12 MEDIDA DEL VOLUMEN

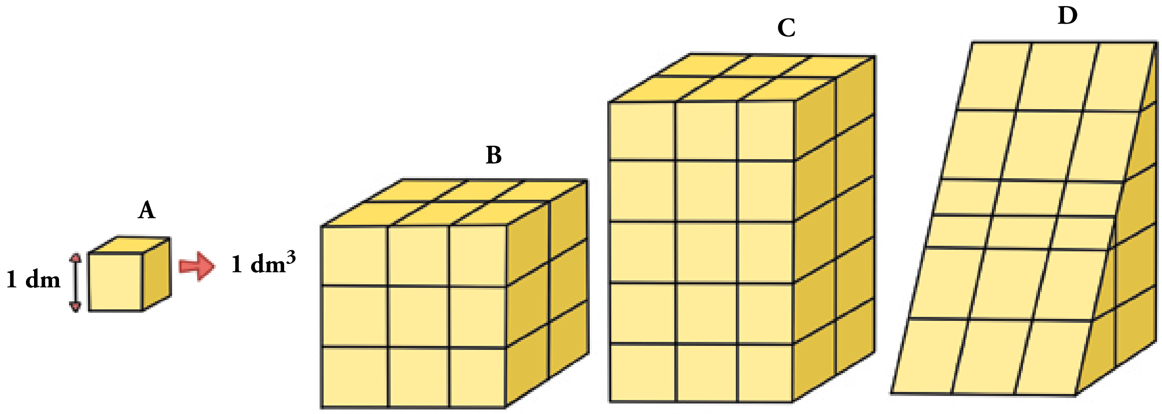
Página 269

Con lo que ya sabes, resuelve

Medir el volumen de un cuerpo es medir la cantidad de espacio que ocupa.

Esto es averiguar la cantidad de veces que ese cuerpo contiene a otro, conocido, que tomamos como unidad.

- **Observa los cuerpos A, B, C y D.**



1 **¿Cuántos cubitos como A hay en B? ¿Y en C? ¿Y en D, reuniendo algunos trozos?**

En B hay $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ cubitos como los de A.

En en C hay $5 \cdot 3 \cdot 3 = 30$ cubitos.

En D hay $30 : 2 = 15$ cubitos.

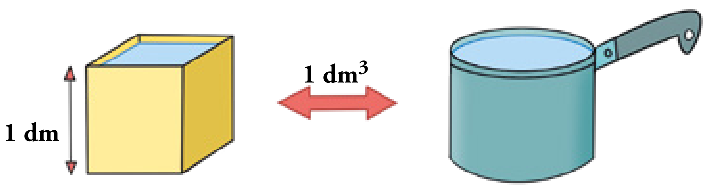
2 **Si tomamos A como unidad (dm^3), ¿cuál es el volumen de cada uno de los otros tres?**

Volumen de B = 18 dm^3

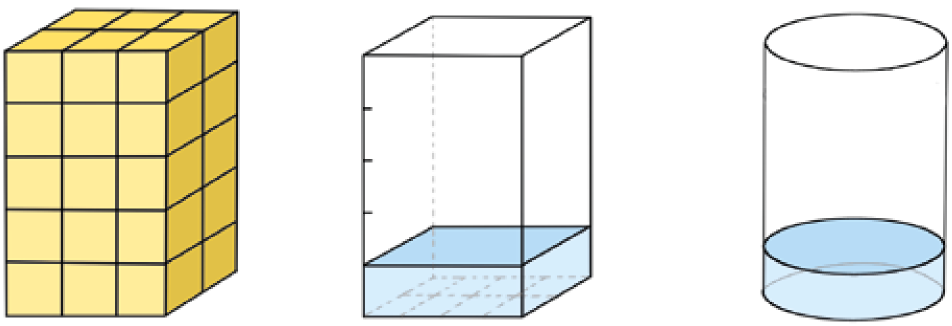
Volumen de C = 30 dm^3

Volumen de C = 13 dm^3

- **Imagina ahora que tienes un cazo en el que cabe la misma cantidad de agua que en una unidad cúbica de un decímetro de arista.**



Y observa los dos prismas y el cilindro que tienes a continuación:



3 **¿Cuántos cazos de agua se han vertido en el segundo prisma, para que el agua alcance un decímetro de altura? ¿Cuántos cazos caben en total?**

En el segundo prisma se han vertido 6 cazos, y en total caben 30 cazos.

4 **Sabiendo que la base del cilindro tiene la misma superficie que la base del prisma, ¿cuántos cazos habría que verter en él para que el agua alcance un decímetro de altura? ¿Y para llenarlo? (Recuerda que las bases tienen la misma superficie.)**

En el recipiente cilíndrico habría que verter también 6 cazos para que el nivel alcance un decímetro de altura. Y en total caben, también, 30 cazos.

