

Cuerpos geométricos

El centro del universo

Como a otros les ocurrió antes y a otros muchos después, Aristarco de Samos se vio irremediabilmente atraído por Alejandría: una ciudad tranquila, patria adoptiva de sabios y protectora del conocimiento.

La magnífica biblioteca de la ciudad le abrió sus puertas y Aristarco se empapó de los conocimientos de los sabios de otros tiempos. Después, tras años de silencioso estudio se decidió por fin a hacer públicas sus teorías y, ante un concurrido auditorio de sabios, comenzó:

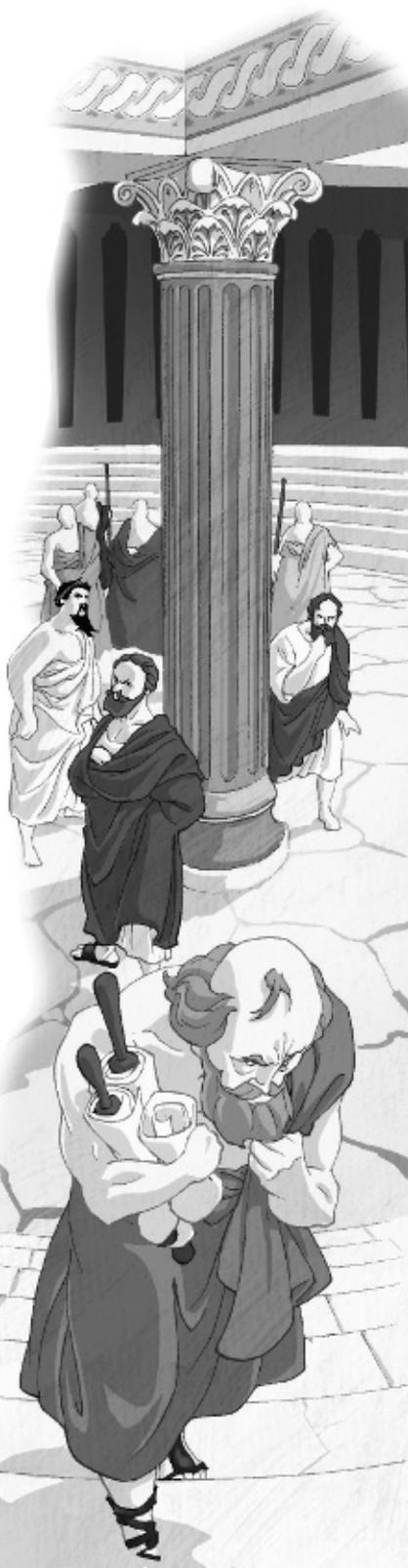
—Amigos, tras exhaustivos estudios puedo afirmar que la Tierra no está inmóvil: se mueve en círculo alrededor del Sol, completando un círculo cada año y, además, gira sobre sí misma, una vuelta cada día.

Un murmullo de protestas se alzó en la sala, entre insultos y burlas que le decían:

—Partiendo del hecho de que la Tierra es redonda, lo que ha sido probado por Aristóteles, si girara una vuelta cada día, la velocidad en la superficie sería tan elevada que nunca podríamos avanzar hacia el Este, pues la Tierra nos adelantaría.

Aristarco, en vano, intentaba explicar que ellos también giraban a la misma velocidad. Incapaz de convencer al auditorio, recogió los escritos donde explicaba su teoría y abandonó la sala, diciendo:

—A veces lo más necio es un hombre sabio.



DESCUBRE LA HISTORIA...

- 1** Busca información sobre la vida de Aristarco de Samos, importante matemático y astrónomo griego que vivió en el siglo III a.C.

Se puede encontrar información sobre la vida de Aristarco de Samos visitando la siguiente página web:

<http://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/aristarco.htm>

En la siguiente página se puede completar la información sobre la biografía de Aristarco:

<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Aristarco2.asp>

- 2** Investiga sobre el modelo heliocéntrico del universo que defendió Aristarco de Samos.

En esta página web se puede obtener información sobre el modelo heliocéntrico del universo en el que trabajó Aristarco:

<http://www.astronomia-iniciacion.com/personajes/aristarco-de-samos.html>

- 3** ¿Cuáles fueron los trabajos más relevantes que realizó Aristarco relacionados con las matemáticas y con la astronomía?

En la siguiente página web se puede completar la biografía de Aristarco y encontrar datos sobre los trabajos que realizó:

<http://astroseti.org/articulo/3733/biografia-de-aristarco-de-samos>

En este otro enlace también se pueden encontrar datos sobre las aportaciones a la astronomía que realizó Aristarco:

<http://historiadelaciencia.idoneos.com/index.php/366695>

EVALUACIÓN INICIAL

- 1** Traza una recta. En ella dibuja un segmento de 5 cm y tres puntos, uno de ellos que sea el origen de una semirrecta.



- 2** Estudia la posición relativa de las rectas que se determinan en cada caso.

- Los dos calles que forman una esquina.
- Los cables que conducen la electricidad.
- Los bordes superior e inferior de tu cuaderno.
- El largo y el ancho de una puerta.
- Las vías de un tren.
- Las dos orillas de un río.

Secantes: a) y d)

Paralelas: b), c), e) y f)

- 3** Los catetos de un triángulo rectángulo miden 8 y 15 cm, respectivamente. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

$$a^2 = 8^2 + 15^2 \rightarrow a = 17 \text{ cm}$$

Cuerpos geométricos

EJERCICIOS

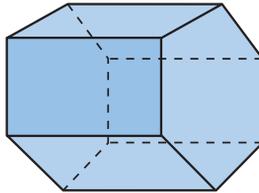
001 Observa la habitación donde te encuentres e indica elementos que sugieren:

- | | |
|----------------------|-----------------------------------|
| a) Planos paralelos. | e) Rectas que se cruzan. |
| b) Planos secantes. | f) Rectas paralelas a un plano. |
| c) Rectas paralelas. | g) Rectas secantes a un plano. |
| d) Rectas secantes. | h) Rectas contenidas en un plano. |

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- El suelo y el techo de la habitación.
- El suelo y las paredes.
- El lado derecho e izquierdo de una pared.
- El lado derecho y superior de una pared.
- Un lado del suelo y el perpendicular del techo.
- Un lado del suelo y el techo.
- El lado derecho de una pared y el suelo.
- Un lado del suelo y el suelo.

002 Indica las posiciones de rectas y planos que veas en el siguiente cuerpo geométrico:



Respuesta abierta. Por ejemplo:

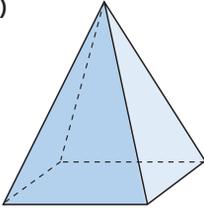
- Planos paralelos: las dos bases.
- Planos secantes: cada cara lateral y una base.
- Rectas paralelas: arista derecha e izquierda de cada cara lateral.
- Rectas secantes: aristas de las caras y aristas de las bases.
- Rectas que se cruzan: arista de una base y la perpendicular correspondiente de la otra.
- Rectas paralelas a un plano: aristas de una base y la otra base.
- Rectas secantes a un plano: aristas de una cara lateral y una base.
- Rectas contenidas en un plano: aristas de una base y esa base.

003 Dos rectas que son secantes, ¿están siempre en el mismo plano?

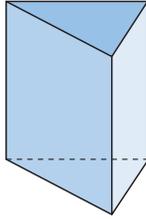
No necesariamente, pueden estar en planos secantes.

004 Determina el nombre de estos poliedros. ¿Cuántas caras tienen? ¿Y cuántas aristas?

a)

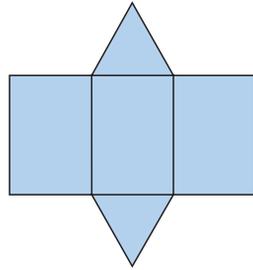
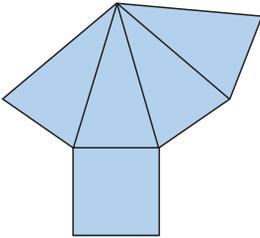


b)



- a) Pirámide cuadrangular: 5 caras y 8 aristas
 b) Prisma triangular: 5 caras y 9 aristas

005 Realiza el desarrollo plano de los poliedros del ejercicio anterior.



006 Justifica si es verdadero o falso.

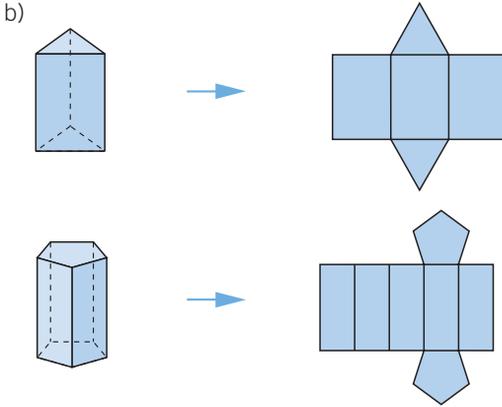
- a) En un poliedro, todas sus caras son iguales.
 b) El menor número de caras de un poliedro es 4.
 c) En cada vértice de un poliedro concurre siempre el mismo número de aristas.
- a) Falso: Las caras pueden ser diferentes, y solo son iguales en los poliedros regulares.
 b) Verdadero: El polígono con menor número de aristas tiene 3 aristas, y como cada arista es la intersección con otra cara, son 4 caras.
 c) Falso: Por ejemplo, en los vértices de la base de las pirámides concurren 3 aristas, y en el vértice superior concurren tantas aristas como lados tiene la base.

007 Dibuja un prisma recto de base triangular y otro de base pentagonal.

- a) Calcula su número de caras, aristas y vértices.
 b) Dibuja sus desarrollos planos.

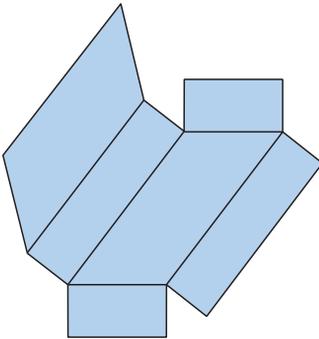
- a) • Prisma triangular \rightarrow Caras: 5, aristas: 9, vértices: 6
 • Prisma pentagonal \rightarrow Caras: 7, aristas: 15, vértices: 10

Cuerpos geométricos



008 Dibuja el desarrollo plano de un prisma oblicuo de base cuadrangular.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



009 ¿Qué polígono forma la base de un prisma que tiene 18 aristas?

La base del prisma es un hexágono.

