

Proporcionalidad geométrica

La llave de la Ciudad Prohibida

El misionero jesuita Matteo Ricci atravesó la puerta de la Ciudad Prohibida al encuentro del emperador chino Wan-Li. Los presentes enviados habían surtido efecto y el emperador quería conocerlo.

El emperador, que esperaba curioseando el mapa del mundo incluido en los regalos, levantó la vista y le ordenó realizar una copia para él.

Tras la entrevista el padre Ricci regresó a su casa, y allí otro misionero, un tanto sorprendido, dijo:

–Todavía no entiendo por qué les llama tanto la atención el mapa.

–Es lógico –argumentó Ricci–. Llevan miles de años creyendo que el mundo es solo China, que fuera viven bárbaros incapaces de aportar nada a su cultura y, de repente, les demostramos que no somos bárbaros, sino que estamos más avanzados que ellos en ciencias como matemáticas, astronomía, geografía. . .

–Esa es la llave que me condujo al emperador de China –continuó el padre Ricci–. El mapa llamó su atención y cuando les expliqué la forma de tomar las medidas y la utilización de escalas para representarlas sobre el papel, entonces vieron que podíamos enseñarles muchas cosas.



DESCUBRE LA HISTORIA...

- 1 En mayo de 2010 se han cumplido 400 años del fallecimiento del misionero Matteo Ricci, que llegó a China en 1582. Busca información sobre su vida.

Se puede encontrar información sobre la vida de Matteo Ricci en la página web: http://www.tendencias21.net/Matteo-Ricci-un-modelo-para-el-encuentro-de-la-civilizacion-europea-y-china_a3804.html

- 2 Investiga sobre el mapa que presentó Matteo Ricci al emperador de China.

Se puede obtener información sobre el mapa elaborado por Matteo Ricci en: <http://noticias.latino.msn.com/curiosas/articulos.aspx?cp-documentid=23239510>

- 3 ¿Qué otras aportaciones a la ciencia realizó Matteo Ricci a lo largo de su vida?

En esta página web se puede completar la biografía de Matteo Ricci y encontrar datos sobre los trabajos que realizó:

http://www.forumlibertas.com/frontend/forumlibertas/noticia.php?id_noticia=6456

EVALUACIÓN INICIAL

- 1 Decide si estas razones forman una proporción comprobando la propiedad fundamental.

a) $\frac{5}{3}$ y $\frac{10}{6}$

b) $\frac{2}{15}$ y $\frac{4}{30}$

c) $\frac{4}{6}$ y $\frac{8}{12}$

d) $\frac{11}{2}$ y $\frac{7}{3}$

a) $5 \cdot 6 = 3 \cdot 10$

c) $4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$

b) $2 \cdot 30 = 15 \cdot 4$

d) $11 \cdot 3 \neq 2 \cdot 7$

Forman proporción las razones de los apartados a), b) y c).

- 2 Calcula el término que falta en las proporciones. a) $\frac{5}{4} = \frac{x}{6}$ b) $\frac{7}{21} = \frac{4}{x}$

a) $x = 7,5$

b) $x = 12$

- 3 Dibuja una recta, una semirecta y un segmento.



recta



semirecta



segmento

- 4 Dibuja una recta secante a r y otra paralela a s .

a)



b)



a)



b)



Proporcionalidad geométrica

EJERCICIOS

001 Determina las razones de los segmentos, e indica si son proporcionales.

a) $\overline{AB} = 18 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 30 \text{ mm}$, $\overline{EF} = 30 \text{ mm}$ y $\overline{GH} = 5 \text{ mm}$

b) $\overline{AB} = 2,5 \text{ cm}$; $\overline{CD} = 5 \text{ cm}$; $\overline{EF} = 4,5 \text{ cm}$ y $\overline{GH} = 8 \text{ cm}$

a) $\frac{180}{30} = \frac{30}{5} \rightarrow$ Son proporcionales.

b) $\frac{2,5}{5} \neq \frac{4,5}{8} \rightarrow$ No son proporcionales.

002 Halla la longitud del segmento desconocido.

a) $\frac{\overline{AB}}{3} = \frac{8}{12}$

b) $\frac{5}{\overline{AB}} = \frac{12}{60}$

c) $\frac{1}{3} = \frac{15}{\overline{AB}}$

a) $\frac{\overline{AB}}{3} = \frac{8}{12} \rightarrow \overline{AB} = 2$

c) $\frac{1}{3} = \frac{15}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = 45$

b) $\frac{5}{\overline{AB}} = \frac{12}{60} \rightarrow \overline{AB} = 25$

003 Dados dos segmentos $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$ y $\overline{CD} = 9 \text{ cm}$:

a) Calcula la razón de los segmentos AB y CD .

b) Escribe dos segmentos que sean proporcionales a ellos.

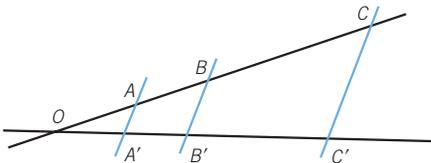
a) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0,3$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo: $\overline{EF} = 6 \text{ cm}$, $\overline{GH} = 18 \text{ cm}$

004 Si la razón entre los segmentos AB y CD es a , y la razón entre EF y GH es b , ¿qué condición se tiene que dar cumplir para que AB y CD sean proporcionales a EF y GH ?

Las razones deben ser iguales, por lo que $a = b$.

005 Calcula la longitud de OA' y BC .



$$\begin{aligned} \overline{OA} &= 3 \text{ cm} \\ \overline{AB} &= 2,25 \text{ cm} \\ \overline{A'B'} &= 1,5 \text{ cm} \\ \overline{B'C'} &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{3}{\overline{OA'}} = \frac{2,25}{1,5} \rightarrow \overline{OA'} = 2 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{\overline{BC}}{5} \rightarrow \overline{BC} = 7,5 \text{ cm}$$

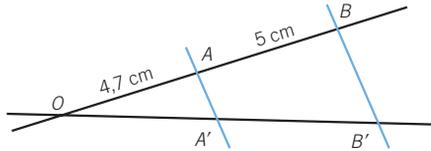
006 Determina la longitud del segmento OC en la figura del ejercicio anterior.

$$\overline{OC'} = 2 + 1,5 + 5 = 8,5 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{\overline{OC}}{8,5} \rightarrow \overline{OC} = 12,75 \text{ cm}$$

Se puede hallar también sumando los tres segmentos que lo forman.

007 En esta figura sabemos que $\overline{OA} = 4,7 \text{ cm}$, $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ y la razón $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = 1,6$.



Calcula $\overline{A'B'}$, $\overline{OA'}$ y $\overline{OB'}$.

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow 1,6 = \frac{5}{\overline{A'B'}} \rightarrow \overline{A'B'} = 3,125 \text{ cm}$$

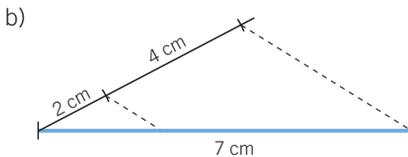
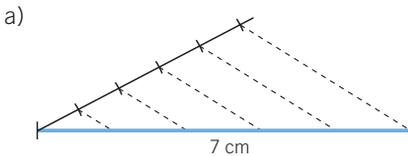
$$\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}}{1,6} \rightarrow \overline{OA'} = \frac{4,7}{1,6} = 2,9375 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow 1,6 = \frac{9,7}{\overline{OB'}} \rightarrow \overline{OB'} = 6,0625 \text{ cm}$$

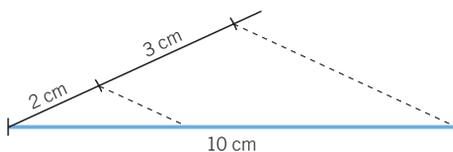
008 Divide gráficamente un segmento de 7 cm en:

a) 5 partes iguales.

b) 2 partes, siendo una la mitad que la otra.



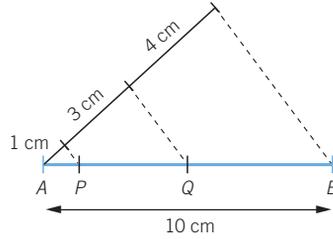
009 Divide un segmento de 10 cm en partes proporcionales a dos segmentos de 2 cm y 3 cm. ¿Cuánto miden los segmentos resultantes?



Los segmentos miden 4 cm y 6 cm.

Proporcionalidad geométrica

010 Observa la siguiente figura:
¿Cuánto miden los segmentos AP , PQ y QB ?

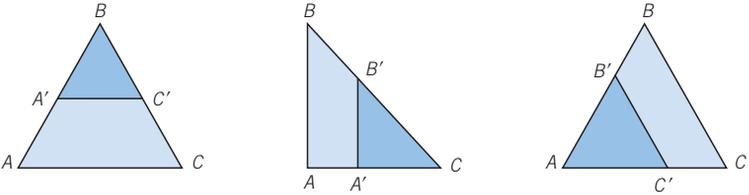


Aplicando el teorema de Tales: $\frac{10}{8} = \frac{AP}{1} = \frac{PQ}{3} = \frac{QB}{4}$

$\overline{AP} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ cm}$ $\overline{PQ} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ cm}$ $\overline{QB} = 5 \text{ cm}$

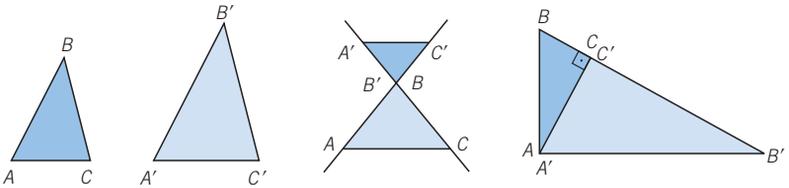
011 Dibuja tres pares de triángulos en posición de Tales. Indica cómo lo haces.

Dibujamos un triángulo y luego trazamos la paralela a uno de sus lados que corte a los otros dos.