5 **¿Cuál es, en decímetros cúbicos, el volumen del cilindro?**

El cilindro tiene un volumen de 30 dm^3.

1 ▶ UNIDADES DE VOLUMEN

Página 270

Para practicar

1 **Expresa en metros cúbicos.**

a) **2 dam^3 123 m^3 52 dm^3**

b) **29 320 000 cm^3**

c) **(435 cm^3 425 mm^3) · 500 000**

d) **37 hm^3 12 dam^3 325 m^3 402 dm^3**

a) 2 000 m^3 + 123 m^3 + 0,052 m^3 = 2 123,052 m^3

b) 29,32 m^3

c) 217 500 000 cm^3 + 212 500 000 mm^3 = 217,5 m^3 + 0,2125 m^3 = 217,7125 m^3

d) 37 000 000 m^3 + 12 000 m^3 + 325 m^3 + 0,402 m^3 = 37 012 325,4 m^3

2 **Pasa a forma compleja.**

a) **35 297 853 cm^3**

b) **(4 253 hm^3) · 2 000**

c) **0,00030124 dm^3**

d) **34,5832 hm^3**

a) 35 m^3 297 dm^3 853 cm^3

b) (4 km^3 253 hm^3) · 2 000 = 8 506 km^3

c) 301,24 mm^3

d) 34 hm^3 583 dam^3 200 m^3

Página 271

Para fijar ideas

1 **Copia y completa en tu cuaderno.**

	m^3			dm^3			cm^3			mm^3			
			kL	hL	daL	L	dL	cL	mL				
7,4 L													**→ … cm^3**
25 hL													**→ … m^3**
75 cm^3													**→ … cL**
0,047 m^3													**→ … L**

	m^3			dm^3			cm^3			mm^3			
			kL	hL	daL	L	dL	cL	mL				
7,4 L						7	4						→ 7 400 cm^3
25 hL			2	5									→ 2,5 m^3
75 cm^3								7	5				→ 7,5 cL
0,047 m^3					4	7							→ 47 L

Para practicar

3 **Cuál sería la unidad adecuada para expresar:**

a) La capacidad de un bote de champú.

b) La capacidad del maletero de un coche.

c) El agua que contiene un embalse.

a) Mililitros

b) Litros

c) Hectómetros cúbicos

4 **Expresa en litros.**

a) 125 m^3 705 dm^3 500 cm^3

b) 590 000 mm^3

c) 0,000317 dam^3

d) 2 700 mm^3

a) 125 705,5 L

b) 0,59 L

c) 317 L

d) 0,0027 L

5 **Copia y completa.**

a) 2 560 L = … m^3

b) 370 cL = … cm^3

c) 520 cL = … dm^3

d) 4,8 mL = … cm^3

e) 0,55 L = … cm^3

f) 1 780 hL = … m^3

a) 2 560 L = 2,56 m^3

b) 370 cL = 3 700 cm^3

c) 520 cL = 5,2 dm^3

d) 4,8 mL = 4,8 cm^3

e) 0,55 L = 550 cm^3

f) 1 780 hL = 178 m^3

6 **Si ayer cayeron 120 litros por m^2, ¿a cuántos milímetros de altura corresponden? ¿Cuántos litros por m^2 habrán caído si se alcanzan 48 mm de altura?**

120 L por m^2 corresponden a 120 mm de altura.

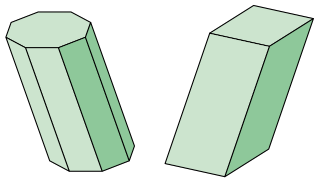
Para alcanzar los 48 mm de altura, tienen que haber caído 48 L por m^2.

2 ▸ PRINCIPIO DE CAVALIERI

Página 272

Para practicar

1 **¿Verdadero o falso? Los volúmenes de estos cuerpos geométricos:**



a) Son iguales, porque tienen la misma altura.

b) No son iguales, porque sus bases son polígonos diferentes.

c) Son iguales, si las secciones paralelas a las bases son iguales.

d) Son iguales, si tienen la misma altura y las secciones paralelas a las bases tienen áreas iguales.

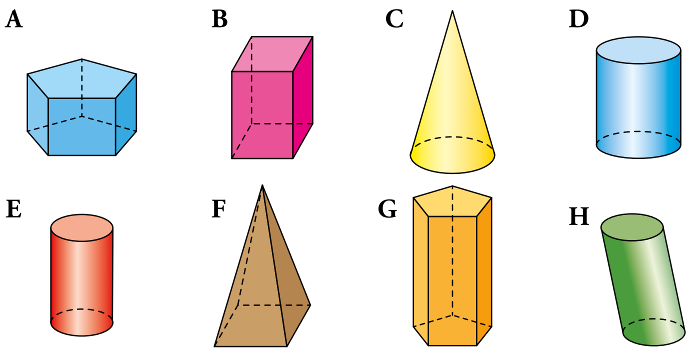
a) Falso.

b) Falso.

c) Falso.

d) Verdadero.