010 Calcula el área de un cubo cuya arista mide 2 cm.

$$A = 6 \cdot A_B = 6 \cdot 2^2 = 24 \text{ cm}^2$$

011 Determina el área de un prisma:

a) Pentagonal regular, de altura 10 cm, lado de la base 4 cm y apotema 2,75 cm.

b) Triangular regular, de altura 8 cm, lado de la base 4 cm y altura de la base 3,46 cm.

$$\text{a) } A = P \cdot h + 2 \cdot \frac{P \cdot a}{2} = 20 \cdot 10 + 20 \cdot 2,75 = 255 \text{ cm}^2$$

$$\text{b) } A = P \cdot h + 2 \cdot \frac{P \cdot a}{2} = 12 \cdot 8 + 12 \cdot 3,46 = 137,52 \text{ cm}^2$$

- 012** Un prisma cuadrangular recto, con arista de la base de 3 cm, tiene un área total de 78 cm^2 . Calcula su altura.

$$A = 2 \cdot A_B + P \cdot h \rightarrow 78 = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4 \cdot h \rightarrow h = \frac{60}{12} = 5 \text{ cm}$$

- 013** Halla la longitud de la arista de un cubo para que su área sea igual que la de un ortoedro de 6 cm de ancho, 3 cm de alto y 2 cm de profundidad.

$$A_{\text{Ortoedro}} = 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72 \text{ cm}^2$$

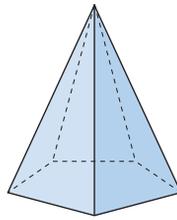
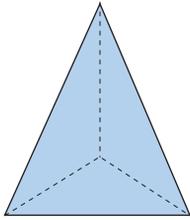
$$A_{\text{Cubo}} = 6l^2 \rightarrow 6l^2 = 72 \rightarrow l = \sqrt{12} = 3,46 \text{ cm}$$

La arista mide 3,46 cm.

- 014** Dibuja una pirámide recta de base triangular y otra de base pentagonal.

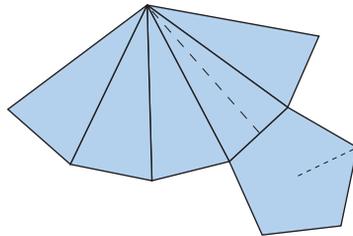
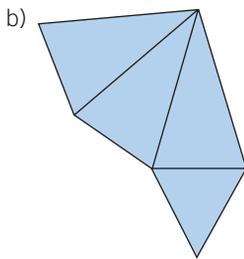
a) Calcula su número de caras, aristas y vértices.

b) Dibuja sus desarrollos planos.



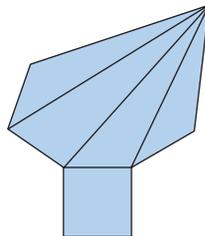
a) Pirámide triangular \rightarrow Caras: 4, aristas: 6, vértices: 4

Pirámide pentagonal \rightarrow Caras: 6, aristas: 10, vértices: 6



- 015** Dibuja el desarrollo plano de una pirámide oblicua de base cuadrangular.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



Cuerpos geométricos

016 ¿Qué polígono forma la base de una pirámide con 18 aristas?
¿Y si tiene 9 vértices?

La pirámide con 18 aristas tiene un eneágono de base.

La pirámide con 9 vértices tiene un octógono de base.

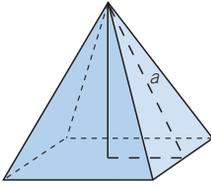
017 Calcula el área de una pirámide regular de base cuadrangular, si su arista básica mide 7 cm y la altura de sus caras laterales es 4 cm.

$$A_L = 4 \cdot \frac{l \cdot a}{2} = 4 \cdot \frac{7 \cdot 4}{2} = 56 \text{ cm}^2$$

$$A_B = l^2 = 7^2 = 49 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 56 + 49 = 105 \text{ cm}^2$$

018 Halla el área total de una pirámide cuadrangular de altura 4 cm y arista de la base 4 cm.

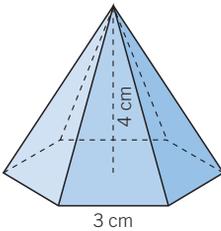


La apotema de la pirámide es:

$$a = \sqrt{16 + 4} = 4,47 \text{ cm}$$

$$A_T = A_L + A_B = \frac{16 \cdot 4,47}{2} + 4^2 = 51,76 \text{ cm}^2$$

019 Determina el área total de la pirámide regular.



La apotema del hexágono es:

$$a = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} = 2,6 \text{ cm}$$

La apotema de la pirámide es:

$$a' = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{22,75} = 4,77 \text{ cm}$$

$$A_T = \frac{P \cdot a'}{2} + A_B = \frac{18 \cdot 4,77}{2} + \frac{18 \cdot 2,6}{2} = 66,33 \text{ cm}^2$$

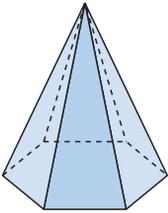
020 Prueba que todos los poliedros regulares cumplen la fórmula de Euler.

- Tetraedro \longrightarrow Caras: 4, vértices: 4, aristas: 6 $\longrightarrow 4 + 4 = 6 + 2$
- Cubo \longrightarrow Caras: 6, vértices: 8, aristas: 12 $\longrightarrow 6 + 8 = 12 + 2$
- Octaedro \longrightarrow Caras: 8, vértices: 6, aristas: 12 $\longrightarrow 8 + 6 = 12 + 2$
- Dodecaedro \longrightarrow Caras: 12, vértices: 20, aristas: 30 $\longrightarrow 12 + 20 = 30 + 2$
- Icosaedro \longrightarrow Caras: 20, vértices: 12, aristas: 30 $\longrightarrow 20 + 12 = 30 + 2$

021 Determina el número de caras que concurre en los vértices de cada uno de los poliedros regulares.

- Tetraedro: 3 caras
- Cubo: 3 caras
- Octaedro: 4 caras
- Dodecaedro: 3 caras
- Icosaedro: 5 caras

022 Dibuja un poliedro que tenga 7 vértices. ¿Cumple la fórmula de Euler?



Caras: 7

Aristas: 12

Vértices: 7

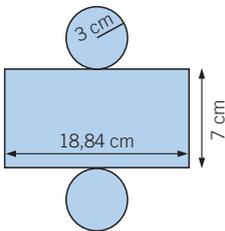
$$C + V = A + 2$$

$$7 + 7 = 12 + 2$$

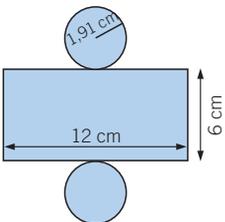
023 ¿Puede existir un poliedro regular de 3 caras?

No es posible, ya que el polígono con menor número de aristas tiene 3 aristas, y como cada arista es la intersección con otra cara, al menos tendrá 4 caras.

024 Dibuja el desarrollo plano de un cilindro de 3 cm de radio y 7 cm de altura.

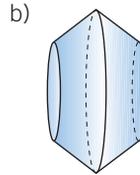
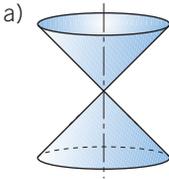
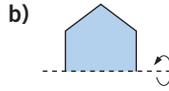
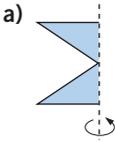


025 Dibuja el desarrollo plano de un cilindro cuya circunferencia de la base mide 12 cm y tiene una altura de 6 cm.



Cuerpos geométricos

026 Determina los cuerpos de revolución que al girar generan estas figuras planas.



027 Calcula el área total de un cilindro de altura 10 cm y radio de la base 7 cm.

$$A_L = 2\pi rh = 2 \cdot 3,14 \cdot 7 \cdot 10 = 439,6 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi r^2 = 3,14 \cdot 7^2 = 153,86 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 747,32 \text{ cm}^2$$

028 Luis y Ana tienen que forrar un tubo cilíndrico de 12 m de altura y 2 m de diámetro. Si el papel les cuesta 12 €/m², ¿cuánto les costará forrar la superficie lateral del tubo?

$$A_L = 2\pi rh = 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 12 = 75,36 \text{ m}^2$$

$$\text{Les costará forrarla: } 75,36 \cdot 12 = 904,32 \text{ €}$$

029 Halla la superficie total de un tronco de madera cilíndrico recto, de 3 m de altura y diámetro de la base de 30 cm.

$$A_L = 2\pi rh = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,15 \cdot 3 = 2,83 \text{ m}^2$$

$$A_B = \pi r^2 = 3,14 \cdot 0,15^2 = 0,07 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 2,97 \text{ m}^2$$

030 Un botón de forma cilíndrica tiene una altura de 1 mm. Si su área total es 188,4 mm², ¿cabe por un ojal que tiene una altura de 8 mm?

Calculamos el diámetro del botón:

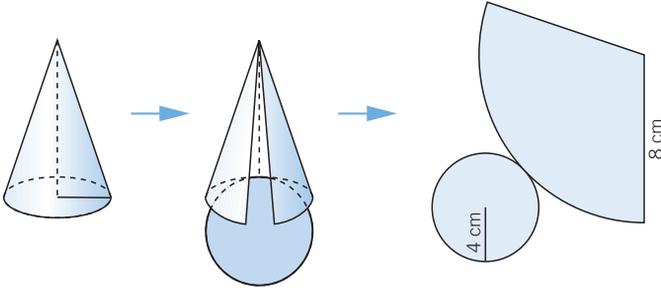
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \rightarrow 188,4 = 2 \cdot 3,14 \cdot (r^2 + r) \rightarrow 30 = r^2 + r$$

$$\rightarrow r^2 + r - 30 = 0$$

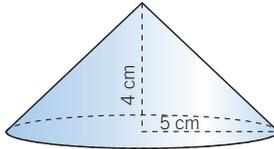
$$r^2 + r - 30 = 0 \rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} \rightarrow \begin{cases} r = 6 \text{ mm} \\ r = -5 \text{ (solución no válida)} \end{cases}$$

Por tanto, el diámetro es 12 mm, y no cabe por el ojal de 8 mm.

- 031 Dibuja el desarrollo plano de un cono con radio de la base 4 cm y generatriz 8 cm.

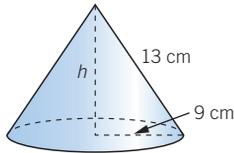


- 032 Calcula la generatriz del cono.



$$g = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6,4 \text{ cm}$$

- 033 Determina la altura de este cono:



$$13^2 = h^2 + 9^2$$

$$h^2 = 13^2 - 9^2$$

$$h = \sqrt{13^2 - 9^2} = 9,38 \text{ cm}$$

- 034 ¿Un triángulo equilátero, al girar sobre cualquiera de sus lados, genera un cono? ¿Y uno obtusángulo?