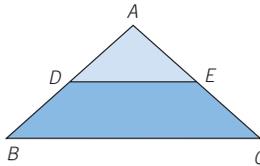
012 Dibuja tres pares de triángulos semejantes que no estén en posición de Tales. Indica cómo lo haces.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



013 ¿Están los dos triángulos en posición de Tales? Calcula \overline{EC} y \overline{CB} si:

$\overline{AB} = 8 \text{ cm}$
 $\overline{ED} = 5 \text{ cm}$
 $\overline{AC} = 6 \text{ cm}$
 $\overline{DB} = 4 \text{ cm}$



Los triángulos están en posición de Tales, ya que tienen en común el ángulo \hat{A} , y los lados DE y BC son paralelos.

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{6}{\overline{EC}} \rightarrow \overline{EC} = \frac{24}{8} = 3 \text{ cm}$

$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{4}{5} = \frac{8}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{40}{4} = 10 \text{ cm}$

- 014** Los lados de un triángulo miden 5, 4 y 8 cm, y los lados de otro, 5, 6 y 8 cm, respectivamente. Decide si son semejantes.

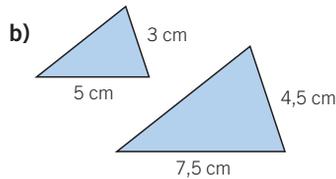
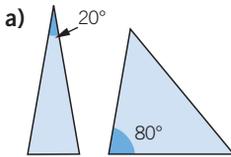
Sus lados no son proporcionales: $\frac{4}{5} \neq \frac{5}{6} \neq \frac{8}{8}$, por tanto, los triángulos no son semejantes.

- 015** Comprueba que un triángulo rectángulo de catetos de 8 y 6 cm es semejante a otro de catetos de 4 cm y 3 cm.

La hipotenusa del primer triángulo es 10 cm y la del segundo es 5 cm.

Sus lados son proporcionales: $\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3}$, por tanto, los triángulos son semejantes.

- 016** Comprueba si estos triángulos isósceles son semejantes, e indica el criterio aplicado.

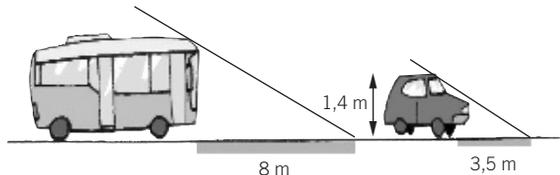


a) Los ángulos del primer triángulo miden 20° , 80° y 80° , y los ángulos del segundo triángulo miden 80° , 50° y 50° . Tienen un ángulo igual pero los lados que lo forman no son proporcionales, por lo que no cumplen el tercer criterio, y por tanto, no son semejantes.

b) Los lados del primer triángulo miden 5 cm, 5 cm y 3 cm, y los lados del segundo miden 7,5 cm; 7,5 cm y 4,5 cm.

Como $\frac{5}{7,5} = \frac{5}{7,5} = \frac{3}{4,5}$, los triángulos son semejantes por tener sus lados proporcionales. Por tanto, cumplen el primer criterio.

- 017** La sombra de un autobús a cierta hora mide 8 m. A la misma hora, la sombra de un coche, que mide 1,4 m, es de 3,5 m. ¿Qué altura tiene el autobús?

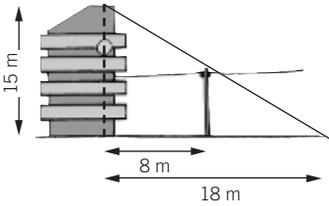


Se forman dos triángulos semejantes, ya que sus ángulos son iguales:

$$\frac{x}{8} = \frac{1,4}{3,5} \rightarrow x = 3,2 \text{ m}$$

Proporcionalidad geométrica

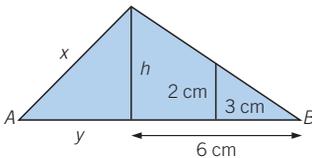
018 ¿Qué altura tiene el poste?



Por formarse triángulos semejantes:

$$\frac{15}{18} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 8,33 \text{ m}$$

019 Calcula el valor de x , si $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$.



$$\frac{h}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

$$y = 10 - 6 = 4 \text{ cm}$$

$$x = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 5,66 \text{ cm}$$

020 Dados estos rectángulos, resuelve.

a) ¿Son semejantes?

b) ¿Cuál es su razón de semejanza?

c) Determina las medidas de otro rectángulo que sea semejante a ellos.



a) $\frac{30}{24} = \frac{20}{16} \rightarrow$ Son semejantes.

b) La razón de semejanza es 1,25.

c) Cualquier rectángulo cuyos lados formen una razón de semejanza de 1,25; por ejemplo, 10 cm y 8 cm.

021 ¿Cuál es la razón entre las áreas del ejercicio anterior? ¿Qué relación tiene con la razón de semejanza?

$$A_{R. Grande} = 30 \cdot 20 = 600 \text{ cm}^2$$

$$A_{R. Pequeño} = 24 \cdot 16 = 384 \text{ cm}^2$$

$$\text{La razón es: } \frac{600}{384} = 1,5625 = 1,25^2$$

La razón entre sus áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

022 Calcula el perímetro de los rectángulos del ejercicio anterior. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? ¿Qué relación tiene con la razón de semejanza?

$$P_{R. Grande} = 30 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 60 + 40 = 100 \text{ cm}$$

$$P_{R. Pequeño} = 24 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 48 + 32 = 80 \text{ cm}$$

$$\text{La razón es: } \frac{100}{80} = 1,25$$

La razón entre sus perímetros coincide con la razón de semejanza.

023 Observa la figura y razona si son semejantes a ellas las figuras de cada apartado. En caso afirmativo, determina la razón de semejanza.

a)



b)



a) Esta figura es semejante porque:

- Los ángulos que se forman son iguales a la figura original, es decir, conserva la forma.
- Sus dimensiones son el doble que las de la figura original, por lo tanto, son proporcionales.

La razón de semejanza es 2.

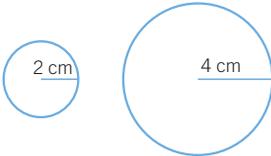
b) Esta figura no es semejante porque los ángulos que se forman no son iguales a la figura original, es decir, no conserva la forma.

024 Dibuja dos círculos de radio 2 cm y 4 cm, respectivamente.

a) ¿Son semejantes?

b) Calcula la razón de semejanza.

a)



b) La razón de semejanza es 2.

Sí, son semejantes.

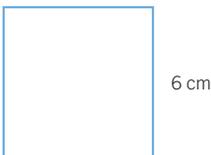
025 Dibuja un cuadrado de lado 3 cm.

a) Dibuja otro cuadrado semejante a él con razón de semejanza 2.

b) Dibuja otro cuadrado que no sea semejante a ellos.



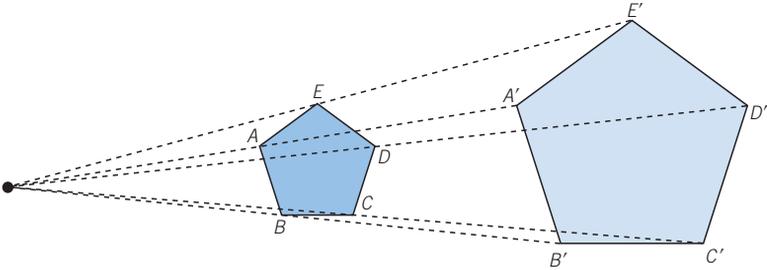
a)



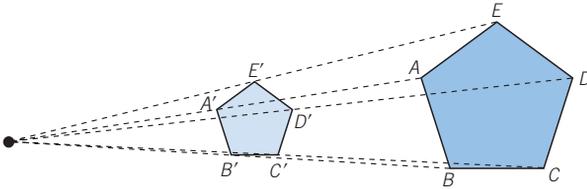
b) No es posible ya que todos los cuadrados son semejantes.

Proporcionalidad geométrica

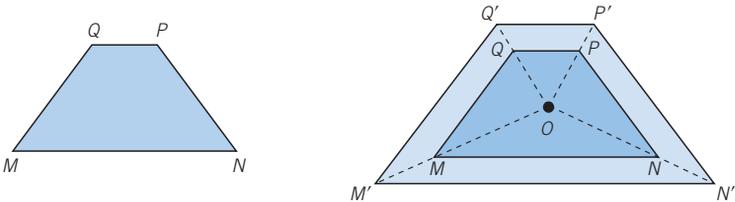
- 026 Observa el pentágono $ABCDE$ de la figura.
Construye un pentágono semejante, sabiendo que la razón de semejanza es 2.



- 027 Dibuja un pentágono semejante al anterior cuya razón de semejanza sea 0,5.



- 028 Construye un polígono semejante, con razón de semejanza 1,5, tomando como punto O un punto interior del polígono.



- 029 ¿Qué figura obtienes como resultado al construir un polígono semejante a otro con razón de semejanza 1?

Se obtiene un polígono idéntico al original.

- 030 Explica qué significa cada escala.

a) 1 : 300

b) 1 : 60000

c) 1 : 12

- a) Una escala de 1 : 300 significa que la distancia original es 300 veces mayor que la distancia del gráfico. Así, 1 cm del gráfico equivale a 3 m en el original.
- b) Una escala de 1 : 60000 significa que la distancia original es 60000 veces mayor que la distancia del gráfico. Así, 1 cm del gráfico equivale a 600 m en el original.
- c) Una escala de 1 : 12 significa que la distancia original es 12 veces mayor que la distancia del gráfico. Así, 1 cm del gráfico equivale a 12 cm en el original.

- 031 ¿Qué escala se ha utilizado al dibujar un objeto si 3 cm del dibujo equivalen a 3 dm reales?

$$\frac{3 \text{ cm}}{3 \text{ dm}} = \frac{3 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = \frac{1}{10}. \text{ La escala es } 1 : 10.$$

- 032 Realizamos el plano de una casa a escala 1 : 75.