2 **Las bases de las figuras A, B, C y D tienen la misma superficie, y lo mismo les ocurre a las cuatro figuras inferiores. ¿Cuáles de ellas crees que ocupan el mismo volumen? ¿Por qué?**



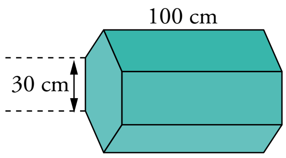
Observando las imágenes, las figuras B y D y las figuras E y H tienen volúmenes, aproximadamente, iguales, ya que, aparentemente, tienen la misma altura y sus bases áreas iguales.

3 ▸ VOLUMEN DEL PRISMA Y DEL CILINDRO

Página 273

Para fijar ideas

¿Copia y completa en tu cuaderno.

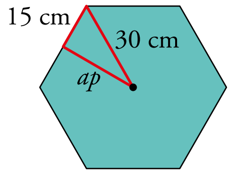


1 **Halla el volumen de un prisma hexagonal regular con 1 m de arista lateral y 30 cm de arista en la base.**

En un hexágono regular, el radio y el lado son iguales.

Por tanto, el cateto menor del triángulo rectángulo señalado es 15 cm.

$ap = \sqrt{30^2 - 15^2} \approx 26$ **cm**



$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{\ldots \cdot \ldots \cdot 26}{2} = \ldots \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \ldots \cdot \ldots = \ldots \text{ cm}^3 = 234 \text{ L}$$

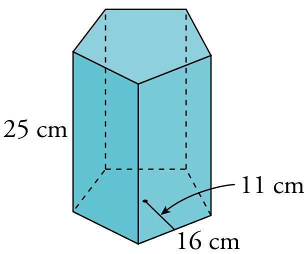
$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{30 \cdot 6 \cdot 26}{2} = 2\,340 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = 2\,340 \cdot 100 = 234\,000 \text{ cm}^3 = 234 \text{ litros}$$

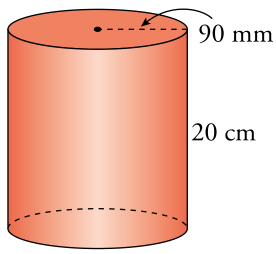
Para practicar

1 **Halla el volumen de estos cuerpos geométricos.**

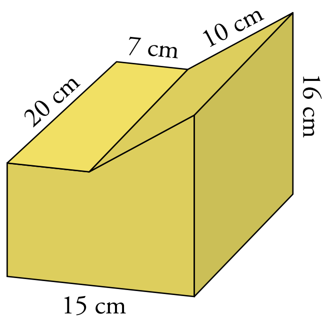
a)



b)



c)



a) $V = \dfrac{16 \cdot 5 \cdot 11}{2} \cdot 25 = 11\,000 \text{ cm}^3 = 11 \text{ dm}^3 = 11 \text{ L}$

b) $V = \pi \cdot 9^2 \cdot 20 = 5\,086{,}8 \text{ cm}^3 = 5{,}0868 \text{ dm}^3 = 5{,}0868 \text{ L}$

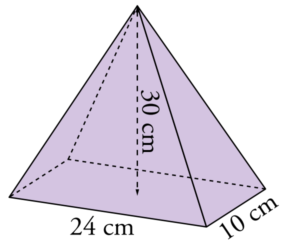
c) $V = 15 \cdot 20 \cdot 10 + \dfrac{8 \cdot 20 \cdot 6}{2} = 3\,000 + 480 = 3\,480 \text{ cm}^3 = 3{,}48 \text{ L}$

4 ▶ VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE Y DEL TRONCO DE PIRÁMIDE

Página 274

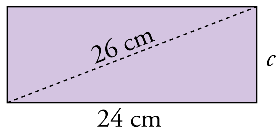
Para fijar ideas

¿Copia y completa en tu cuaderno.