Solo generan conos los triángulos rectángulos al girar sobre uno de sus catetos.

- 035 Un cono tiene 12 cm de generatriz y 8 cm de diámetro de la base. Calcula su área total.

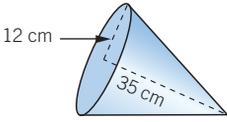
$$A_L = \pi r g = 3,14 \cdot 4 \cdot 12 = 150,72 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi r^2 = 3,14 \cdot 4^2 = 50,24 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 150,72 + 50,24 = 200,96 \text{ cm}^2$$

Cuerpos geométricos

036 Halla el área total de este cono:



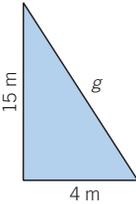
$$g = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37 \text{ cm}$$

$$A_L = \pi r g = 3,14 \cdot 12 \cdot 37 = 1394,16 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \pi r^2 = 3,14 \cdot 12^2 = 452,16 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B = 1394,16 + 452,16 = 1846,32 \text{ cm}^2$$

037 Se desea cubrir con lona un torreón de forma cónica de 15 m de altura y diámetro de 8 m. ¿Qué cantidad de lona se necesita?



Hallamos su generatriz:

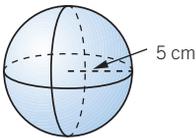
$$g = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{225 + 16} = \sqrt{241} = 15,52 \text{ m}$$

$$A_L = \pi r g = 3,14 \cdot 4 \cdot 15,52 = 194,93 \text{ m}^2$$

038 Si el radio de un cono mide el doble que el de otro, ¿qué relación hay entre sus áreas laterales?

Una de las áreas laterales es el doble que la otra.

039 ¿Cuál es el área de esta esfera?



$$A = 4 \cdot 3,14 \cdot 5^2 = 314 \text{ cm}^2$$

040 Determina el área de una esfera cuyo diámetro mide 12 cm.

$$r = 6 \text{ cm} \quad A_T = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 6^2 = 452,16 \text{ cm}^2$$

041 El radio de una esfera mide 4 cm. Halla el área de un huso esférico de amplitud 40° .

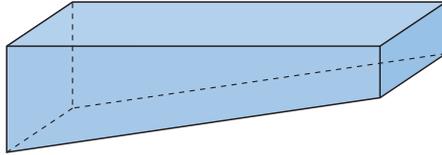
$$A_{\text{Huso}} = \frac{4\pi r^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 40}{360} = 22,33 \text{ cm}^2$$

042 Razona si un círculo puede generar una esfera. ¿Cuántos ejes de giro podría tener?

Un círculo genera una esfera al girar sobre alguno de sus diámetros, por lo que tiene infinitos ejes de giro.

ACTIVIDADES

043 Indica las posiciones de las rectas y planos que veas en este cuerpo geométrico:



Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Planos paralelos: las dos caras laterales
- Planos secantes: cada cara lateral y una base
- Rectas paralelas: arista derecha e izquierda de cada cara lateral
- Rectas secantes: aristas de las caras y aristas de las bases
- Rectas que se cruzan: arista de una cara lateral y la perpendicular correspondiente de la otra
- Rectas paralelas a un plano: aristas de una cara lateral y la otra cara lateral paralela
- Rectas secantes a un plano: aristas de una cara lateral y una base
- Rectas contenidas en un plano: aristas de una base y esa base

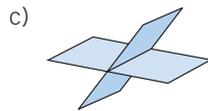
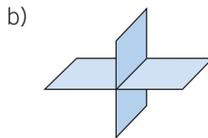
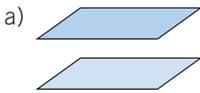
044 Encuentra ejemplos de ángulos diedros en tu aula y en tu habitación.

Si consideramos el aula como un poliedro, cualquier ángulo formado por dos caras es un ángulo diedro.

045 Dibuja en tu cuaderno:

- a) Dos planos paralelos. c) Dos planos secantes no perpendiculares.
 b) Dos planos perpendiculares.

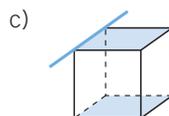
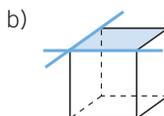
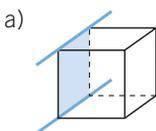
Respuesta abierta. Por ejemplo:



046 Considera las aristas de un cubo como rectas ilimitadas. Dibuja en él:

- a) Dos rectas paralelas. c) Dos rectas que se cruzan.
 b) Dos rectas secantes.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



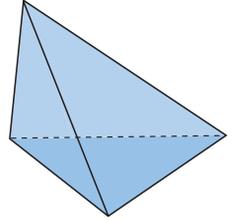
Cuerpos geométricos

047 Si dos rectas son paralelas a un plano, ¿son necesariamente paralelas entre sí?

No necesariamente, pueden cruzarse o cortarse.

048 Indica las posiciones de rectas y planos que encuentres en el siguiente cuerpo geométrico:

- Planos secantes: dos de sus caras
- Rectas secantes: aristas que concurren en un vértice
- Rectas secantes a un plano: aristas de una cara y otra cara
- Rectas contenidas en un plano: aristas de una cara y esa cara



049 Considera las caras de un cubo como planos.

- a) ¿Cuántas posiciones de planos paralelos tienes?
- b) ¿Y de rectas secantes a un plano?
- c) ¿Y de rectas contenidas en un plano?

Si las únicas rectas que consideramos son las aristas, tenemos:

- a) Tres posiciones de planos paralelos.
- b) Cuatro rectas secantes a un plano.
- c) Cuatro rectas contenidas en un plano.

050 Contesta a estas preguntas.

- a) ¿Cuántas rectas pasan por un punto en el espacio?
- b) ¿Cuántos planos contienen a una recta en el espacio?

- a) Por un punto en el espacio pasan infinitas rectas.
- b) En el espacio, infinitos planos pueden contener a una misma recta.

051 Decide si es verdadero o falso.

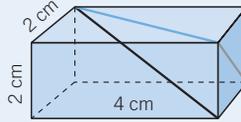
- a) Tres puntos no alineados determinan un plano.
- b) Dos rectas secantes se cruzan.
- c) Dos planos paralelos contienen rectas paralelas.
- d) Dos planos secantes son perpendiculares.
 - a) Verdadero
 - b) Falso: Si son secantes no pueden cruzarse.
 - c) Falso: No necesariamente deben ser paralelas.
 - d) Falso: Dos planos perpendiculares son secantes pero dos planos secantes no tienen por qué ser perpendiculares.

ACTIVIDADES

052 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULAN LAS DIAGONALES DE UN ORTOEDRO CONOCIENDO SUS ARISTAS?

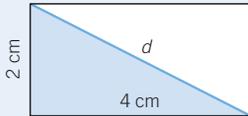
Calcula la longitud de las diagonales de este ortoedro:



PRIMERO. Se identifican los tipos de diagonales que hay en el poliedro.

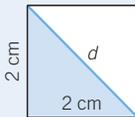
En un ortoedro hay tres tipos de diagonales: las de sus caras laterales, las de sus bases y las situadas entre vértices de caras opuestas.

SEGUNDO. Se determinan las diagonales de las caras, que son la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados de la cara. Se aplica el teorema de Pitágoras.



$$d^2 = 2^2 + 4^2$$

$$d = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,47 \text{ cm}$$

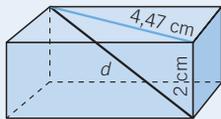


$$d^2 = 2^2 + 2^2$$

$$d = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,83 \text{ cm}$$

TERCERO. Se determinan las diagonales que hay situadas entre vértices de caras opuestas.

Estas diagonales serán la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son las diagonales de las caras laterales y las aristas de la base. Se aplica el teorema de Pitágoras.

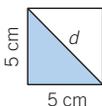


$$d^2 = 2^2 + 4,47^2$$

$$d = \sqrt{2^2 + 4,47^2} = 4,9 \text{ cm}$$

053 ●● Un cubo tiene de arista 5 cm. Calcula la longitud de la diagonal de la cara y de la diagonal del cubo.

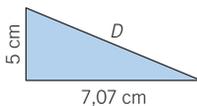
- Diagonal de la cara



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

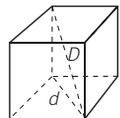
$$d^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow d^2 = 50 \rightarrow d = 7,07 \text{ cm}$$

- Diagonal del cubo



$$D^2 = 5^2 + 7,07^2 \rightarrow D^2 = 74,98$$

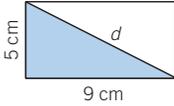
$$\rightarrow D = 8,66 \text{ cm}$$



Cuerpos geométricos

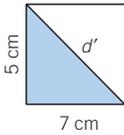
054 Un ortoedro tiene aristas de 5 cm, 7 cm y 9 cm. Halla la longitud de las diagonales de las caras y de la diagonal del ortoedro.

- Diagonal de la cara rectangular mayor



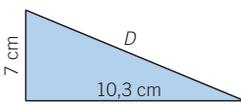
Aplicamos el teorema de Pitágoras:
 $d^2 = 5^2 + 9^2 \rightarrow d^2 = 106 \rightarrow d = 10,3 \text{ cm}$

- Diagonal de la cara rectangular menor

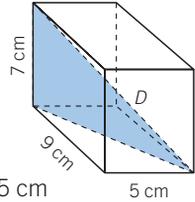


Aplicamos el teorema de Pitágoras:
 $d'^2 = 7^2 + 5^2 \rightarrow d'^2 = 74 \rightarrow d' = 8,6 \text{ cm}$

- Diagonal del ortoedro



$$D^2 = 7^2 + 10,3^2 \rightarrow D^2 = 155,09 \rightarrow D = 12,45 \text{ cm}$$



055 Un cubo tiene una diagonal de cara de 4 cm. Determina la longitud de la arista y de la diagonal del cubo.

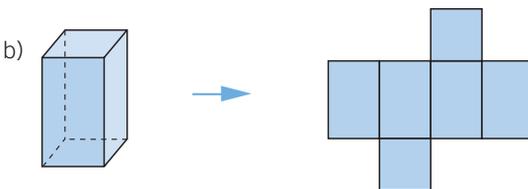
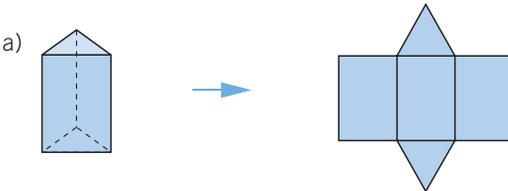
$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2} \rightarrow l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2,83 \text{ cm}$$

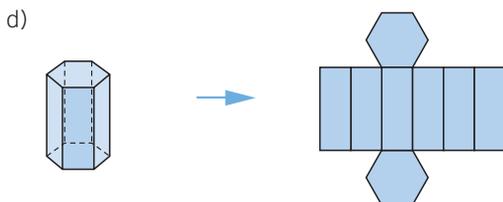
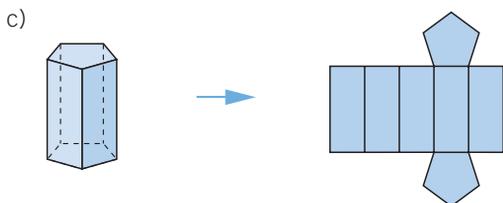
$$D^2 = l^2 + d^2 \rightarrow D = \sqrt{4^2 + 2,83^2} = \sqrt{16 + 8} = \sqrt{24} \rightarrow D = 4,9 \text{ cm}$$

056 Dibuja estos prismas y dibuja también sus desarrollos planos.

- a) Prisma triangular. c) Prisma pentagonal.
- b) Prisma cuadrangular. d) Prisma hexagonal.