- a) ¿Qué razón de semejanza se aplica?
 b) ¿Qué medida real tiene una línea del plano de 5 cm de longitud?
 c) ¿Cuánto mide en el plano una longitud de 4,5 cm?

- a) La razón de semejanza es $\frac{1}{75}$.
 b) $5 \cdot 75 = 375 \text{ cm}$
 c) En el plano mide: $\frac{4,5}{75} = 0,06 \text{ cm}$

ACTIVIDADES

- 033 Calcula la razón de estos segmentos.

- a) $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ $\overline{CD} = 8 \text{ cm}$ c) $\overline{AB} = 15 \text{ dm}$ $\overline{CD} = 9 \text{ m}$
 b) $\overline{AB} = 64 \text{ cm}$ $\overline{CD} = 1 \text{ m}$ d) $\overline{AB} = 20 \text{ m}$ $\overline{CD} = 4 \text{ m}$
 a) 0,75 b) 0,64 c) 0,167 d) 5

- 034 Si la razón de los segmentos AB y CD es $\frac{1}{4}$, calcula:

- a) \overline{AB} , siendo $\overline{CD} = 76 \text{ cm}$ b) \overline{CD} , siendo $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$
 a) $\overline{AB} = 19 \text{ cm}$ b) $\overline{CD} = 12 \text{ cm}$

- 035 Si la razón de los segmentos AB y CD es 1,6; calcula:

- a) \overline{AB} , siendo $\overline{CD} = 9 \text{ dm}$ b) \overline{CD} , siendo $\overline{AB} = 13,6 \text{ cm}$
 a) $\overline{AB} = 14,4 \text{ dm}$ b) $\overline{CD} = 8,5 \text{ cm}$

- 036 Razona si son proporcionales los segmentos AB , CD , EF y GH en cada caso.

- a) $\overline{AB} = 2 \text{ cm}$ $\overline{CD} = 5 \text{ cm}$ $\overline{EF} = 6 \text{ cm}$ $\overline{GH} = 16 \text{ cm}$
 b) $\overline{AB} = 2 \text{ dm}$ $\overline{CD} = 1 \text{ m}$ $\overline{EF} = 5 \text{ cm}$ $\overline{GH} = 25 \text{ cm}$
 c) $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ $\overline{CD} = 8 \text{ cm}$ $\overline{EF} = 4 \text{ m}$ $\overline{GH} = 3 \text{ m}$
 d) $\overline{AB} = 3 \text{ m}$ $\overline{CD} = 4 \text{ m}$ $\overline{EF} = 12 \text{ dm}$ $\overline{GH} = 16 \text{ dm}$
 a) $\frac{2}{5} \neq \frac{6}{16} \rightarrow$ No son proporcionales. c) $\frac{6}{8} \neq \frac{4}{3} \rightarrow$ No son proporcionales.
 b) $\frac{20}{100} = \frac{5}{25} \rightarrow$ Son proporcionales. d) $\frac{3}{4} = \frac{12}{16} \rightarrow$ Son proporcionales.

Proporcionalidad geométrica

037 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA UN SEGMENTO PROPORCIONAL A OTROS TRES SEGMENTOS?

Dados tres segmentos: $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{CD} = 3$ cm y $\overline{EF} = 2$ cm, calcula la longitud de un cuarto segmento, \overline{GH} , que sea proporcional a ellos.

PRIMERO. Se aplica la definición de segmentos proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{\overline{GH}}$$

SEGUNDO. Se resuelve la ecuación.

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{\overline{GH}} \rightarrow 4 \cdot \overline{GH} = 3 \cdot 2 \rightarrow \overline{GH} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ cm}$$

TERCERO. Se comprueba la solución.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{1,5} \rightarrow 4 \cdot 1,5 = 3 \cdot 2 \rightarrow 6 = 6$$

038 Calcula la longitud que debe tener el cuarto segmento proporcional a los segmentos \overline{AB} , \overline{CD} y \overline{EF} .

a) $\overline{AB} = 3$ cm $\overline{CD} = 6$ cm $\overline{EF} = 9$ cm

b) $\overline{AB} = 2$ m $\overline{CD} = 7$ m $\overline{EF} = 8,2$ m

c) $\overline{AB} = 3$ dm $\overline{CD} = 5$ dm $\overline{EF} = 21$ dm

d) $\overline{AB} = 10$ cm $\overline{CD} = 15$ cm $\overline{EF} = 25$ cm

a) $\frac{3}{6} = \frac{9}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 18$ cm c) $\frac{3}{5} = \frac{21}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 35$ dm

b) $\frac{2}{7} = \frac{8,2}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 28,7$ m d) $\frac{10}{15} = \frac{25}{\overline{GH}} \rightarrow \overline{GH} = 37,5$ cm

039 La razón de dos segmentos es $\frac{3}{5}$ y la suma de sus longitudes es 8 cm.

Halla la longitud de cada segmento.

$$a + b = 8 \quad r = \frac{3}{5}$$

Despejando a en la primera ecuación:

$$a = 8 - b$$

La razón de proporcionalidad es:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{8-b}{b} = \frac{3}{5} \rightarrow 5 \cdot (8-b) = 3 \cdot b$$

$$\rightarrow 40 - 5 \cdot b = 3 \cdot b \rightarrow 40 = 8b \rightarrow b = 5 \text{ cm}$$

$$b = 5 \text{ cm} \rightarrow a = 8 - 5 = 3 \text{ cm}$$

- 040** La razón de dos segmentos es 4 y la diferencia de sus longitudes es 7 cm.
 ●● Determina la longitud de cada segmento.

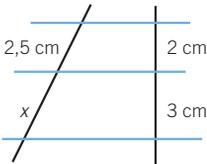
$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = 4 \\ a - b = 7 \end{array} \right\} \rightarrow a = 4b$$

$$4b - b = 7 \rightarrow b = \frac{7}{3} = 2,33 \text{ cm}$$

$$a = \frac{28}{3} = 9,33 \text{ cm}$$

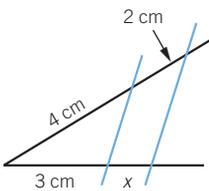
- 041** Calcula las longitudes desconocidas.

a)



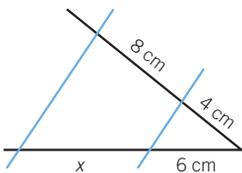
$$\frac{x}{3} = \frac{2,5}{2} \rightarrow x = 3,75 \text{ cm}$$

b)



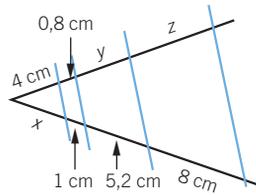
$$\frac{x}{2} = \frac{3}{4} \rightarrow x = 1,5 \text{ cm}$$

c)



$$\frac{x}{6} = \frac{4}{8} \rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

d)

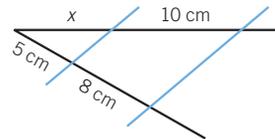


$$\frac{4}{x} = \frac{0,8}{1} \rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{5,2} = \frac{0,8}{1} \rightarrow y = 4,16 \text{ cm}$$

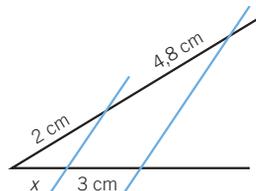
$$\frac{z}{8} = \frac{0,8}{1} \rightarrow z = 6,4 \text{ cm}$$

e)



$$\frac{x}{5} = \frac{10}{8} \rightarrow x = 6,25 \text{ cm}$$

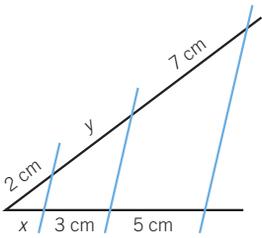
f)



$$\frac{x}{2} = \frac{3}{4,8} \rightarrow x = 1,25 \text{ cm}$$

Proporcionalidad geométrica

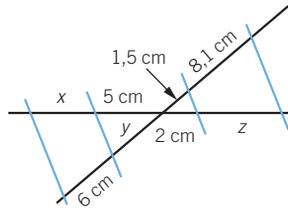
g)



$$\frac{x}{2} = \frac{5}{7} \rightarrow x = 1,43 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{y} = \frac{5}{7} \rightarrow y = 4,2 \text{ cm}$$

h)

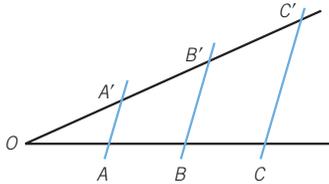


$$\frac{x}{6} = \frac{2}{1,5} \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{y} = \frac{2}{1,5} \rightarrow y = 3,75 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{8,1} = \frac{2}{1,5} \rightarrow z = 10,8 \text{ cm}$$

042 Considera esta figura:



a) Si $\overline{OA} = 2 \text{ cm}$ $\overline{OB} = 5 \text{ cm}$
 $\overline{OA'} = 2,6 \text{ cm}$ $\overline{OC'} = 11,7 \text{ cm}$

calcula: $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{OB'}$ y \overline{BC} .

b) Si $\overline{OA'} = 4 \text{ cm}$ $\overline{OB} = 9 \text{ cm}$
 $\overline{OB'} = 12 \text{ cm}$ $\overline{OC'} = 18 \text{ cm}$

calcula: \overline{OA} , \overline{AB} , $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, \overline{OC} y \overline{BC} .

c) Si $\overline{OA} = 5 \text{ cm}$ $\overline{OC} = 22,5 \text{ cm}$
 $\overline{OC'} = 36 \text{ cm}$ $\overline{OB'} = 24 \text{ cm}$

calcula: $\overline{OA'}$, \overline{OB} , \overline{AB} , \overline{BC} , $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$.