1 **Una pirámide de 30 cm de altura tiene una base rectangular de 24 cm de largo y 26 cm de diagonal. Halla su volumen.**

El lado (ancho) del rectángulo mide:



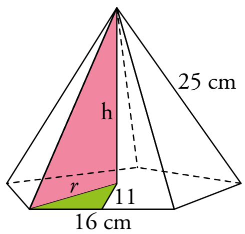
$$\mathbf{c = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}}$$

$$\mathbf{A_{BASE} = \ldots \cdot 10 = \ldots \text{ cm}^2}$$

$$\mathbf{V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot 30 = 2\,400 \text{ cm}^3}$$

$$A_{BASE} = 24 \cdot 10 = 240 \text{ cm}^2$$

$$V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3} \cdot 240 \cdot 30 = 2\,400 \text{ cm}^3$$

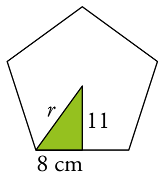


2 **Calcula el volumen de una pirámide pentagonal regular con los siguientes datos:**

- **Lado de la base → 16 cm**
- **Apotema de la base → 11 cm**
- **Arista lateral → 25 cm**

Calculamos, primero, el radio y después la altura de la pirámide:

$$\mathbf{r^2 = 11^2 + 8^2 = 185 \qquad h = \sqrt{25^2 - r^2} = \sqrt{\ldots} \approx \ldots \text{ cm}}$$



$$\mathbf{A_{BASE} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{\ldots \cdot 5 \cdot \ldots}{2} = \ldots \text{ cm}}$$

$$\mathbf{V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \ldots = 3\,080 \text{ cm}^3}$$

$$h = \sqrt{25^2 - r^2} = \sqrt{440} \approx 21 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{16 \cdot 5 \cdot 11}{2} = 440 \text{ cm}$$

$$V_{PIRÁMIDE} = \frac{1}{3} \cdot 440 \cdot 21 = 3\,080 \text{ cm}^3$$

Para practicar

1 **La gran pirámide de Keops es cuadrangular regular. El lado de su base mide 230 m y su altura es de 146 m. Halla su volumen en hm^3.**

$$V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146 \approx 2\,574\,467 \text{ m}^3 \approx 2{,}574 \text{ hm}^3$$

2 **Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular de 80 cm de altura y 30 cm de lado en la base.**

En un hexágono regular, $r = l$.

$$ap = \sqrt{30^2 - 15^2} = \sqrt{675} \approx 26 \text{ cm}$$

$$A_{BASE} = \frac{180 \cdot 26}{2} = 2\,340 \text{ cm}^2$$

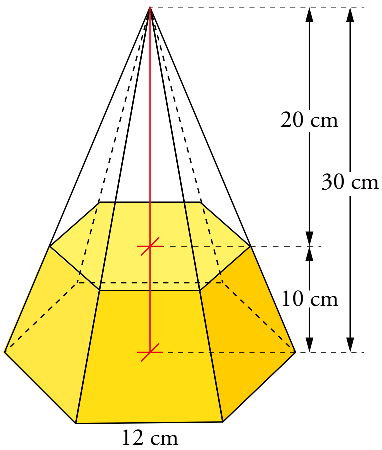
$$V = \frac{1}{3} \cdot 2\,340 \cdot 80 = 62\,400 \text{ cm}^3 = 62{,}4 \text{ dm}^3 = 62{,}4 \text{ L}$$

Página 275

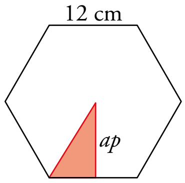
Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

3 **Una pirámide hexagonal regular de 12 cm de lado en la base y 30 cm de altura se corta por un plano paralelo a la base y a 10 cm de la misma. Calcula el volumen del tronco de pirámide resultante.**



Calculamos la apotema y el área de la base:



$\boldsymbol{ap = \sqrt{12^2 - \ldots^2} = \sqrt{\ldots} \approx \ldots \text{ cm}}$

$\boldsymbol{A_{BASE} = \dfrac{12 \cdot 6 \cdot \ldots}{2} = 374{,}4 \text{ cm}^2}$

La razón de semejanza entre la pirámide pequeña y la grande es: $\boldsymbol{\dfrac{20}{30} = \dfrac{\ldots}{\ldots}}$

La razón de los volúmenes es: $\boldsymbol{\left(\dfrac{\ldots}{\ldots}\right)^3 = \dfrac{8}{27}}$

$\boldsymbol{V_{PIRÁMIDE\ GRANDE} = \dfrac{1}{3} \cdot \ldots \cdot 30 = 3\,744 \text{ cm}^3}$

$\boldsymbol{V_{PIRÁMIDE\ PEQUEÑA} = \dfrac{\ldots}{27} \cdot \ldots \approx 1\,110 \text{ cm}^3}$

$\boldsymbol{V_{TRONCO\ DE\ PIRÁMIDE} = 3\,744 - \ldots = 2\,634 \text{ cm}^3}$

$ap = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10{,}4 \text{ cm}$

$A_{BASE} = \dfrac{12 \cdot 6 \cdot 10{,}4}{2} = 374{,}4 \text{ cm}^2$

La razón de semejanza entre la pirámide pequeña y la grande es: $\dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$