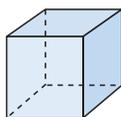
Respuesta abierta. Por ejemplo:



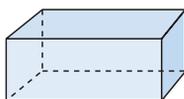


057 Dibuja un prisma regular y otro prisma irregular.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



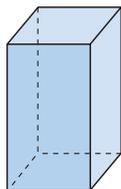
Regular



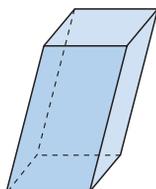
Irregular

058 Dibuja un prisma recto y otro oblicuo que tengan la misma base.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



Recto

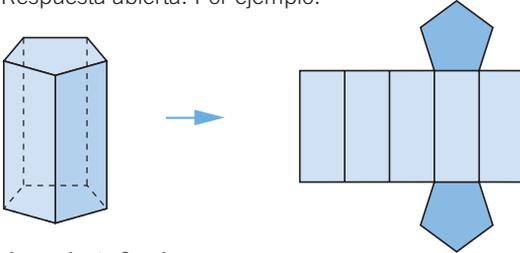


Oblicuo

Cuerpos geométricos

059 Dibuja un prisma pentagonal regular y su desarrollo. Colorea en azul el área lateral, y en rojo, el área de las bases. ¿Cómo se calcula el área total?

Respuesta abierta. Por ejemplo:

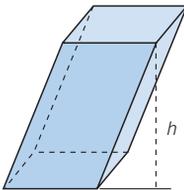


$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

060 Señala qué afirmaciones son verdaderas y corrige las falsas. Justifica tu decisión.

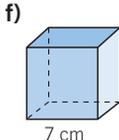
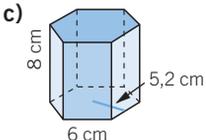
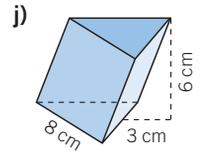
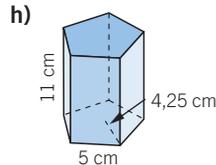
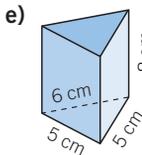
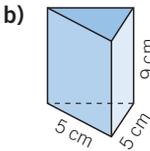
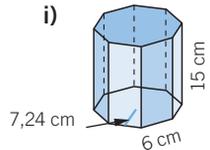
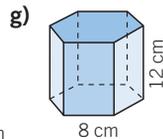
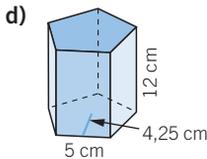
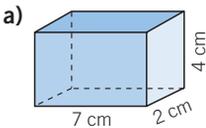
- a) Un cubo es un ortoedro.
- b) La altura de un prisma oblicuo es la arista lateral.
- c) Los prismas oblicuos se clasifican en regulares e irregulares.

- a) Verdadera
- b) Falsa



c) Falsa: Todos los prismas oblicuos son irregulares.

061 Calcula el área total de estos prismas.



$$a) A = 2 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 7 = 100 \text{ cm}^2$$

$$b) h = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = 4,33 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} + 3 \cdot 5 \cdot 9 = 156,65 \text{ cm}^2$$

$$c) A = 2 \cdot 6 \cdot \frac{6 \cdot 5,2}{2} + 6 \cdot 6 \cdot 8 = 475,2 \text{ cm}^2$$

$$d) A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 3,44}{2} + 5 \cdot 5 \cdot 12 = 386 \text{ cm}^2$$

$$e) h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot \frac{6 \cdot 4}{2} + 8 \cdot 5 \cdot 3 = 144 \text{ cm}^2$$

$$f) A = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2$$

$$g) a = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93 \text{ cm}$$

$$A = 6 \cdot \frac{8 \cdot 6,93}{2} + 6 \cdot 8 \cdot 12 = 742,32 \text{ cm}^2$$

$$h) h = \sqrt{4,25^2 - 2,5^2} = 3,44 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot 5 \cdot \frac{5 \cdot 3,44}{2} + 5 \cdot 5 \cdot 11 = 361 \text{ cm}^2$$

$$i) A = 2 \cdot 8 \cdot \frac{6 \cdot 7,24}{2} + 48 \cdot 15 = 1067,52 \text{ cm}^2$$

$$j) h_{\text{Triángulo}} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93 \text{ cm}$$

$$h_{\text{Cara Lateral}} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,2 \text{ cm}$$

$$A = 2 \cdot \frac{8 \cdot 6,93}{2} + 3 \cdot 8 \cdot 5,2 = 180,24 \text{ cm}^2$$

062 ●● Halla el área lateral y el área total de un prisma triangular recto, cuya altura mide 3 cm y su base es un triángulo equilátero de lado 2 cm.

$$\text{Altura de la base: } h = \sqrt{2^2 - 1^2} = 1,73 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 1,73}{2} = 3,46 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_{\text{Bases}} + A_L = 3,46 + 18 = 21,46 \text{ cm}^2$$

Cuerpos geométricos

063



Calcula el área lateral y el área total de un prisma triangular regular, cuyo lado de la base mide 4 cm y su arista lateral, 8 cm.

$$\text{Altura de la base: } h = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,46 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 3,46}{2} = 13,84 \text{ cm}^2 \quad A_L = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_{\text{Bases}} + A_L = 13,84 + 96 = 108,84 \text{ cm}^2$$

064



Determina el área total de un prisma hexagonal, sabiendo que la arista de su base mide 8 cm, y su altura es de 10 cm.

$$\text{Apotema de la base: } h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{8 \cdot 6,93}{2} = 332,64 \text{ cm}^2 \quad A_L = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_{\text{Bases}} + A_L = 332,64 + 480 = 812,64 \text{ cm}^2$$

065



Calcula el área total de un prisma recto, cuyas bases son hexágonos regulares de lado 6 cm, si su altura es de 10 cm.

$$\text{Apotema de la base: } h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,2 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{6 \cdot 5,2}{2} = 187,2 \text{ cm}^2 \quad A_L = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 360 \text{ cm}^2$$

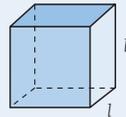
$$A_T = A_{\text{Bases}} + A_L = 187,2 + 360 = 547,2 \text{ cm}^2$$

066

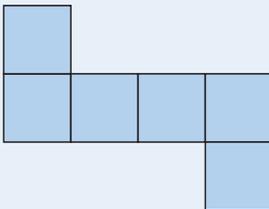
HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA ARISTA DE UN CUBO CONOCIENDO SU ÁREA?

Calcula la arista de un cubo sabiendo que su área es de 54 cm^2 .



PRIMERO. Se aplica la fórmula del área total.



$$A_T = 6 \cdot A_{\text{Cuadrado}} = 6 \cdot l \cdot l = 6l^2$$

SEGUNDO. Se iguala con el área conocida.

$$6l^2 = 54 \rightarrow l^2 = \frac{54}{6} = 9 \rightarrow l = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

067 ●● Calcula la altura de una habitación cuadrada sabiendo que el área de sus paredes, el techo y el suelo es de 726 m^2 .

El área total de la habitación es de 726 m^2 .

Además, el área total es: $A_T = 6 \cdot A_{\text{Cuadrado}} = 6l^2 \text{ m}^2$

Así, la altura será: $l = \sqrt{\frac{726}{6}} = 11 \text{ m}$

068 ●● El área total de un cubo mide 24 cm^2 . Calcula la arista del cubo, la diagonal de la cara y la diagonal del cubo.

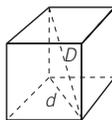
$A = 6l^2 \rightarrow 24 = 6l^2 \rightarrow l = 2 \text{ cm}$

$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d = l\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$

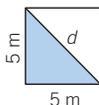
$D^2 = 3l^2 \rightarrow D = l\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

069 ●● Halla la diagonal de un cubo de área total 150 m^2 .

$A = 6l^2 \rightarrow 150 = 6l^2 \rightarrow l = 5 \text{ m}$



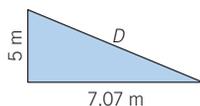
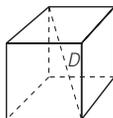
• Diagonal de la cara



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow d^2 = 50 \rightarrow d = 7,07 \text{ m}$

• Diagonal del cubo



$D^2 = 5^2 + 7,07^2 \rightarrow D^2 = 74,98 \rightarrow D = 8,66 \text{ m}$

070 ●● En un estudio de arquitectura se ha diseñado un edificio que tiene forma de prisma recto, de 20 m de altura, y la base es un triángulo equilátero de 6 m de lado.

a) ¿Cuánto mide el área lateral del edificio? b) ¿Y el área total?

a) $A_L = 3 \cdot 6 \cdot 20 = 360 \text{ cm}^2$

b) Altura de la base: $h = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,2 \text{ m}$

$A_{\text{Bases}} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 5,2}{2} = 31,2 \text{ m}^2$

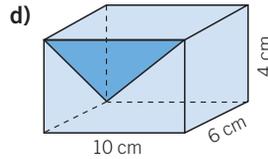
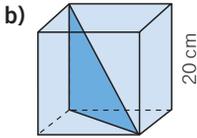
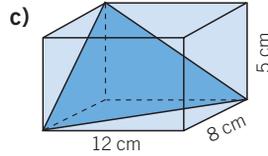
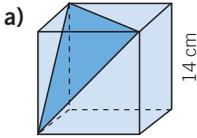
$A_T = A_{\text{Bases}} + A_L = 31,2 + 360 = 391,2 \text{ m}^2$

Cuerpos geométricos

071



Calcula el área de los triángulos coloreados.