a) $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{2}{2,6} = \frac{3}{\overline{A'B'}} \rightarrow \overline{A'B'} = 3,9 \text{ cm}$$

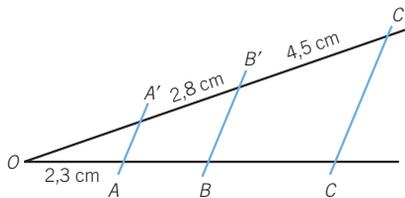
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{2}{2,6} = \frac{5}{\overline{OB'}} \rightarrow \overline{OB'} = 6,5 \text{ cm}$$

$$\overline{B'C'} = \overline{OC'} - \overline{OB'} = 11,7 - 6,5 = 5,2 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{2}{2,6} = \frac{\overline{BC}}{5,2} \rightarrow \overline{BC} = 4 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \overline{A'B'} &= \overline{OB'} - \overline{OA'} = 12 - 4 = 8 \text{ cm} \\
 \overline{B'C'} &= \overline{OC'} - \overline{OB'} = 18 - 12 = 6 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{\overline{OA}}{4} = \frac{9}{12} \rightarrow \overline{OA} = 3 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{8} = \frac{9}{12} \rightarrow \overline{AB} = 6 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{\overline{OC}}{18} = \frac{9}{12} \rightarrow \overline{OC} = 13,5 \text{ cm} \\
 \overline{BC} &= \overline{OC} - \overline{OB} = 13,5 - 9 = 4,5 \text{ cm} \\
 \\
 \text{c) } \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} \rightarrow \frac{5}{\overline{OA'}} = \frac{22,5}{36} \rightarrow \overline{OA'} = 8 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \rightarrow \frac{5}{8} = \frac{\overline{OB}}{24} \rightarrow \overline{OB} = 15 \text{ cm} \\
 \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = 15 - 5 = 10 \text{ cm} \\
 \overline{BC} &= \overline{OC} - \overline{OB} = 22,5 - 10 = 12,5 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow \frac{5}{8} = \frac{10}{\overline{A'B'}} \rightarrow \overline{A'B'} = 16 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow \frac{5}{8} = \frac{12,5}{\overline{B'C'}} \rightarrow \overline{B'C'} = 20 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

043 En la siguiente figura, la razón $\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = 0,8$.

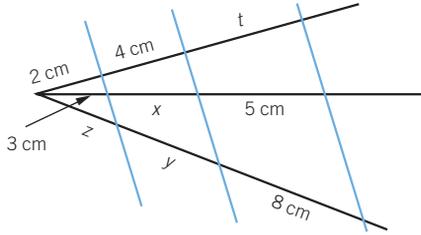


Calcula $\overline{OA'}$, \overline{AB} y \overline{BC} .

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \rightarrow 0,8 = \frac{2,3}{\overline{OA'}} \rightarrow \overline{OA'} = 2,875 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \rightarrow 0,8 = \frac{\overline{AB}}{2,8} \rightarrow \overline{AB} = 2,24 \text{ cm} \\
 \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \rightarrow 0,8 = \frac{\overline{BC}}{4,5} \rightarrow \overline{BC} = 3,6 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Proporcionalidad geométrica

044 Determina las longitudes desconocidas.



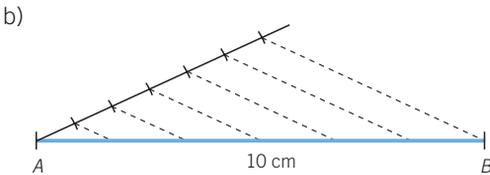
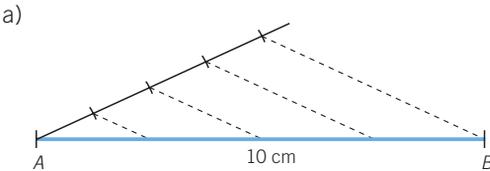
$$\frac{5}{8} = \frac{3}{z} \rightarrow z = 4,8 \text{ cm}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{4} \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{6}{y} \rightarrow y = 9,6 \text{ cm}$$

045 Divide gráficamente un segmento \overline{AB} , con $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$, en:

- a) 4 partes iguales.
- b) 6 partes iguales.



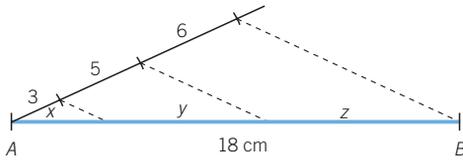
046 Divide gráficamente un segmento \overline{AB} , con $\overline{AB} = 18 \text{ cm}$, en partes proporcionales a tres segmentos de medida:

- a) 3 cm, 5 cm y 6 cm
- b) 2 cm, 4 cm y 6 cm
- c) 3 cm, 4 cm y 5 cm
- d) 2 cm, 6 cm y 9 cm

Calcula las longitudes de los segmentos, y compara el resultado con la solución gráfica.

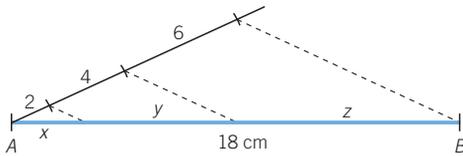
$$a) \frac{18}{3+5+6} = \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$$

$$x = 3,86 \text{ cm} \quad y = 6,43 \text{ cm} \quad z = 7,71 \text{ cm}$$



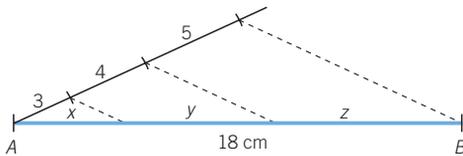
$$b) \frac{18}{2+4+6} = \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$$

$$x = 3 \text{ cm} \quad y = 6 \text{ cm} \quad z = 9 \text{ cm}$$



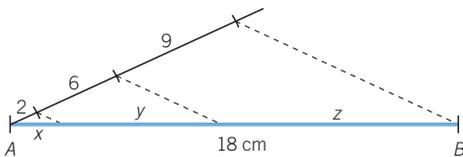
$$c) \frac{18}{3+4+5} = \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$$

$$x = 4,5 \text{ cm} \quad y = 6 \text{ cm} \quad z = 7,5 \text{ cm}$$



$$d) \frac{18}{2+6+9} = \frac{x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9}$$

$$x = 2,11 \text{ cm} \quad y = 6,35 \text{ cm} \quad z = 9,53 \text{ cm}$$

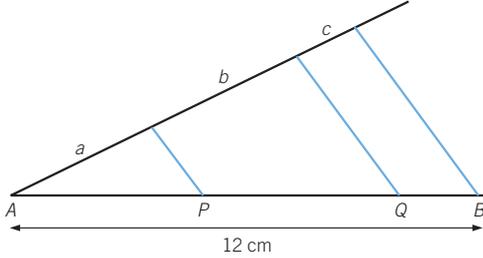


Proporcionalidad geométrica

047



Observa la siguiente figura en la que se divide el segmento AB , de 12 cm de longitud, en partes proporcionales a los segmentos a , b y c . Calcula \overline{AP} , \overline{PQ} y \overline{QB} , teniendo en cuenta que:



- a) $a = 6$ cm, $b = 8$ cm y $c = 4$ cm c) $a = 8$ cm, $b = 10$ cm y $c = 4$ cm
 b) $a = 5$ cm, $b = 10$ cm y $c = 3$ cm d) $a = 2$ cm, $b = 5$ cm y $c = 1$ cm

$$\text{a) } \frac{12}{6+8+4} = \frac{\overline{AP}}{6} = \frac{\overline{PQ}}{8} = \frac{\overline{QB}}{4}$$

$$\overline{AP} = 4 \text{ cm} \quad \overline{PQ} = 5,33 \text{ cm} \quad \overline{QB} = 2,67 \text{ cm}$$

$$\text{b) } \frac{12}{5+10+3} = \frac{\overline{AP}}{5} = \frac{\overline{PQ}}{10} = \frac{\overline{QB}}{3}$$

$$\overline{AP} = 3,33 \text{ cm} \quad \overline{PQ} = 6,67 \text{ cm} \quad \overline{QB} = 2 \text{ cm}$$

$$\text{c) } \frac{12}{8+10+4} = \frac{\overline{AP}}{8} = \frac{\overline{PQ}}{10} = \frac{\overline{QB}}{4}$$

$$\overline{AP} = 4,36 \text{ cm} \quad \overline{PQ} = 5,45 \text{ cm} \quad \overline{QB} = 2,18 \text{ cm}$$

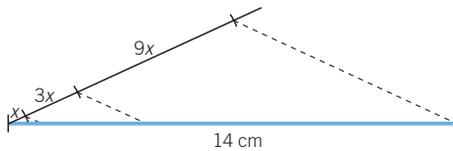
$$\text{d) } \frac{12}{2+5+1} = \frac{\overline{AP}}{2} = \frac{\overline{PQ}}{5} = \frac{\overline{QB}}{1}$$

$$\overline{AP} = 3 \text{ cm} \quad \overline{PQ} = 7,5 \text{ cm} \quad \overline{QB} = 1,5 \text{ cm}$$

048



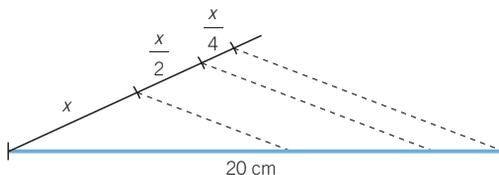
Divide un segmento de 14 cm en tres partes, cada una el triple que la anterior.



049

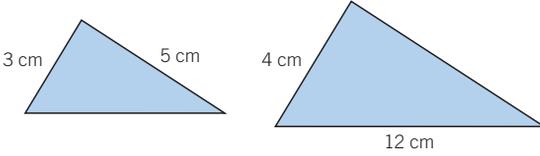


Divide un segmento de 20 cm en tres partes, cada una la mitad que la anterior.