La razón de los volúmenes es: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$

$V_{PIRÁMIDE\ GRANDE} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{12 \cdot 10{,}4 \cdot 6}{2} \cdot 30 = 3\,744 \text{ cm}^3$

$V_{PIRÁMIDE\ PEQUEÑA} = \dfrac{8}{27} \cdot 3\,744 \approx 1\,110 \text{ cm}^3$

$V_{TRONCO\ DE\ PIRÁMIDE} = 3\,744 - 1\,110 = 2\,634 \text{ cm}^3$

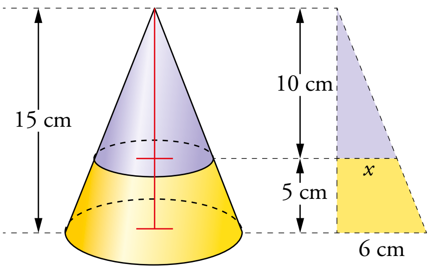
5 ▶ VOLUMEN DEL CONO Y DEL TRONCO DE CONO

Página 276

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

1 **Un cono recto con 6 cm de radio en la base y 15 cm de altura se corta por un plano paralelo a la base y a 5 cm de la misma. Calcula el volumen del cono grande, del cono pequeño surgido del corte y del tronco de cono restante.**



El cono grande y el pequeño son semejantes. Calculamos el radio, *x*, de la base del pequeño:

$$\frac{15}{6} = \frac{\ldots}{x} \rightarrow x = \frac{\ldots \cdot \ldots}{\ldots} = 4 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \ldots^2 \cdot \ldots = 565{,}2 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \ldots^2 \cdot \ldots \approx 167{,}5 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \ldots - \ldots = 397{,}7 \text{ cm}^3$$

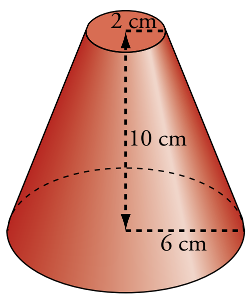
$$\frac{15}{6} = \frac{10}{x} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 6}{15} = 4 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 565{,}2 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 10 \approx 167{,}5 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 565{,}2 - 167{,}5 = 397{,}7 \text{ cm}^3$$

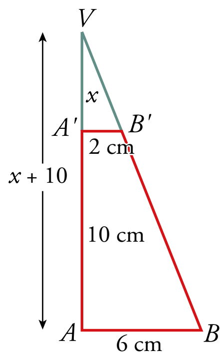
2 **Halla el volumen de un tronco de cono de 10 cm de altura cuyas bases tienen radios de 6 cm y 2 cm.**



La semejanza de los triángulos *VAB* y *VA'B'* nos permitirá hallar la altura de los dos conos:

$$\frac{x+10}{6} = \frac{x}{2} \rightarrow 2x + 20 = 6x \rightarrow 4x = 20 \rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

Por tanto, la altura del cono grande es 15 cm, y la del cono pequeño, 5 cm.



$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \ldots^2 \cdot \ldots - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \ldots^2 \cdot \ldots \approx 544 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5 \approx 544 \text{ cm}^3$$

6 ▶ VOLUMEN DE LA ESFERA

Página 277

Para fijar ideas

Copia y completa en tu cuaderno.

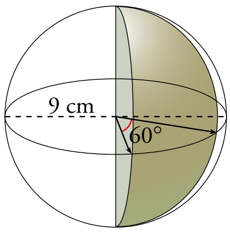
1 **Se introduce un balón de 30 cm de diámetro en un barreño lleno de agua, y se recoge el líquido desalojado. ¿Cuántos litros se han recogido?**

El volumen de agua desalojada coincide con el volumen de una esfera de radio 15 cm:

$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \ldots^3 = \ldots \text{ cm}^3 \to \ldots \text{ cm}^3 : 1\,000 = 14,13 \text{ L}$$

$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3 = 14\,130 \text{ cm}^3 \to 14\,130 \text{ cm}^3 : 1\,000 = 14,13 \text{ litros}$$

2 **Halla el volumen de una cuña esférica de 60° correspondiente a una esfera de 9 cm de radio.**



A una cuña de 60° le corresponde $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$ del volumen de la esfera:

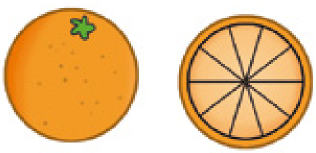
$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \ldots^3 \approx \ldots \text{ cm}^3 \to V_{\text{CUÑA ESFÉRICA}} = \frac{1}{6} \cdot \ldots \approx 509 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{ESFERA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 \approx 3\,052 \text{ cm}^3 \to V_{\text{CUÑA ESFÉRICA}} = \frac{1}{6} \cdot 3\,052 \approx 509 \text{ cm}^3$$