a) La diagonal de cada cara es: $d = \sqrt{14^2 + 14^2} = 19,8 \text{ cm}$

Se forma un triángulo equilátero de lado 19,8 cm.

$$h = \sqrt{392 - 98} = 17,15 \text{ cm}$$

$$A = \frac{19,8 \cdot 17,15}{2} = 169,79 \text{ cm}^2$$

b) La diagonal de cada cara es: $d = \sqrt{20^2 + 20^2} = 28,28 \text{ cm}$

Se forma un triángulo rectángulo de catetos 28,28 cm y 20 cm.

$$A = \frac{20 \cdot 28,28}{2} = 282,8 \text{ cm}^2$$

c) Las diagonales de cada cara son:

$$d_1 = \sqrt{12^2 + 8^2} = 14,42 \text{ cm}$$

$$d_2 = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ cm}$$

$$d_3 = \sqrt{8^2 + 5^2} = 9,43 \text{ cm}$$

Se forma un triángulo, de lados 14,42 cm, 13 cm y 9,43 cm.

$$\left. \begin{array}{l} h^2 = 13^2 - x^2 \\ h^2 = 9,43^2 - (14,42 - x)^2 \end{array} \right\} \rightarrow 13^2 - x^2 = 9,43^2 - (14,42 - x)^2$$

$$\rightarrow 169 - 88,92 + 207,94 = 28,84x \rightarrow x = 9,99 \text{ cm}$$

$$h^2 = 13^2 - x^2 \xrightarrow{x=9,99} h^2 = 169 - 99,8 \rightarrow h = 8,32 \text{ cm}$$

$$A = \frac{14,42 \cdot 8,32}{2} = 59,99 \text{ cm}^2$$

d) La diagonal del lateral es: $d = \sqrt{16 + 36} = 7,21 \text{ cm}$

Se forma un triángulo rectángulo de catetos 7,21 cm y 10 cm.

$$A = \frac{10 \cdot 7,21}{2} = 36,06 \text{ cm}^2$$

072 Dibuja estas pirámides y su desarrollo plano.

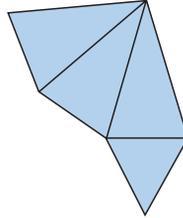
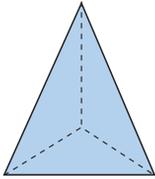
a) Pirámide triangular.

c) Pirámide pentagonal.

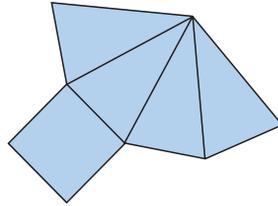
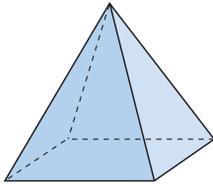
b) Pirámide cuadrangular.

d) Pirámide hexagonal.

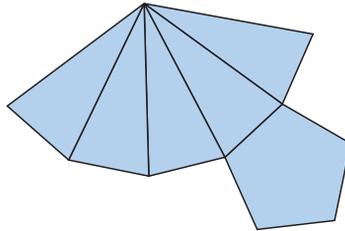
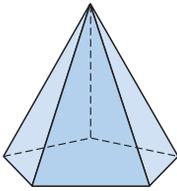
a)



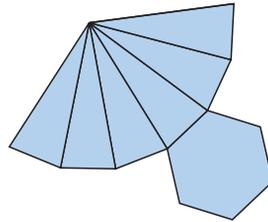
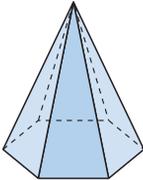
b)



c)

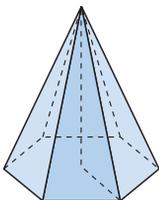


d)

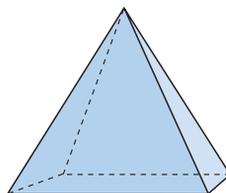


073 Dibuja una pirámide regular y otra irregular.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



Regular

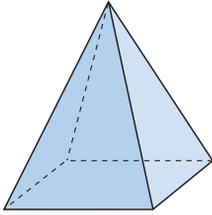


Irregular

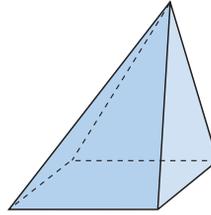
Cuerpos geométricos

074 Dibuja una pirámide recta y otra oblicua que tengan la misma base.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



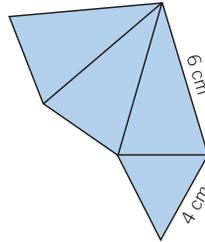
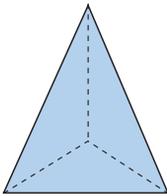
Recta



Oblicua

075 Dibuja el desarrollo plano de una pirámide triangular regular, con aristas laterales de 6 cm, y base, un triángulo equilátero de 4 cm de lado.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



076 Identifica similitudes y diferencias entre una pirámide triangular regular y un tetraedro.

El tetraedro es una pirámide triangular en la que las aristas laterales miden igual que las aristas de la base, por lo que es una pirámide triangular regular.

077 Señala qué afirmaciones son verdaderas y corrige las falsas. Justifica tu decisión.

- a) En una pirámide regular, las caras laterales son triángulos equiláteros.
- b) Una pirámide es un prisma triangular.
- c) La altura de una pirámide es cualquiera de sus aristas laterales.
- d) Una pirámide regular es un tetraedro.

a) Falsa: Los triángulos son isósceles.

b) Falsa: La pirámide tiene caras laterales que son triángulos, y los prismas, paralelogramos.

c) Falsa: La altura es la perpendicular que pasa por el vértice superior.

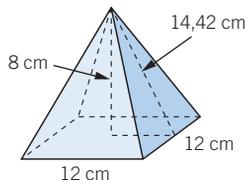
d) Falsa: El tetraedro es una pirámide regular en la que las aristas laterales miden igual que las aristas de la base.

078 Determina el área total de esta pirámide:

$$A_L = 4 \cdot \frac{12 \cdot 14,42}{2} = 346,08 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_{\text{Base}} + A_L = 144 + 346,08 = 490,08 \text{ cm}^2$$



079 En una pirámide de base pentagonal, su apotema mide 11,83 cm, la altura mide 12 cm, el lado de la base 4 cm y la apotema de la base 2,75 cm. Halla su área lateral y su área total.

$$A_L = 5 \cdot \frac{4 \cdot 11,83}{2} = 118,3 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base}} = 5 \cdot \frac{4 \cdot 2,75}{2} = 27,5 \text{ cm}^2$$

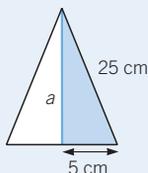
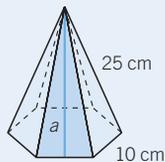
$$A_T = A_{\text{Base}} + A_L = 27,5 + 118,3 = 145,8 \text{ cm}^2$$

080 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UNA PIRÁMIDE CONOCIENDO SUS ARISTAS?

Calcula el área total de esta pirámide:

PRIMERO. Se calcula la apotema de la pirámide.

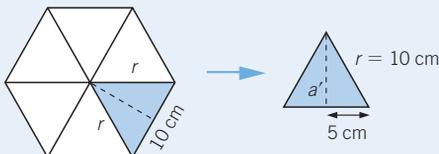


Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por: la apotema de la pirámide, la mitad del lado de la base y la arista lateral.

$$25^2 = a^2 + 5^2 \rightarrow a = \sqrt{25^2 - 5^2} = 24,49 \text{ cm}$$

SEGUNDO. Se calcula la apotema de la base.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por: la apotema de la base, la mitad del lado de la base y el radio de la base.



$$10^2 = (a')^2 + 5^2 \rightarrow a' = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8,66 \text{ cm}$$

TERCERO. Se determina el área.

$$A_T = \frac{(6 \cdot 10) \cdot 24,49}{2} + \frac{(6 \cdot 10) \cdot 8,66}{2} = 994,5 \text{ cm}^2$$

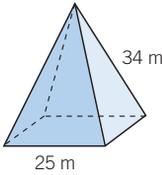
Cuerpos geométricos

081

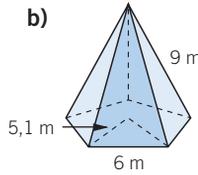
Calcula el área total de estas pirámides.



a)



b)



a) Pirámide cuadrangular:

$$a = \sqrt{34^2 - 12,5^2} = 31,62 \text{ m}$$

$$A_T = A_B + A_L = 25^2 + 50 \cdot 31,62 = 2206 \text{ m}^2$$

b) Pirámide pentagonal:

$$a = \sqrt{9^2 - 3^2} = 8,49 \text{ m}$$

$$a' = \sqrt{5,1^2 - 3^2} = 4,12 \text{ m}$$

$$A_T = A_B + A_L = \frac{30 \cdot 4,12}{2} + \frac{30 \cdot 8,49}{2} = 189,15 \text{ m}^2$$

082

Halla el área total de un tetraedro de arista:



a) 3 cm

b) 5 cm

c) 9 cm

d) 6,2 cm

$$a) a = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = 2,6 \text{ cm}$$

$$A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{3 \cdot 2,6}{2} = 15,6 \text{ cm}^2$$

$$b) a = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = 4,33 \text{ cm}$$

$$A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} = 43,3 \text{ cm}^2$$

$$c) a = \sqrt{9^2 - 4,5^2} = 7,79 \text{ cm}$$

$$A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{9 \cdot 7,79}{2} = 140,22 \text{ cm}^2$$

$$d) a = \sqrt{6,2^2 - 3,1^2} = 5,37 \text{ cm}$$

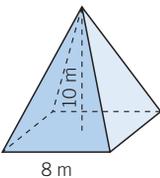
$$A_T = 4 \cdot A_B = 4 \cdot \frac{6,2 \cdot 5,37}{2} = 66,59 \text{ cm}^2$$

083

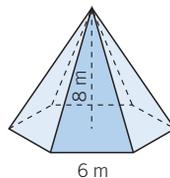
Calcula el área total de estas pirámides.



a)



b)



$$a) a = \sqrt{10^2 + 4^2} = 10,77 \text{ m}$$

$$A_T = A_B + A_L = 64 + \frac{32 \cdot 10,77}{2} = 236,32 \text{ m}^2$$

$$b) a = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5,2 \text{ m}$$

$$a' = \sqrt{8^2 + 5,2^2} = 9,54 \text{ m}$$

$$A_T = A_B + A_L = \frac{36 \cdot 5,2}{2} + \frac{36 \cdot 9,54}{2} = 265,32 \text{ m}^2$$

- 084** Determina el área total de una pirámide hexagonal regular, que tiene un área de la base de 100 cm^2 y una altura de 20 cm .