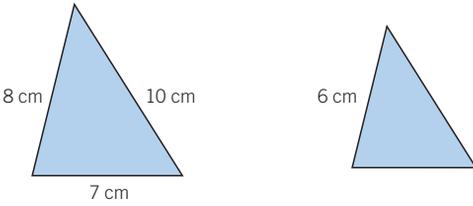


050 Calcula la longitud de los lados desconocidos en los siguientes pares de triángulos semejantes.

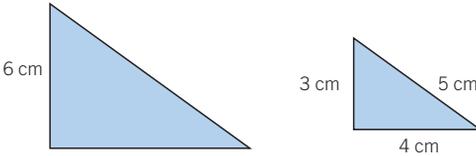
a)



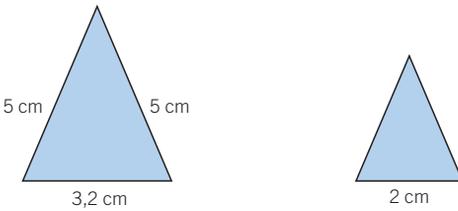
b)



c)



d)



$$a) \frac{3}{4} = \frac{5}{x} = \frac{y}{12}$$

$$x = 6,67 \text{ cm} \quad y = 9 \text{ cm}$$

Los lados miden 9 cm y 6,67 cm.

$$b) \frac{8}{6} = \frac{10}{x} = \frac{7}{y}$$

$$x = 7,5 \text{ cm} \quad y = 5,25 \text{ cm}$$

Los lados miden 5,25 cm y 7,5 cm.

$$c) \frac{6}{3} = \frac{x}{5} = \frac{y}{4}$$

$$x = 10 \text{ cm} \quad y = 8 \text{ cm}$$

Los lados miden 8 cm y 10 cm.

$$d) \frac{5}{x} = \frac{5}{y} = \frac{3,2}{2}$$

$$x = 3,125 \text{ cm} \quad y = 3,125 \text{ cm}$$

Los dos lados miden 3,125 cm.

Proporcionalidad geométrica

051 Dos triángulos, \widehat{ABC} y $\widehat{A'B'C'}$, son semejantes. Los lados de \widehat{ABC} son:

$$\overline{AB} = 4 \text{ cm} \quad \overline{BC} = 5 \text{ cm} \quad \overline{CA} = 6 \text{ cm}$$

Calcula los lados de $\widehat{A'B'C'}$ y la razón de semejanza, si $\overline{A'B'} = 7,2 \text{ cm}$.

La razón de semejanza es: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{4}{7,2} = 0,5$

$$\overline{B'C'} = \frac{\overline{BC}}{0,5} = 9 \text{ cm} \quad \overline{C'A'} = \frac{\overline{CA}}{0,5} = 10,8 \text{ cm}$$

052 La razón de semejanza de dos triángulos, \widehat{ABC} y $\widehat{A'B'C'}$, es $r = \frac{1}{4}$.

Obtén los lados desconocidos de los dos triángulos, sabiendo que:

a) $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$ y $\overline{CA} = 10 \text{ cm}$

b) $\overline{A'B'} = 20 \text{ cm}$, $\overline{B'C'} = 24 \text{ cm}$ y $\overline{C'A'} = 26 \text{ cm}$

c) $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 5 \text{ cm}$ y $\overline{C'A'} = 16 \text{ cm}$

a) $\overline{A'B'} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}$ $\overline{B'C'} = 4 \cdot 8 = 32 \text{ cm}$ $\overline{C'A'} = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}$

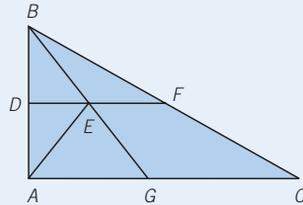
b) $\overline{AB} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5 \text{ cm}$ $\overline{BC} = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6 \text{ cm}$ $\overline{CA} = \frac{1}{4} \cdot 26 = 6,5 \text{ cm}$

c) $\overline{A'B'} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$ $\overline{B'C'} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}$ $\overline{CA} = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4 \text{ cm}$

053 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE RECONOCEN LOS TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES?

Indica qué triángulos de la siguiente figura están en posición de Tales.



PRIMERO. Se identifican todos los triángulos posibles.

$$\widehat{ABC} \quad \widehat{ABE} \quad \widehat{ABG} \quad \widehat{ADE} \quad \widehat{AEG} \quad \widehat{EBF} \quad \widehat{GBC} \quad \widehat{DBE} \quad \widehat{DBF}$$

SEGUNDO. Se toman los que tienen un ángulo común.

\widehat{ABC} y \widehat{DBF} tienen el ángulo \widehat{B} en común.

\widehat{ABE} , \widehat{ABG} y \widehat{DBE} tienen el ángulo \widehat{B} en común.

\widehat{EBF} y \widehat{GBC} tienen el ángulo \widehat{B} en común.

TERCERO. De cada grupo de triángulos con un ángulo en común se consideran los que tienen paralelos los lados opuestos a ese ángulo.

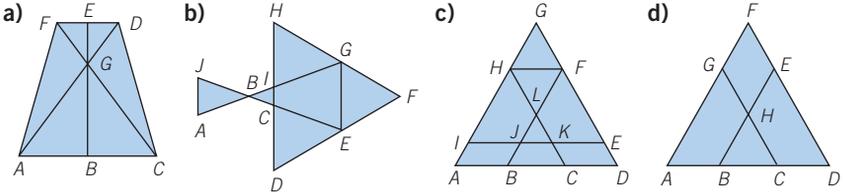
\widehat{ABC} y \widehat{DBF} tienen AC y DF paralelos.

\widehat{ABG} y \widehat{DBE} tienen AG y DE paralelos.

\widehat{EBF} y \widehat{GBC} tienen EF y GC paralelos.

Estos pares de triángulos están en posición de Tales.

054 Identifica en las siguientes figuras todos los triángulos que estén en posición de Tales.

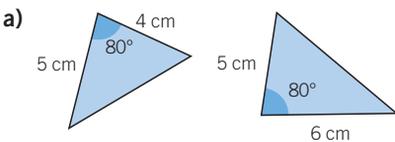


- a) Ninguno de los triángulos están en posición de Tales.
- b) Los triángulos que están en posición de Tales son:
 \widehat{DFH} y \widehat{EFG} .
- c) Los triángulos que están en posición de Tales son:
 \widehat{ADG} y \widehat{ACH} , \widehat{ADG} y \widehat{HFG} , \widehat{ADG} e \widehat{IEG} , \widehat{ADG} y \widehat{BDF} , \widehat{LJK} y \widehat{LBC} .
- d) Los triángulos que están en posición de Tales son:
 \widehat{ADF} y \widehat{ACG} , \widehat{ADF} y \widehat{BDE} .

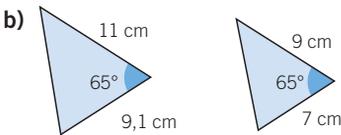
055 Los lados de un triángulo \widehat{ABC} miden $\overline{AB} = 12 \text{ mm}$, $\overline{BC} = 15 \text{ mm}$ y $\overline{CA} = 21 \text{ mm}$, y los del triángulo $\widehat{A'B'C'}$ miden $\overline{A'B'} = 35 \text{ mm}$, $\overline{B'C'} = 25 \text{ mm}$ y $\overline{C'A'} = 20 \text{ mm}$. ¿Son semejantes los dos triángulos?

Los lados son proporcionales: $\frac{21}{35} = \frac{15}{25} = \frac{12}{20}$, y son semejantes.

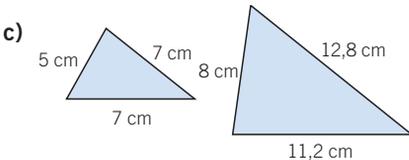
056 Determina si estos pares de triángulos son semejantes y explica qué criterio aplicas en cada caso.



a) Como $\frac{4}{5} \neq \frac{5}{6}$, no tienen sus lados proporcionales, y por tanto, no son semejantes.

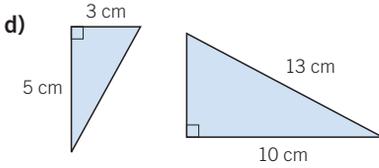


b) Como $\frac{9}{11} \neq \frac{7}{9,1}$, no tienen sus lados proporcionales, y por tanto, no son semejantes.

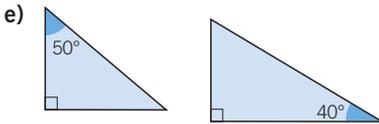


c) Como $\frac{5}{8} = \frac{7}{11,2} \neq \frac{7}{12,8}$, no tienen sus lados proporcionales, y por tanto, no son semejantes.

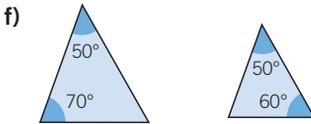
Proporcionalidad geométrica



d) La hipotenusa del triángulo menor es $\sqrt{34}$ y el cateto del triángulo mayor es $\sqrt{69}$.
Como $\frac{5}{10} \neq \frac{3}{\sqrt{69}}$, no tienen sus lados proporcionales, y no son semejantes.



e) Son semejantes, ya que sus ángulos son iguales (90° , 50° y 40°).



f) Son semejantes, pues sus ángulos son iguales (70° , 50° y 60°).