Página 278

Para practicar

1 **Calcula el volumen de cada uno de los 10 gajos de una naranja cuyo diámetro es de 12 cm, sabiendo que su cáscara tiene 0,8 cm de grosor.**



El volumen de cada gajo es el de una cuña esférica de 36° correspondiente a una esfera de 12 : 2 – 0,8 = 5,2 cm de radio.

$$V_{\text{SECTOR ESFÉRICO}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5,2^3 = 58,87 \text{ cm}^3$$

El volumen de cada gajo es 0,05887 L.

2 **¿Cuántas bolas de 5 mm de diámetro podremos hacer fundiendo un cable cilíndrico de 3 m de largo y 5 mm de diámetro?**

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{BOLA}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2{,}5^3 = 65{,}42 \text{ mm}^3 \\ V_{\text{CABLE}} = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 3\,000 \approx 58\,875 \text{ mm}^3 \end{array}\right\} \text{Se pueden hacer, aproximadamente, } \frac{58\,875}{65{,}42} = 900 \text{ bolas.}$$

3 **Sabiendo que la densidad del acero es 7 850 kg/m³, calcula el peso de una esfera hueca de 20 cm de radio exterior y 1 cm de grosor.**

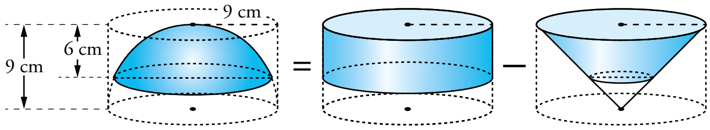
$$V = \frac{4}{3}\pi\, 20^3 - \frac{4}{3}\pi\, 19^3 = 4\,776{,}99 \text{ cm}^3$$

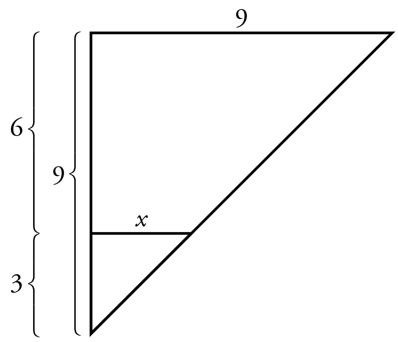
$$\left.\begin{array}{rcl} 7\,850 \text{ kg} & \to & 10^6 \\ x & \to & 4\,776{,}99 \end{array}\right\} \to x = 37{,}49 \text{ kg}$$

La esfera hueca pesará 37,49 kg.

4 **Calcula el volumen de un casquete esférico de 6 cm de alto, perteneciente a una esfera de 18 cm de diámetro.**

Observa:





$r = 9$ cm

$x = 3$ cm

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot r^2 \cdot 6 = \pi \cdot 9^2 \cdot 6 \approx 1\,526 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 1/3 \cdot \pi \cdot 9^3 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 \approx 735 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} \approx 791 \text{ cm}^3$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 279

¿DOMINAS LO BÁSICO?

Unidades de volumen

1 **Transforma en metros cúbicos estas cantidades:**

a) $0,025\ hm^3$ **b)** $459\ hm^3$

c) $45\,214\ dm^3$ **d)** $0,015\ km^3$

e) $23\ dam^3$ **f)** $58\,000$ L

a) $25\,000\ m^3$ b) $459\,000\,000\ m^3$

c) $45,214\ m^3$ d) $15\,000\,000\ m^3$

e) $23\,000\ m^3$ f) $58\ m^3$

2 **Copia y completa en tu cuaderno:**

a) $1\ hm^3 = \dots$ hL

b) $1\ dam^3 = \dots$ daL

c) $1\ m^3 = \dots$ L

d) $1\ dm^3 = \dots$ dL

e) $1\ cm^3 = \dots$ cL

f) $1\ mm^3 = \dots$ mL

a) 10^7 hL b) 10^5 daL c) 10^3 L

d) 10 dL e) 10^{-1} cL f) 10^{-3} mL

3 **Indica cuál de los tres volúmenes es razonable para cada recipiente.**

a) Volumen de un pantano:

$71\ hm^3$ $387\,000$ L $4\,000\,000\,000\ cm^3$

b) Un depósito de agua en una vivienda:

$2\ dam^3$ $0,8\ m^3$ $45\,000$ L

c) Un vaso normal:

$2\ dm^3$ $0,2\ dm^3$ $0,02\ dm^3$

d) Una cucharada de café:

3 dL $3\ cm^3$ $3\ mm^3$

a) $71\ hm^3$

b) $0,8\ m^3$

c) $0,2\ dm^3$

d) $3\ cm^3$

Cálculo de volúmenes

4 **¿Cuál es el volumen de un cubo de 15 cm de arista?**

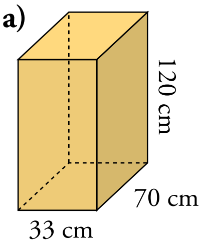
$V = 3\,375\ cm^3 = 3,375\ dm^3 = 3,375$ L

5 **Calcula el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 9 dm × 15 dm × 8 dm.**

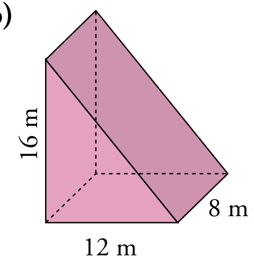
$V = 1\,080\ dm^3 = 1,08\ m^3$

6 **Calcula el volumen de cada uno de estos cuerpos geométricos y exprésalo en litros.**

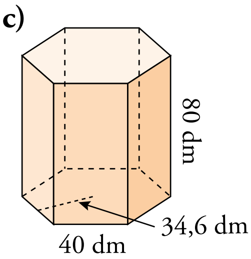
a)



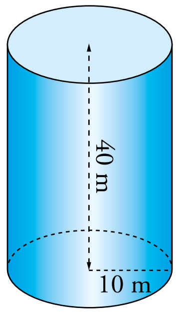
b)



c)



d)



a) $V = 33 \cdot 70 \cdot 120 = 277\,200 \text{ cm}^3 = 277{,}2 \text{ L}$

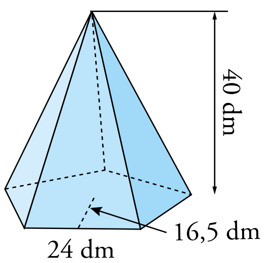
b) $V = \dfrac{12 \cdot 8 \cdot 16}{2} = 768 \text{ m}^3 = 768\,000 \text{ L}$

c) $V = \dfrac{6 \cdot 40 \cdot 34{,}6}{2} \cdot 80 = 332\,160 \text{ dm}^3 = 332\,160 \text{ L}$

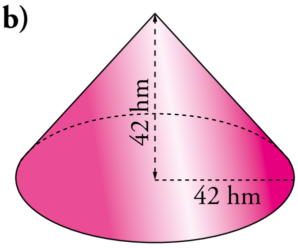
d) $V = \pi \cdot 10^2 \cdot 40 = 12\,560 \text{ m}^3 = 12\,560\,000 \text{ L}$

7 **Calcula el volumen de cada una de estas figuras. Exprésalo en litros.**

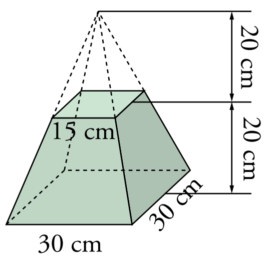
a)



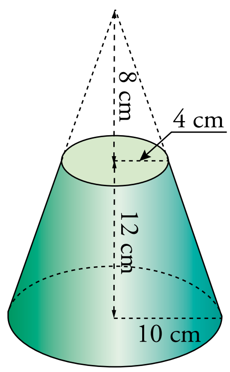
b)



c)



d)



a) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5 \cdot 24 \cdot 16{,}5}{2} \cdot 40 = 13\,200 \text{ dm}^3 = 13\,200 \text{ L}$

b) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 42^2 \cdot 42 = 77\,545{,}44 \text{ hm}^3 = 77\,545\,440\,000\,000 \text{ L}$

c) $V = \dfrac{1}{3} \cdot 30^2 \cdot 40 - \dfrac{1}{3} \cdot 15^2 \cdot 20 = 12\,000 - 1\,500 = 10\,500 \text{ cm}^3 = 10{,}5 \text{ L}$

d) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 20 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 1\,959{,}36 \text{ cm}^3 = 1{,}95936 \text{ L}$

8 **Halla el volumen de:**

a) Un cilindro de 10 cm de radio y 20 cm de altura.

b) Una esfera de 12 cm de diámetro.