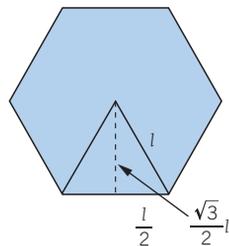
Como la base es un hexágono:

$$A_B = 6 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} l^2 = 100 \rightarrow l^2 = \frac{100 \cdot 2}{3\sqrt{3}} = 38,5$$

$$\rightarrow l = \sqrt{38,5} = 6,2 \text{ cm}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} l = 5,37 \text{ cm}$$



Calculamos la apotema de la pirámide:

$$a = \sqrt{5,37^2 + 20^2} = 20,7 \text{ cm}$$

$$\text{El área lateral es: } A_L = 6 \cdot \frac{6,2 \cdot 20,7}{2} = 385,02 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 100 + 385,02 = 485,2 \text{ cm}^2$$

- 085** El área total de una pirámide cuadrangular regular es 4 cm^2 y su altura mide 6 cm . Calcula la arista que tiene un cubo cuya área total es igual que la de la pirámide.

$$A_T = 6 \cdot A_B \rightarrow 4 = 6l^2 \rightarrow l = 0,82 \text{ cm}$$

- 086** Halla la longitud de la arista de un tetraedro, para que su área sea igual que la de una pirámide hexagonal regular, con arista básica 3 cm y apotema de sus caras laterales 10 cm .

- Pirámide hexagonal:

$$a = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = 2,6 \text{ cm}$$

$$A_T = A_B + A_L = \frac{18 \cdot 2,6}{2} + \frac{18 \cdot 10}{2} = 113,4 \text{ cm}^2$$

- Tetraedro:

$$a = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

$$A_T = 4 \cdot A_B \rightarrow 113,4 = 4 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} \rightarrow 113,4 = \sqrt{3} l^2 \rightarrow l = 8,1 \text{ cm}$$

La arista del tetraedro es $8,1 \text{ cm}$.

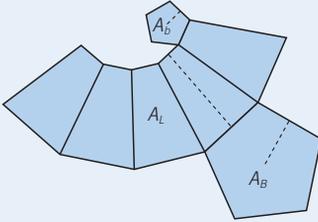
Cuerpos geométricos

087 HAZLO ASÍ

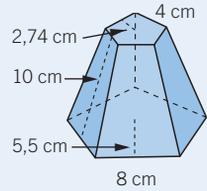
¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRONCO DE PIRÁMIDE?

Halla el área total de este tronco de pirámide pentagonal regular.

PRIMERO. Se dibuja el desarrollo plano del tronco de pirámide.



Como la base es un pentágono regular, las caras laterales son trapecios isósceles, y su altura es la apotema.



SEGUNDO. Se calcula el área lateral a partir de los trapecios.

$$A_L = 5 \cdot A_{\text{TRAPECIO}} = 5 \cdot \frac{8 + 4}{2} \cdot 10 = 5 \cdot 60 = 300 \text{ cm}^2$$

TERCERO. Se calcula el área de las bases.

$$A_B = \frac{5 \cdot 8 \cdot 5,5}{2} = 110 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2,74}{2} = 27,4 \text{ cm}^2$$

CUARTO. Se calcula el área total.

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 300 + 110 + 27,4 = 437,4 \text{ cm}^2$$

088 Calcula el área lateral y el área total del tronco de pirámide pentagonal regular, cuyas medidas son:

- Arista de la base mayor: 10 cm
- Apotema de la base mayor: 6,84 cm
- Arista de la base menor: 6 cm
- Apotema de la base menor: 4,1 cm
- Apotema del tronco: 7,5 cm

$$A_L = 5 \cdot A_{\text{TRAPECIO}} = 5 \cdot \frac{10 + 6}{2} \cdot 7,5 = 5 \cdot 60 = 300 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \frac{5 \cdot 10 \cdot 6,84}{2} = 171 \text{ cm}^2 \quad A_b = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4,1}{2} = 61,5 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 300 + 171 + 61,5 = 532,5 \text{ cm}^2$$

089 ●● Calcula el área lateral y el área total del tronco de pirámide hexagonal regular, cuyas medidas son:

- Arista de la base mayor: 12 cm
- Apotema de la base mayor: 6,84 cm
- Arista de la base menor: 8 cm
- Apotema del tronco: 4,6 cm

$$A_L = 6 \cdot A_{\text{TRAPECIO}} = 6 \cdot \frac{12 + 8}{2} \cdot 4,6 = 6 \cdot 46 = 276 \text{ cm}^2$$

$$A_B = \frac{6 \cdot 12 \cdot 10,39}{2} = 374,04 \text{ cm}^2$$

$$\text{Apotema de la base menor: } h = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93 \text{ cm}$$

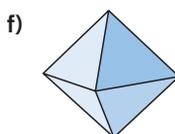
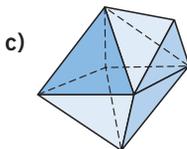
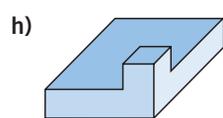
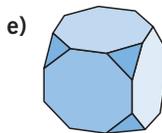
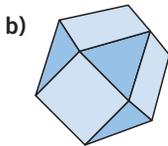
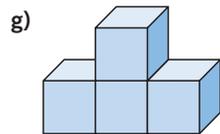
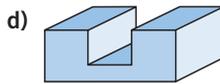
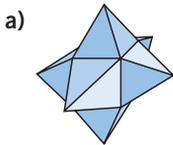
$$A_b = \frac{6 \cdot 8 \cdot 6,93}{2} = 166,32 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 276 + 374,04 + 166,32 = 816,36 \text{ cm}^2$$

090 ● Copia y completa la tabla, sabiendo que los datos pertenecen a poliedros en los que se cumple la fórmula de Euler.

N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas
9	14	21
6	8	12
11	18	27
12	20	30

091 ●● Clasifica los siguientes poliedros en cóncavos o convexos. Evalúa si cumplen la fórmula de Euler.



Cuerpos geométricos

- a) Cóncavo. Caras: 24, vértices: 14, aristas: 36 $\rightarrow 24 + 14 = 36 + 2$
Cumple la fórmula de Euler.
- b) Convexo. La cumple por ser convexo.
- c) Convexo. La cumple por ser convexo.
- d) Cóncavo. Caras: 10, vértices: 16, aristas: 24 $\rightarrow 10 + 16 = 24 + 2$
Cumple la fórmula de Euler.
- e) Convexo. La cumple por ser convexo.
- f) Convexo. La cumple por ser convexo.
- g) Cóncavo. Caras: 10, vértices: 16, aristas: 24 $\rightarrow 10 + 16 = 24 + 2$
Cumple la fórmula de Euler.
- h) Cóncavo. Caras: 9, vértices: 13, aristas: 21 $\rightarrow 9 + 13 \neq 21 + 2$
No cumple la fórmula de Euler.

092 Comprueba que se cumple la fórmula de Euler.

Poliedro	N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro	4	4	6	8	8
Cubo	6	8	12	14	14
Octaedro	8	6	12	14	14
Dodecaedro	12	20	30	32	32
Icosaedro	20	12	30	32	32

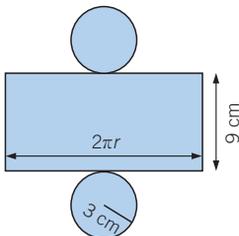
093 ¿Qué poliedro o poliedros regulares se pueden obtener utilizando como caras triángulos equiláteros? ¿Y con pentágonos regulares? ¿Y con hexágonos regulares?

Triángulos equiláteros: tetraedro, octaedro e icosaedro

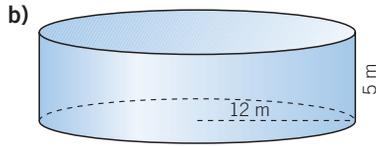
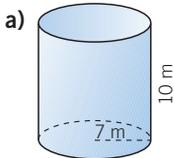
Pentágonos regulares: dodecaedro

Hexágonos regulares: no se puede obtener ningún poliedro regular

094 La altura de un cilindro es 9 cm y el diámetro de la base mide 6 cm. Dibuja su desarrollo plano.



095 Calcula el área total de estos cilindros.



$$a) A = 2 \cdot 3,14 \cdot 7^2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 7 \cdot 10 = 747,32 \text{ m}^2$$

$$b) A = 2 \cdot 3,14 \cdot 12^2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 12 \cdot 5 = 1281,12 \text{ m}^2$$

096 Halla la altura de un cilindro de área lateral $756,6 \text{ cm}^2$ y radio de la base 10 cm .

$$A_L = 2\pi r g \rightarrow 756,6 = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot g \rightarrow g = \frac{756,6}{62,8} = 12,05 \text{ cm}$$

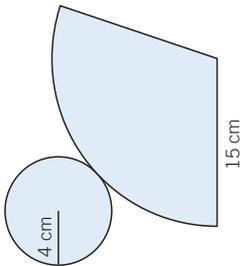
097 El área total de un cilindro es 471 cm^2 y su altura es el doble que su radio. Obtén la altura y el radio.

$$\left. \begin{array}{l} 471 = 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ h = 2r \end{array} \right\} \rightarrow 471 = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r$$

$$\rightarrow 471 = 6\pi r^2 \rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

$$h = 2r \xrightarrow{r = 5 \text{ cm}} h = 10 \text{ cm}$$

098 Dibuja el desarrollo de un cono, y calcula el valor de la longitud del arco del sector correspondiente, si el radio de la base del cono es 4 cm y su generatriz 15 cm .



La longitud del arco es igual a la longitud de la circunferencia de la base:
 $L = 2 \cdot 3,14 \cdot 4 = 25,12 \text{ cm}$

099 Un cono tiene 12 cm de generatriz y 8 cm de diámetro de la base. Calcula su área total.

$$A = 2 \cdot 3,14 \cdot 4^2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 12 = 401,92 \text{ cm}^2$$

Cuerpos geométricos

100



Halla la altura de un cono cuya generatriz mide 13 cm y el radio de la base 5 cm.

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

101



Obtén el radio de una esfera, sabiendo que el área de su superficie es de 803,84 cm².