057

Los lados de un triángulo \widehat{ABC} miden $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm y $\overline{CA} = 6$ cm. Halla la longitud de los lados de un triángulo semejante $\widehat{A'B'C'}$, sabiendo que:

- a) La razón de semejanza es $r = 2,5$.
b) El perímetro de $\widehat{A'B'C'}$ es 30 cm.

a) $\overline{A'B'} = 2,5 \cdot 4 = 10$ cm

$\overline{B'C'} = 2,5 \cdot 5 = 12,5$ cm

$\overline{C'A'} = 2,5 \cdot 6 = 15$ cm

b) $\frac{4 + 5 + 6}{30} = \frac{4}{\overline{A'B'}} = \frac{5}{\overline{B'C'}} = \frac{6}{\overline{C'A'}}$

$\overline{A'B'} = 8$ cm $\overline{B'C'} = 10$ cm $\overline{C'A'} = 12$ cm

058

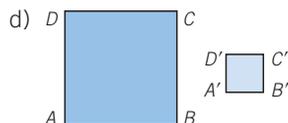
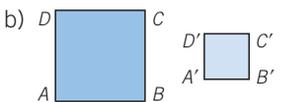
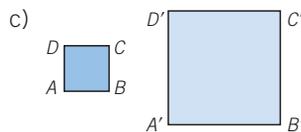
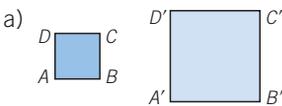
Dibuja dos cuadrados semejantes que tengan las siguientes razones de semejanza.

a) $r = 2$

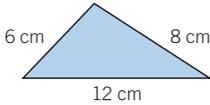
b) $r = \frac{1}{2}$

c) $r = 2,5$

d) $r = \frac{1}{3}$



059 Dibuja triángulos semejantes que tengan estas razones de semejanza respecto del dibujado.



a) $r = \frac{1}{2}$

c) $r = 3$

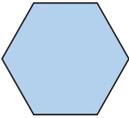
b) $r = \frac{1}{4}$

d) $r = \frac{5}{4}$

- a) Los lados del triángulo semejante medirán: 6 cm, 4 cm y 3 cm
 b) Los lados del triángulo semejante medirán: 3 cm, 2 cm y 1,5 cm
 c) Los lados del triángulo semejante medirán: 36 cm, 24 cm y 18 cm
 d) Los lados del triángulo semejante medirán: 15 cm, 10 cm y 7,5 cm

060 Dibuja figuras semejantes a la siguiente que tengan como razón de semejanza $r = 2$ y $r = 0,5$.

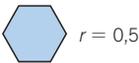
a)



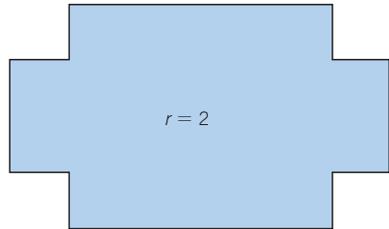
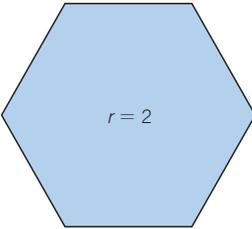
b)



a)



b)



061 Dos triángulos \widehat{ABC} y $\widehat{A'B'C'}$ son semejantes y su razón de semejanza es $\frac{1}{4}$.

Las medidas de los lados del triángulo \widehat{ABC} son $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 10$ cm y $\overline{AC} = 14$ cm. Halla las longitudes de los lados del otro triángulo.

$$\overline{A'B'} = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2 \text{ cm} \quad \overline{B'C'} = \frac{1}{4} \cdot 10 = 2,5 \text{ cm} \quad \overline{C'A'} = \frac{1}{4} \cdot 14 = 3,5 \text{ cm}$$

062 Dos triángulos \widehat{ABC} y $\widehat{A'B'C'}$ son semejantes y su razón de semejanza es 3.

Las medidas de los lados del triángulo \widehat{ABC} son $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm y $\overline{AC} = 3,5$ cm. Obtén las longitudes de los lados del otro triángulo.

$$\overline{A'B'} = 3 \cdot 6 = 18 \text{ cm} \quad \overline{B'C'} = 3 \cdot 7 = 21 \text{ cm} \quad \overline{C'A'} = 3 \cdot 3,5 = 10,5 \text{ cm}$$

Proporcionalidad geométrica

063



Razona si son ciertas las siguientes afirmaciones.

- a) Todos los cuadrados son semejantes.
- b) Todos los rectángulos son semejantes.
- c) Todos los pentágonos son semejantes.
- d) Todos los pentágonos regulares son semejantes.
- e) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

a) y e) Verdadera: Sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales.
b), c) y d) Falsa: Sus lados no tienen por qué ser proporcionales.

064



Halla el perímetro de un rectángulo que es semejante a otro rectángulo de lados 8 cm y 5 cm, con estas razones de semejanza.

- a) $r = 2$ b) $r = 0,5$ c) $r = \frac{3}{4}$ d) $r = \frac{5}{2}$

¿Qué relación existe entre los perímetros del rectángulo original y el de los triángulos semejantes?

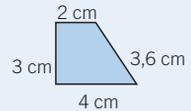
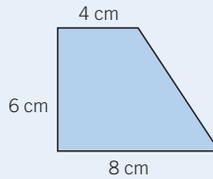
- a) Los lados serán 16 cm y 10 cm, por lo que su perímetro es 52 cm.
 - b) Los lados serán 4 cm y 2,5 cm, por lo que su perímetro es 13 cm.
 - c) Los lados serán 6 cm y 3,75 cm, por lo que su perímetro es 19,5 cm.
 - d) Los lados serán 20 cm y 12,5 cm, por lo que su perímetro es 65 cm.
- La razón de los perímetros es la misma que la de los rectángulos.

065

HAZLO ASÍ

¿QUÉ RELACIÓN EXISTE ENTRE EL PERÍMETRO Y EL ÁREA DE DOS FIGURAS SEMEJANTES?

Calcula el perímetro y el área de estos trapecios semejantes.



Si dos polígonos son semejantes, se cumple que:

- Sus perímetros son proporcionales con razón r .
- Sus áreas son proporcionales con razón r^2 .

PRIMERO. Se calcula la razón de semejanza del primer polígono respecto del segundo.

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2 \leftarrow \text{Razón de semejanza}$$

SEGUNDO. Se obtiene el perímetro y el área del segundo polígono.

$$P = 3 + 4 + 2 + 3,6 = 12,6 \text{ cm} \quad A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(4 + 2) \cdot 3}{2} = 9 \text{ cm}^2$$

TERCERO. Multiplicando estos resultados por la razón y el cuadrado de la razón, se obtienen el perímetro y el área del primer polígono, respectivamente.

$$P = 12,6 \cdot r = 12,6 \cdot 2 = 25,2 \text{ cm} \quad A = 9 \cdot r^2 = 9 \cdot 2^2 = 36 \text{ cm}^2$$

066 Halla el perímetro y el área de estos polígonos semejantes.

- a) Triángulo semejante a un triángulo rectángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm y razón 3.
 b) Cuadrado semejante a un cuadrado de lado 3 cm y razón 4.
 c) Rectángulo semejante a un rectángulo de lados 4 cm y 6 cm y razón 2.

a) $P = 12 \cdot 3 = 36 \text{ cm}$

$$A = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 3^2 = 54 \text{ cm}^2$$

b) $P = 12 \cdot 4 = 48 \text{ cm}$

$$A = 3 \cdot 3 \cdot 4^2 = 144 \text{ cm}^2$$

c) $P = 20 \cdot 2 = 40 \text{ cm}$

$$A = 4 \cdot 6 \cdot 2^2 = 96 \text{ cm}^2$$

067 Expresa, mediante una escala numérica.

- a) 25 cm de un plano representan 25 km reales.
 b) 0,8 dm de un plano representan 160 km reales.

a)
$$\left. \begin{array}{l} 25 \text{ km} = 2500000 \text{ cm} \\ 25 \text{ cm} \end{array} \right\}$$

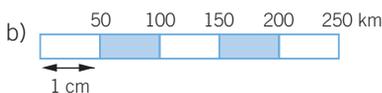
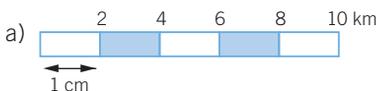
$$\frac{2500000}{25} = 100000 \rightarrow 1:100000$$

b)
$$\left. \begin{array}{l} 160 \text{ km} = 1600000 \text{ dm} \\ 0,8 \text{ dm} \end{array} \right\}$$

$$\frac{1600000}{0,8} = 2000000 \rightarrow 1:2000000$$

068 Expresa, mediante una escala numérica y una escala gráfica.

- a) 1 cm en el plano equivale a 2 km en la realidad.
 b) 1 cm en el plano equivale a 50 km en la realidad.



Proporcionalidad geométrica

069 Calcula la altura real de los objetos.

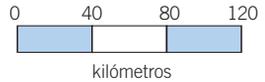
Objeto	Escala
	1 : 20
	1 : 10
	1 : 25

El armario en el gráfico mide 2 cm, y en la realidad mide:
 $2 \cdot 20 = 40$ cm

La furgoneta en el gráfico mide 1,5 cm, y en la realidad mide:
 $1,5 \cdot 10 = 15$ cm

La casa en el gráfico mide 2,3 cm, y en la realidad mide:
 $2,3 \cdot 25 = 57,5$ cm

070 Halla la distancia real entre dos pueblos separados 4 cm en un mapa con esta escala:



$$40 \text{ km} = 4\,000\,000 \text{ cm}$$

Como la escala gráfica es 1 : 4 000 000, en el plano 4 cm equivalen a:
 $4 \cdot 4\,000\,000 = 16\,000\,000 \text{ cm} = 160 \text{ km reales}$

071 La distancia real entre dos ciudades es de 450 km. Halla la distancia que las separa en un mapa realizado a escala 1 : 1 500 000.

La escala 1 : 1 500 000 significa que 1 500 000 cm de la realidad se representan en el plano con 1 cm. Como 1 500 000 cm = 15 km:

$$\left. \begin{array}{l} 15 \text{ km} \longrightarrow 1 \text{ cm} \\ 450 \text{ km} \longrightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{450}{15} = 30 \text{ cm}$$

072 Al representar la carretera que une dos pueblos en un mapa de escala 1 : 500 000, su longitud mide 6 cm. ¿Cuál sería la longitud de la carretera si la representamos en un plano de escala 1 : 60 000?

