas. La recta azul se corresponde con **y = 45 + 25x** y la roja con **y = 40x**.

En el dibujo vemos que hay un punto donde la que está por encima pasa a estar por debajo y viceversa, lo calcularemos resolviendo el sistema dado ambas ecuaciones mediante el método de igualación:

45 + 25x = 40x $\rightarrow$ 45 = 15x $\rightarrow$ x = 3

Si el técnico tarda menos de tres horas en reparar la lavadora nos conviene más el técnico B (Rojo) puesto que la gráfica roja está por debajo de la azul, mientras que si el técnico tarda más de 3 horas nos convendrá más el técnico A (Azul) ya que su gráfica está por debajo de la roja.

Si tarda más de 3 horas el técnico A y si tarda menos el B.