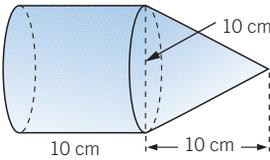
$$A = 4\pi r^2 \rightarrow 803,84 = 4\pi r^2 \rightarrow r = 8 \text{ cm}$$

102

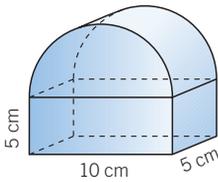


Halla el área total de estas figuras.

a)



b)



$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10 + 3,14 \cdot 5^2 + 3,14 \cdot 5 \cdot 10 = \\ &= 314 + 78,5 + 157 = 549,5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A &= 2 \cdot 5 \cdot 5 + (10 + 10 + 5 + 5) \cdot 4 + \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 5}{2} = \\ &= 50 + 120 + 157 = 327 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

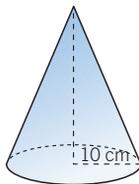
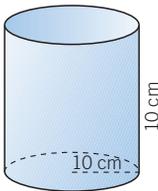
103



Averigua cuál debe ser la generatriz del cono para que ambos tengan:

a) La misma área lateral.

b) La misma área total.



$$\begin{aligned} \text{a) } A_L &= 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 1000 = 62\,800 \text{ cm}^2 \\ 62\,800 &= 3,14 \cdot 10 \cdot g \rightarrow g = 2\,000 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A_T &= 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 10 + 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 1000 = 63\,428 \text{ cm}^2 \\ 63\,428 &= 3,14 \cdot 10 \cdot 10 + 3,14 \cdot 10 \cdot g \rightarrow g = 2\,010 \text{ cm} \end{aligned}$$

104 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA EL ÁREA DE UN TRONCO DE CONO?

Halla el área total de este tronco de cono.

PRIMERO. Se dibuja el desarrollo plano del tronco de cono.

Su superficie lateral está formado por un trapecio curvilíneo y sus bases son dos círculos.

SEGUNDO. Se calcula el área lateral.

$$A_L = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = (r + r') \cdot \pi \cdot g =$$

$$= (10 + 5) \cdot \pi \cdot 16 = 753,6 \text{ cm}^2$$

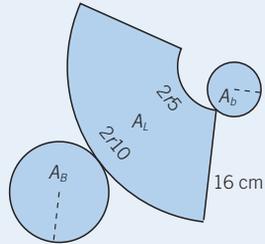
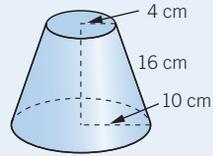
TERCERO. Se calcula el área de las bases.

$$A_B = \pi \cdot 10^2 = 314 \text{ cm}^2$$

$$A_b = \pi \cdot 5^2 = 78,5 \text{ cm}^2$$

CUARTO. Se calcula el área total.

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 753,6 + 314 + 78,54 = 1146,14 \text{ cm}^2$$



105 Determina el área lateral y el área total de este tronco de cono:

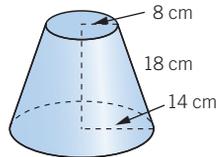
$$A_L = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = (r + r') \cdot \pi \cdot g =$$

$$= (14 + 8) \cdot 3,14 \cdot 18 = 1243,44 \text{ cm}^2$$

$$A_B = 3,14 \cdot 14^2 = 615,44 \text{ cm}^2$$

$$A_b = 3,14 \cdot 8^2 = 200,96 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 1243,44 + 615,44 + 200,96 = 2059,84 \text{ cm}^2$$



106 Calcula el área total del tronco de cono cuyas medidas son:

- Radio de la base mayor: 12 cm
- Radio de la base menor: 9 cm
- Generatriz: 6 cm

$$A_L = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = (r + r') \cdot \pi \cdot g = (12 + 9) \cdot 3,14 \cdot 6 = 395,64 \text{ cm}^2$$

$$A_B = 3,14 \cdot 12^2 = 452,16 \text{ cm}^2$$

$$A_b = 3,14 \cdot 9^2 = 254,34 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 395,64 + 452,16 + 254,34 = 1102,14 \text{ cm}^2$$

Cuerpos geométricos

107



Halla el área lateral y el área total del tronco de cono, sabiendo que sus medidas son:

- Radio de la base mayor: 15 cm
- Radio de la base menor: 12 cm
- Generatriz: 4 cm

$$A_L = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = (r + r') \cdot \pi \cdot g = (15 + 12) \cdot 3,14 \cdot 4 = 339,12 \text{ cm}^2$$

$$A_B = 3,14 \cdot 15^2 = 706,5 \text{ cm}^2$$

$$A_b = 3,14 \cdot 12^2 = 452,16 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 339,12 + 706,5 + 452,16 = 1497,78 \text{ cm}^2$$

108



Las paredes y el techo de una habitación tienen un área de 94 m². Si el suelo es un rectángulo de 7 m de largo y 4 m de ancho, ¿qué altura tiene dicha habitación?

$$A_{\text{Techo}} = A_{\text{Suelo}} = 7 \cdot 4 = 28 \text{ m}^2$$

Las cuatro paredes ocuparán un área de: $94 - 28 = 66 \text{ m}^2$

Hay dos paredes de 7 m de largo y h de altura, y otras dos paredes de 4 m de largo y h de altura:

$$2 \cdot 7 \cdot h + 2 \cdot 4 \cdot h = 66 \rightarrow 14h + 8h = 66 \rightarrow 22h = 66 \rightarrow h = 3 \text{ m}$$

La habitación tiene una altura de 3 m.

109



Un edificio tiene forma de prisma recto de 30 m de altura, y la base es un triángulo equilátero de 5 m de lado. ¿Qué área lateral y total tiene el edificio?

$$a = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = 4,33 \text{ m}$$

$$A_L = 15 \cdot 30 = 450 \text{ m}^2$$

$$A_T = 2 \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} + 450 = 471,65 \text{ m}^2$$

110



Calcula el área lateral y total de un monolito en forma de pirámide hexagonal, cuyo lado del hexágono mide 10 cm y el lado de los triángulos laterales es de 25 cm.

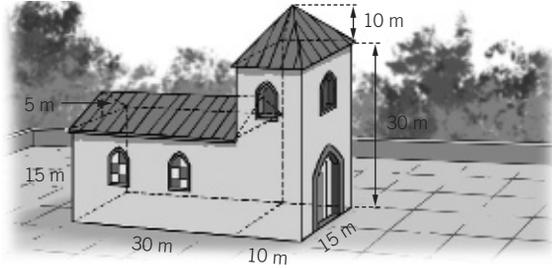
$$a = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8,66 \text{ cm}$$

$$a' = \sqrt{25^2 - 5^2} = 24,49 \text{ cm}$$

$$A_L = 60 \cdot 24,49 = 1469,4 \text{ cm}^2$$

$$A_T = \frac{60 \cdot 8,66}{2} + 1469,4 = 1729,2 \text{ cm}^2$$

- 111** Determina el coste de construir este edificio, sabiendo que el metro cuadrado de ladrillos cuesta 4,35 €, y el de tejas, 9,65 €.



- Tejado de la torre:

$$a = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11,18 \text{ m}$$

$$A = \frac{40 \cdot 11,18}{2} = 223,6 \text{ m}^2$$

- Tejado de la iglesia:

$$l = \sqrt{15^2 + 5^2} = 15,81 \text{ m}$$

$$A = 2 \cdot 15,81 \cdot 30 = 948,6 \text{ m}^2$$

- Fachadas laterales: $2 \cdot (30 \cdot 15 + 10 \cdot 30) = 1500 \text{ m}^2$
- Fachadas frontales y traseras: $15 \cdot 30 + 15 \cdot 15 + 15 \cdot 15 = 900 \text{ m}^2$

$$\text{Coste de las tejas: } (223,6 + 948,6) \cdot 9,65 = 11311,73 \text{ €}$$

$$\text{Coste de los ladrillos: } (1500 + 900) \cdot 4,35 = 10440 \text{ €}$$

$$\text{Coste total: } 11311,73 + 10440 = 21751,73 \text{ €}$$

- 112** Una tienda de campaña de forma cónica tiene una altura de 2 m y un diámetro de 1 m. ¿Cuántos metros cuadrados se necesitan para forrarla, incluyendo la base?

El área total de la tienda es la superficie que hay que forrar:

$$A = 3,14 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot 2 = 7,065 \text{ m}^2$$

- 113** Una bobina de papel de forma cilíndrica tiene una altura de 1,75 m y un diámetro de la base circular de 80 cm. Calcula el área total.

$$A = 2 \cdot 3,14 \cdot 40^2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 40 \cdot 175 = 54008 \text{ cm}^2$$

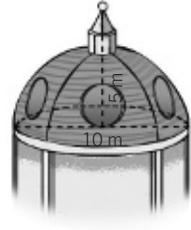
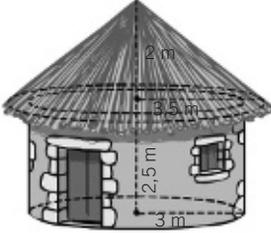
- 114** Determina la superficie esférica de un balón que tiene 30 cm de diámetro.

$$A = 4 \cdot 3,14 \cdot 15^2 = 2826 \text{ cm}^2$$

La superficie del balón es de 2826 cm².

Cuerpos geométricos

115 Obtén el área total de estas figuras:



- Área de la casa:

$$g_{\text{Tejado}} = \sqrt{2^2 + 3,5^2} = 4,03 \text{ m}$$

$$A = 3,14 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 2,5 + \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 3,5 \cdot 4,03}{2} = 119,65 \text{ m}^2$$

- Área del helado:

$$g_{\text{Cono}} = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7,62 \text{ cm}$$

$$A = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 3}{2} + 3,14 \cdot 3 \cdot 7,62 = 90,62 \text{ cm}^2$$

- Área de la cúpula:

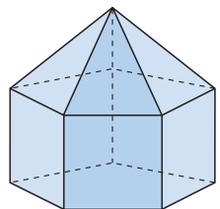
$$A = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 5^2}{2} + 3,14 \cdot 5^2 = 235,5 \text{ m}^2$$

116 Contesta a estas preguntas, razonando la respuesta:

- ¿Pueden tener dos planos un solo punto en común?
- ¿Pueden tres puntos no determinar un plano?
- Una recta y un punto que no pertenezca a esa recta, ¿pueden determinar planos secantes?
 - No, si dos planos tienen un punto en común, tienen en común toda una recta que contiene a ese punto.
 - Sí, si los tres puntos están alineados.
 - Sí, pueden determinar planos secantes.

117 Si consideramos $C = 11$, $V = 11$ y $A = 20$ se cumple la fórmula de Euler. ¿Existe algún poliedro cuyas caras, aristas y vértices coincidan con esas cantidades?

Sí, por ejemplo, un prisma coronado por una pirámide.



118

Con 1000 cubitos construimos un cubo que tiene 10 cubitos por arista.

A continuación, pintamos las 6 caras del cubo. ¿Cuántos cubitos tienen 3 caras pintadas? ¿Cuántos cubitos tienen 2 caras pintadas? ¿Y cuántos tienen 1 cara? ¿Cuántos cubitos no tienen ninguna cara pintada?