En la escala 1 : 500 000, la longitud de 6 cm en el mapa es:

$$6 \cdot 500\,000 = 3\,000\,000 \text{ cm} = 30 \text{ km reales}$$

En la escala 1 : 60 000, la longitud real de 30 km es:

$$3\,000\,000 : 60\,000 = 50 \text{ cm en el plano}$$

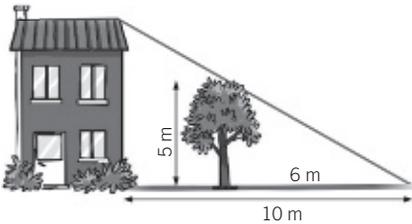
073 El plano de una vivienda está realizado a escala 1 : 60.

- a) ¿Qué dimensiones reales tiene la cocina si en el plano mide 4 cm de ancho y 7 cm de largo?
 b) El pasillo mide 7,5 m en la realidad. ¿Cuánto mide de largo en el plano?

a) Ancho: $4 \cdot 60 = 240 \text{ cm} = 2,4 \text{ m}$ Largo: $7 \cdot 60 = 420 \text{ cm} = 4,2 \text{ m}$

b) Largo: $\frac{750}{60} = 12,5 \text{ cm}$

074 Un árbol mide 5 m de altura y, a una determinada hora del día, proyecta una sombra de 6 m. ¿Qué altura tendrá el edificio de la figura si a la misma hora proyecta una sombra de 10 m?



Como se forman dos triángulos semejantes:

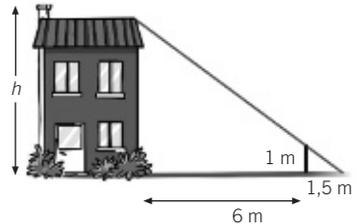
$$\frac{6}{10} = \frac{5}{x} \rightarrow x = 8,33 \text{ m}$$

El edificio tiene 8,33 m de altura.

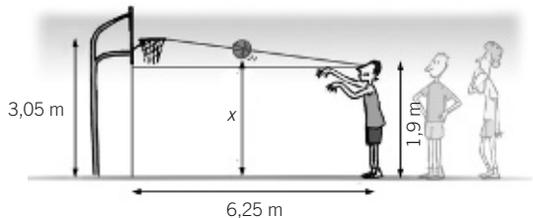
075 Si un palo mide 1 m, y la sombra que proyecta a una determinada hora del día es de 1,5 m, ¿cuánto mide un edificio que proyecta una sombra de 6 m a la misma hora?

Como se forman dos triángulos rectángulos semejantes:

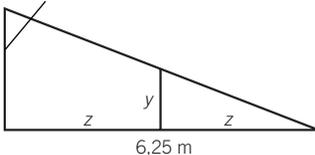
$$\frac{h}{1} = \frac{6}{1,5} \rightarrow h = 4 \text{ m}$$



076 Un jugador de baloncesto de 1,9 m, que está situado a 6,25 m de la canasta, lanza el balón hacia la misma. Calcula la altura a la que está el balón cuando va por la mitad del recorrido.



$$3,05 - 1,9 = 1,15 \text{ m}$$



Ambos triángulos son semejantes, y como z es la mitad de 6,25 m, y será la mitad de 1,15 m: $y = 0,575 \text{ m}$

La altura a la que está el balón será:
 $x = 1,9 + 0,575 = 2,475 \text{ m}$

Proporcionalidad geométrica

- 077** ●● La sombra que proyecta un padre que mide 1,8 m de estatura, a las 3 de la tarde, es de 2,1 m. ¿Qué estatura tendrá su hijo si la sombra que proyecta es de 1,5 m?

Como se forman triángulos semejantes:

$$\frac{1,8}{2,1} = \frac{x}{1,5} \rightarrow x = 1,29 \text{ m}$$

- 078** ●● La sombra que proyecta Julia, que mide 1,34 m, a la 1 de la tarde, es de 1,2 m. ¿Cuánto mide su madre si en ese momento proyecta una sombra de 1,4 m?

Como se forman triángulos semejantes:

$$\frac{1,34}{1,2} = \frac{x}{1,4} \rightarrow x = 1,56 \text{ m}$$

- 079** ●● Al lado de un semáforo, la sombra de Juan mide 1,5 m y la sombra del semáforo mide 60 cm más que la de Juan. ¿Cuál es la longitud del semáforo si Juan mide 1,75 m?

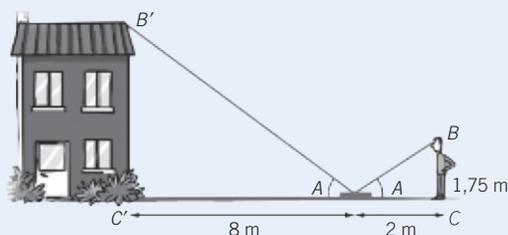
Como se forman triángulos semejantes:

$$\frac{1,75}{1,5} = \frac{x}{1,5 + 0,6} \rightarrow x = 2,45 \text{ m}$$

080 HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE CALCULA LA ALTURA MEDIANTE EL REFLEJO EN UN CRISTAL?

Para determinar la altura de un objeto inaccesible, colocamos un espejo en el suelo y nos alejamos la distancia necesaria para observar el punto más alto del objeto. ¿Qué altura tiene el edificio?



PRIMERO. Se comprueba que los triángulos \widehat{ABC} y $\widehat{A'B'C'}$ son semejantes. En este caso son semejantes por ser triángulos rectángulos y por ser iguales los ángulos de refracción, \widehat{A} .

SEGUNDO. Se aplica la proporcionalidad entre sus lados.

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{A'C}} \rightarrow \frac{\overline{B'C'}}{1,75} = \frac{8}{2} \rightarrow \overline{B'C'} = 1,75 \cdot 4 = 7 \text{ m}$$

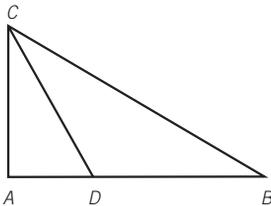
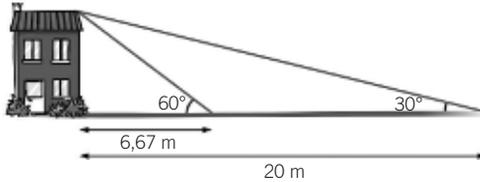
La altura del edificio es de 7 m.

- 081** Ana está situada a 5 m de la orilla de un río y ve reflejada una montaña en el agua. Si Ana mide 1,70 m y el río está a 3 km de la montaña, ¿qué altura tiene la montaña?

$$\frac{x}{3000} = \frac{1,70}{5} \rightarrow x = 1020 \text{ m}$$

- 082** Se mide la sombra de un edificio en dos momentos del día.

Calcula la altura del edificio.

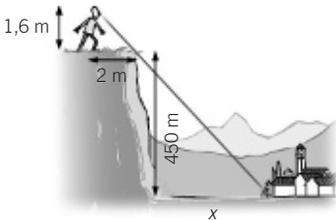


Como los triángulos \widehat{ABC} y \widehat{ACD} son semejantes:

$$\frac{6,67}{AC} = \frac{AC}{20} \rightarrow AC = \sqrt{133,4} = 11,55 \text{ m}$$

La altura del edificio es 11,55 m.

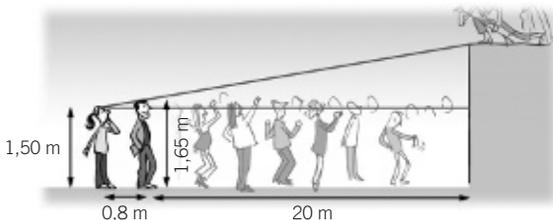
- 083** Pedro está a 2 m de un precipicio y ve alineado un pueblo con el borde del precipicio. ¿A qué distancia está el pueblo del precipicio?



$$\frac{1,6}{450} = \frac{2}{x} \rightarrow x = 562,5 \text{ m}$$

La distancia del pueblo al precipicio es 562,5 m.

- 084** María, que mide 1,50 m, acude a un concierto de rock, y 80 cm por delante de ella, se sitúa Luis, que mide 1,65 m. Calcula la altura del escenario si María ve el borde del mismo justo por encima de Luis y Luis se encuentra a 20 m del escenario.



$$\frac{0,8}{0,8 + 20} = \frac{1,65 - 1,50}{x} \rightarrow x = 3,9 \text{ m es la altura sobre María}$$

La altura del escenario es: $1,5 + 3,9 = 5,4 \text{ m}$

Proporcionalidad geométrica

085 Razona las siguientes cuestiones.



- a) Dos polígonos con todos sus ángulos iguales, ¿son semejantes?
¿En qué tipo de polígonos es verdadera la afirmación?
- b) Dos polígonos con todos sus lados proporcionales, ¿son semejantes?
¿En qué tipo de polígonos es verdadera la afirmación?

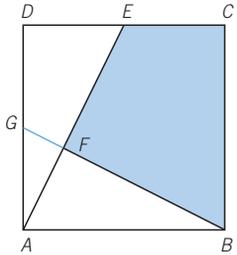
- a) No es cierto en general, ya que la igualdad de los ángulos no supone que los lados sean proporcionales, por ejemplo, en los rectángulos. Solo es cierto en el caso de los triángulos equiláteros y los polígonos regulares.
- b) No es cierto en general, ya que la proporcionalidad de los lados no implica la igualdad de los ángulos. Solo es cierto en el caso de los triángulos.

086 Halla el área de la zona sombreada, sabiendo que:



- El cuadrado mide 2 cm de lado.
- El punto E es el punto medio del lado DC .
- El ángulo \hat{F} es recto.