Los cubitos que forman las esquinas tienen 3 caras pintadas: 8 cubitos

Los cubitos que forman las aristas menos los que están en las esquinas tienen 2 caras pintadas: $12 \cdot 8 = 96$ cubitos

Los cubitos que forman las caras exteriores menos las aristas tienen 1 cara pintada: $81 \cdot 6 = 486$ cubitos

No tienen ninguna cara pintada: $1000 - 486 - 96 - 8 = 410$ cubitos

119

Ariel tiene 36 cubitos para hacer construcciones. ¿Cuántos prismas diferentes puede formar utilizando todos los cubitos?

Si son iguales los prismas que tienen las mismas dimensiones, aunque estén en posición diferente, tenemos prismas con estas dimensiones:

$$\begin{array}{cccc} 1 \cdot 1 \cdot 36 & 1 \cdot 3 \cdot 12 & 1 \cdot 6 \cdot 6 & 2 \cdot 3 \cdot 6 \\ 1 \cdot 2 \cdot 18 & 1 \cdot 4 \cdot 9 & 2 \cdot 2 \cdot 9 & 3 \cdot 3 \cdot 4 \end{array}$$

En total, se pueden formar 8 prismas diferentes.

120

Copia y completa la siguiente tabla que muestra características sobre prismas rectos.

	Cuadrangular	Pentagonal	Hexagonal
Lados de la base	4	5	6
Vértices	8	10	12
Aristas	12	15	18
Caras	6	7	8

a) Busca una fórmula que relacione el número de lados de la base con:

- El número de vértices del prisma.
- El número de aristas del prisma.
- El número de caras del prisma.

b) A la vista de las relaciones obtenidas, ¿se puede calcular el número de caras sabiendo el número de aristas? ¿Y el número de aristas conociendo el número de vértices?

a) Si n es el número de lados de la base:

$$\text{N.º de vértices} = 2n$$

$$\text{N.º de aristas} = 3n$$

$$\text{N.º de caras} = n + 2$$

b) Sí es posible, basta con sustituir los datos conocidos y despejar en la relación correspondiente.

Cuerpos geométricos

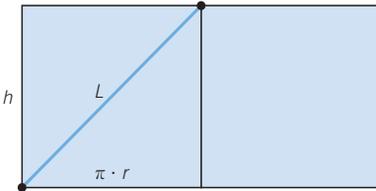
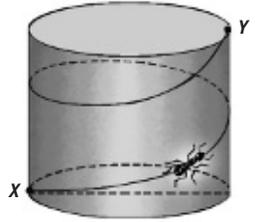
121



Una hormiga se desplaza desde el punto X al punto Y sobre la superficie de un cilindro.

¿Cuál es la mínima distancia recorrida por la hormiga?

La mínima distancia recorrida es dando menos de una vuelta. Si hacemos el desarrollo plano, vemos que la distancia buscada es la diagonal de un rectángulo de base la mitad de la circunferencia, y de altura, la altura del cilindro.



$$L = \sqrt{h^2 + (\pi \cdot r)^2}$$

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

122



A una empresa dedicada al cuidado y limpieza de fachadas de edificios le han encargado consiste en limpiar las ventanas y puertas, así como pulir el mármol, de la fachada de un edificio.

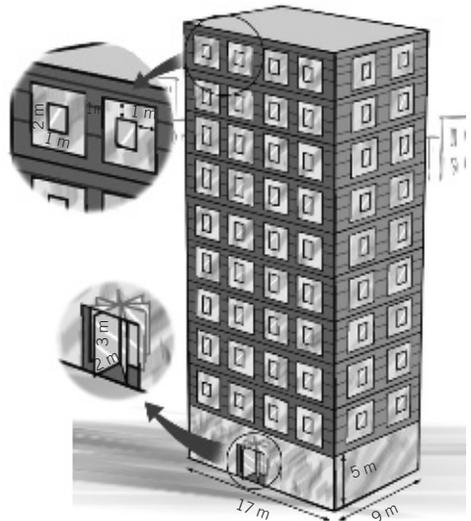
Para elaborar el presupuesto, un técnico ha visitado el edificio para tomar medidas.

ERES CAPAZ DE... COMPRENDER

a) ¿Cuántas ventanas tiene el edificio? ¿Cuál es su área?

ERES CAPAZ DE... RESOLVER

b) ¿Cuánta superficie de cristal hay que limpiar? ¿Y de mármol?



ERES CAPAZ DE... DECIDIR

- c) Estas medidas se entregan en el departamento de Facturación, donde se calculan los costes de la limpieza.

	En planta baja	En planta alta
Cristal	8,50 €/m ²	14,30 €/m ²
Mármol	19,80 €/m ²	26,10 €/m ²

Si el presupuesto previsto por la comunidad para la limpieza de la fachada es de 40000 €, ¿crees que tienen dinero suficiente?

- a) Suponemos que el edificio ocupa la totalidad de la manzana y que las ventanas se reparten de manera similar por todo el edificio.

El número de ventanas que tiene el edificio es:

$$2 \cdot 9 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 9 = 108 \text{ ventanas}$$

Su área es de: $108 \cdot 1 \cdot 2 = 216 \text{ m}^2$

- b) La superficie de cristal de las plantas altas es el área de las ventanas que hemos calculado, esto es, 216 m^2 .

En la planta baja hay una puerta con 8 cristales de $2 \cdot 3 = 6 \text{ m}^2$, que hacen un total de 48 m^2 de cristal en la planta baja.

Así, la superficie de cristal que hay que limpiar es de:

$$216 + 48 = 264 \text{ m}^2$$

La superficie de mármol que recubre cada ventana es de:

$$3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10 \text{ m}^2$$

Por lo tanto, la superficie total de mármol en las plantas altas es de:

$$108 \cdot 10 = 1080 \text{ m}^2$$

En la planta baja, la superficie de mármol es la del zócalo menos la del espacio de la puerta:

$$(17 \cdot 2 + 9 \cdot 2) \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 248 \text{ m}^2$$

Así, la superficie de mármol que hay que limpiar es de:

$$1080 + 248 = 1328 \text{ m}^2$$

- c) El coste de la limpieza del edificio será:

$$48 \cdot 8,50 + 216 \cdot 14,30 + 248 \cdot 19,80 + 1080 \cdot 26,10 = 36\,595,20 \text{ €}$$

Como el presupuesto de la comunidad es de 40000 €, sí tienen dinero suficiente para realizar la limpieza.

Cuerpos geométricos

123



La escultora María Cincel ha recibido un encargo del ayuntamiento de Buriil.

Queremos una escultura que simbolice la relación entre el ser humano y la naturaleza..., la simbiosis entre nuestras gentes y el entorno que les rodea.



La escultora ha pensado en realizar una escultura de granito, que es la piedra predominante en los alrededores, y en una estructura similar a esta.

Cuando ha llamado a una cantera en la que le pueden proporcionar el granito, le han informado de que tienen estas piezas:

Un cono de 2,4 m de altura y un diámetro de 1,4 m.

Un cilindro de 0,4 m de radio y 0,6 m de altura.

Una esfera de 0,5 m de radio.



ERES CAPAZ DE... COMPRENDER

a) ¿Cómo tendrá que unir las tres piezas de granito para obtener la escultura?

ERES CAPAZ DE... RESOLVER

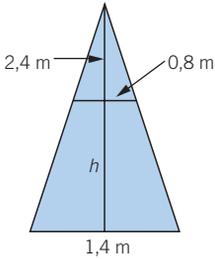
b) Para conseguir esta estructura tendrá que hacer un corte al cono y otro a la esfera. ¿A qué altura tiene que hacer los cortes?

ERES CAPAZ DE... DECIDIR

c) Se necesita recubrir la escultura de un líquido que hace que la piedra no se deteriore. Cada bote de ese líquido sirve para cubrir 5 m^2 . Si María tiene dos botes, ¿tendrá líquido suficiente?

a) En la parte superior se pondrá el cono, que como tendrá que encajar con el cilindro deberemos cortarle hasta dejarle una base superior de 0,4 m de radio. En el centro irá el cilindro, y en la parte inferior la esfera, que también habrá que cortar hasta dejar una sección de radio de, también, 0,4 m.

- b) • Cono

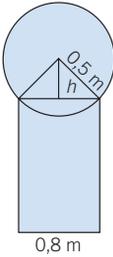


Como son triángulos semejantes:

$$\frac{1,4}{2,4} = \frac{0,8}{h} \rightarrow h = 1,37 \text{ m}$$

Hay que cortar el cono a 1,37 m de su vértice. Es decir, al cono de granito hay que quitarle otro cono menor de altura 1,37 m y base 0,8 m de diámetro.

- Esfera



$$h = \sqrt{0,5^2 - 0,4^2} = 0,3 \text{ m}$$

La esfera ha de cortarse a una distancia de 30 cm del centro o, lo que es lo mismo, a 20 cm de la superficie.

- c) • Superficie del tronco de cono de la escultura

Calculamos la generatriz del cono entero: $g = \sqrt{0,7^2 + 2,4^2} = 2,5 \text{ m}$

Superficie cono entero:

$$S_T = \pi r g + \pi r^2 = 3,14 \cdot 0,7 \cdot 2,5 + 3,14 \cdot 0,7^2 = 7,034 \text{ m}^2$$

Calculamos la generatriz del cono cortado:

$$g = \sqrt{0,4^2 + 1,37^2} = 1,43 \text{ m}$$

Superficie del cono cortado sin la base:

$$S_C = \pi r g = 3,14 \cdot 0,4 \cdot 1,43 = 1,796 \text{ m}^2$$

Superficie del tronco de cono de la escultura:

$$S = S_T + S_C = 7,034 - 1,796 = 5,238 \text{ m}^2$$

- Superficie del cilindro sin las bases

$$\text{Superficie cilindro} = 2\pi r h = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 1,507 \text{ m}^2$$

- Superficie del trozo de esfera de la escultura

Superficie total del la esfera de granito:

$$S_T = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 0,5^2 = 6,28 \text{ m}^2$$

Superficie del casquete esférico que quitamos de la esfera:

$$S_C = 2\pi r h = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \cdot (0,5 - 0,3) = 0,628 \text{ m}^2$$

Superficie del trozo de esfera de la escultura:

$$S = S_T - S_C = 6,28 - 0,628 = 5,652 \text{ m}^2$$

- Superficie total de la escultura:

$$S = 5,238 + 1,507 + 5,652 = 12,397 \text{ m}^2$$

Por tanto, necesita 3 botes para recubrir totalmente la escultura.