Como \widehat{ABG} es igual a \widehat{AED} , el área buscada es igual al área del cuadrado menos el área de los dos triángulos más el área de la intersección (el triángulo \widehat{AFG} , que es semejante a \widehat{ADE}).



$$\overline{AE} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{FG}}{1} = \frac{\overline{AF}}{2} \rightarrow \begin{cases} \overline{FG} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,45 \text{ cm} \\ \overline{AF} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,89 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{Área de } \widehat{AFG} = \frac{0,45 \cdot 0,89}{2} = 0,2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = 4 - 1 - 1 + 0,2 = 2,2 \text{ cm}^2$$

087 El triángulo \widehat{ABC} es isósceles, de área 8 cm^2 . Si D y E son los puntos medios de los lados iguales, calcula el área del trapecio $ABDE$.

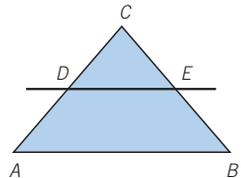


El área del trapecio es el área de \widehat{ABC} menos el área de \widehat{DEC} .

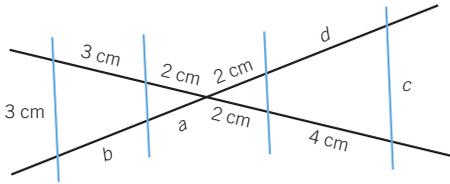
Los triángulos \widehat{ABC} y \widehat{DEC} son semejantes, de razón $\frac{1}{2}$. Su área tiene como razón: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Por tanto, el área de \widehat{DEC} es:
 $8 : 4 = 2 \text{ cm}^2$

El área del trapecio es: $8 - 2 = 6 \text{ cm}^2$



088 Halla los datos que faltan.



Por ser triángulos semejantes:

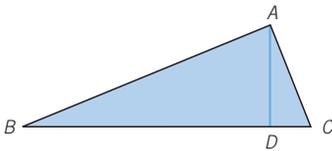
$$\frac{2}{2} = \frac{d}{4} \rightarrow d = 4 \text{ cm}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{b} \rightarrow b = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{2}{a} \rightarrow a = 2 \text{ cm}$$

$$\frac{2+d}{c} = \frac{2+3}{3} \rightarrow c = \frac{18}{5} = 3,6 \text{ cm}$$

089 Demuestra que la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo genera otros dos triángulos semejantes.



Por ser \widehat{ABC} un triángulo rectángulo:
 $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{C}$

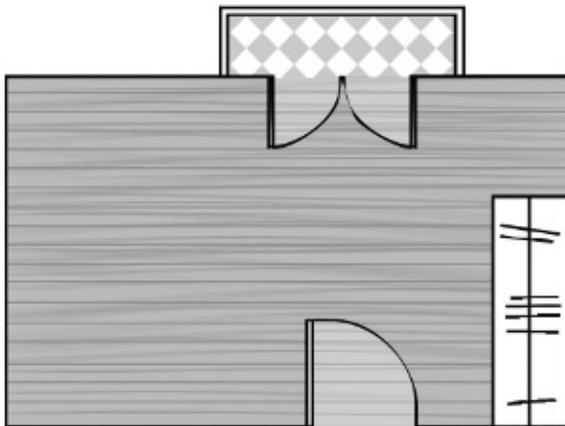
Por ser \widehat{DAC} un triángulo rectángulo:
 $\widehat{A} = 90^\circ - \widehat{C}$

Por tanto, \widehat{ABC} y \widehat{DAC} tienen los tres ángulos iguales, luego son semejantes.

El razonamiento para \widehat{DBA} es semejante.

PON A PRUEBA TUS CAPACIDADES

090 Arturo se va a mudar a un piso nuevo. Según el plano esta será su habitación.



El plano está dibujado a escala y su nueva habitación en realidad mide 4,56 m de largo.

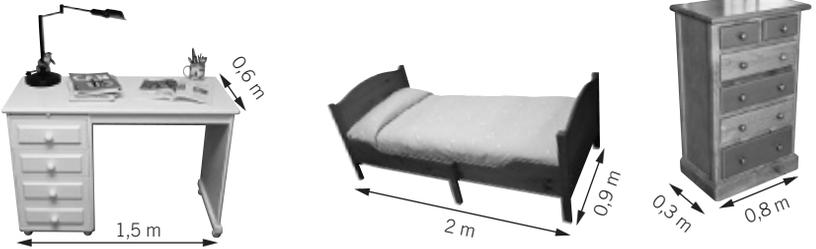
ERES CAPAZ DE... COMPRENDER

a) ¿A qué escala está dibujado el plano?

Proporcionalidad geométrica

ERES CAPAZ DE... RESOLVER

b) En esta habitación tendrá que distribuir sus muebles. Para hacerse una idea de cómo los colocará, los ha medido todos.



Después, los dibujará a escala y los colocará sobre el plano para decidir su colocación. Copia el plano y determina cómo se pueden distribuir los muebles.

ERES CAPAZ DE... DECIDIR

c) ¿Podrá montar en la habitación una maqueta de su tren eléctrico que mide $2,5 \times 1,5$ m?

a) El largo de la habitación mide 4,56 m y está representado por 7,6 cm.

Como $\frac{456}{7,6} = 60$, la escala del plano es 1 : 60.

b) El ancho de la habitación medirá: $4,6 \cdot 60 = 276 \text{ cm} = 2,76 \text{ m}$

Las dimensiones de los muebles en el plano son:

$$\text{Cama: Largo} = \frac{200}{60} = 3,33 \text{ cm} \quad \text{Ancho} = \frac{90}{60} = 1,5 \text{ cm}$$

$$\text{Escritorio: Largo} = \frac{150}{60} = 2,5 \text{ cm} \quad \text{Ancho} = \frac{60}{60} = 1 \text{ cm}$$

$$\text{Cajonero: Largo} = \frac{80}{60} = 1,33 \text{ cm} \quad \text{Ancho} = \frac{30}{60} = 0,5 \text{ cm}$$

Como los tres muebles no caben sobre la misma pared, la mejor manera de aprovechar el espacio es colocando el mueble cajonero en la esquina que hace el armario empotrado. A la izquierda de la puerta se pueden colocar la cama y el escritorio, sobre la misma pared o paredes distintas.

c) Las dimensiones de la maqueta del tren a escala son:

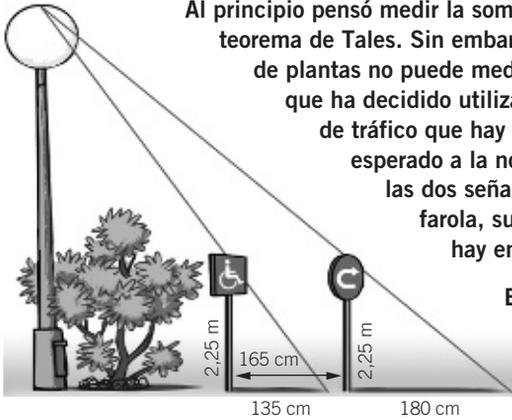
$$\text{Largo} = \frac{250}{60} = 4,17 \text{ cm} \quad \text{Ancho} = \frac{150}{60} = 2,5 \text{ cm}$$

Considerando los muebles y el espacio para poder abrir la puerta, la maqueta no cabe en la habitación.

091



En la mediana de la calle donde vive Ricardo han colocado una farola muy alta. Ricardo cree que la altura de la farola incumple la normativa sobre contaminación lumínica, y para comprobarlo quiere averiguar cuánto mide la farola exactamente.



Al principio pensó medir la sombra de la farola y aplicar el teorema de Tales. Sin embargo, como la farola está rodeada de plantas no puede medir su sombra con exactitud. Así que ha decidido utilizar las medidas de dos señales de tráfico que hay junto a la farola. Para ello ha esperado a la noche y ha medido la altura de las dos señales, que están alineadas con la farola, sus sombras y la separación que hay entre ellas.

ERES CAPAZ DE... COMPRENDER

- a) Dibuja un gráfico que represente los triángulos que se forman y sus medidas.

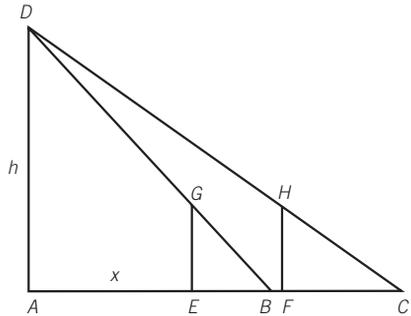
- b) ¿Qué medidas necesita calcular para determinar la altura de la farola?

ERES CAPAZ DE... RESOLVER

- c) ¿Cuál es la altura de la farola?

ERES CAPAZ DE... DECIDIR

- d) La normativa municipal establece que la altura máxima de las farolas no puede ser superior a la altura correspondiente al segundo piso de ninguno de los edificios ubicados a su alrededor. ¿Crees que la farola que han instalado en la calle de Ricardo cumple dicha normativa?



- a) Si h es la altura de la farola y x , la distancia de la farola a la primera señal, tenemos que:

- b) Necesita estas medidas:

\overline{AB} , \overline{EB} , \overline{EG} , \overline{AC} , \overline{FC} y \overline{FH} .

- c) Como son semejantes: \widehat{ABD} con \widehat{EBG} y \widehat{ACD} con \widehat{FCH} , tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x + 135}{135} &= \frac{h}{225} \\ \frac{x + 165 + 180}{180} &= \frac{h}{225} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{x + 135}{135} = \frac{x + 165 + 180}{180}$$

$$180x + 24300 = 135x + 46575 \rightarrow 45x = 22275 \rightarrow x = 495 \text{ cm}$$

$$\frac{495 + 135}{135} = \frac{h}{225} \rightarrow h = 1050 \text{ cm} = 10,5 \text{ m}$$

La altura de la farola es 10,5 m.

- d) La altura de una planta en un edificio suele estar entre 3 m y 3,5 m. A veces, las plantas bajas que están ocupadas por locales comerciales llegan a medir hasta 5 m. En cualquier caso, lo normal es que exista un edificio alrededor cuya altura, entre la planta baja y la primera planta no supere los 9 m, y por tanto la farola no cumpliría la normativa.