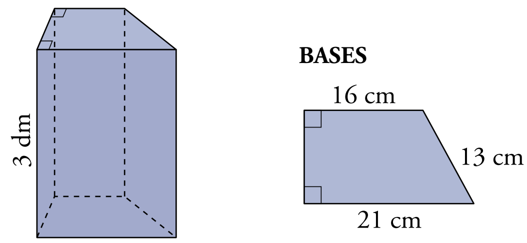
c) Un disco cilíndrico de 6 dm de radio de la base y 15 cm de altura.

a) $V = \pi \cdot 10^2 \cdot 20 = 6\,280 \text{ cm}^3 = 6{,}280 \text{ dm}^3 = 6{,}28 \text{ L}$

b) $V = \dfrac{4}{3}\pi\ 12^3 = 904{,}32 \text{ cm}^3$

c) $V = \pi\ 6^2 \cdot 1{,}5 = 169{,}6 \text{ dm}^3$

9 **Halla el volumen del prisma. Deberás calcular, primero, algún dato que falta.**

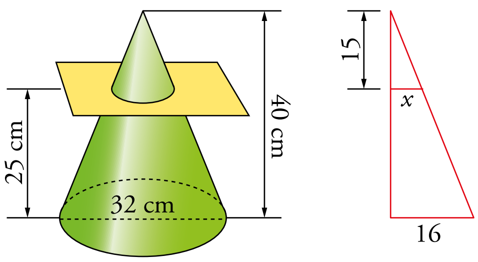


$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\sqrt{144} \cdot (16 + 21)}{2} = 222 \text{ cm}^2$

$V = 222 \cdot 30 = 6\,660 \text{ cm}^3$

10 **Calcula el volumen de los dos cuerpos geométricos que se generan al cortar un cono por un plano como se muestra en el dibujo.**

$V_{\text{CONO MAYOR}} - V_{\text{CONO MENOR}} = V_{\text{TRONCO DE CONO}}$



$\dfrac{\mathbf{40}}{\mathbf{16}} = \dfrac{\mathbf{15}}{\boldsymbol{x}}$

$\dfrac{40}{16} = \dfrac{15}{x} \to x = 6$

$V_{\text{CONO MENOR}} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 \approx 565{,}2 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16^2 \cdot 40 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 \approx 10\,152{,}67 \text{ cm}^3$

Página 280

ENTRÉNATE Y PRACTICA

11 **Transforma en litros.**

a) $400\,000\ hm^3$

b) $0{,}000047\ hm^3$

c) $6\ dam^3\ 318\ m^3$

d) $8\,562\ m^3\ 1\,749\ cm^3$

e) **14 350 dL**

f) **0,32 hL**

a) 400 000 000 000 000 litros

b) 47 000 litros

c) 6 318 000 litros

d) 8 562 001,749 litros

e) 1 435 litros

f) 32 litros

12 **Copia y completa en tu cuaderno las igualdades siguientes:**

a) $0{,}0037\ km^3 = \ldots\ m^3$

b) $0{,}36\ hm^3 = \ldots\ dm^3$

c) $1{,}8342\ dam^3 = \ldots\ m^3 = \ldots\ dm^3$

d) $0{,}0007\ m^3 = \ldots\ dm^3 = \ldots\ cm^3$

e) $15\ hm^3\ 13\ dam^3\ 432\ m^3 = \ldots\ m^3$

f) $15\ hm^3\ 13\ dam^3\ 432\ m^3 = \ldots\ L$

a) $3\,700\,000\ m^3$

b) $360\,000\,000\ dm^3$

c) $1\,834{,}2\ m^3 = 1\,834\,200\ dm^3$

d) $0{,}7\ dm^3 = 700\ cm^3$

e) $15\,013\,432\ m^3$

f) 15 013 432 000 litros

13 **Expresa estas cantidades en forma compleja:**

a) $45\,125\,145\ dm^3$

b) $0{,}45124568\ km^3$

c) $451{,}14521\ dm^3$

d) $183\,000\ dam^3$

e) $527\,002\,045\ m^3$

f) $183\,070\,693\,002\ cm^3$

a) $45\ dam^3\ 125\ m^3\ 145\ dm^3$

b) $451\ hm^3\ 245\ dam^3\ 680\ m^3$

c) $451\ dm^3\ 145\ cm^3\ 210\ mm^3$

d) $183\ hm^3$

e) $527\ hm^3\ 2\ dam^3\ 45\ m^3$

f) $183\ dam^3\ 70\ m^3\ 693\ dm^3\ 2\ cm^3$

14 **Efectúa las operaciones siguientes y expresa el resultado en hectolitros. Para ello, pasa a forma incompleja, expresa todas las cantidades en las mismas unidades y realiza los cálculos.**

a) $0{,}34\ dam^3 + 84\ m^3 + 1\,284\ m^3$

b) $0{,}00035\ km^3 + 0{,}45\ hm^3 + 65\ dam^3$

c) $0{,}541\ dam^3 - 421\ m^3\ 300\ dm^3$

d) $568\ kL - 0{,}508\ dam^3$

e) $(5\ m^3\ 150\ dm^3) \cdot 12$

f) $(24\ hm^3\ 123\ dam^3\ 128\ m^3) : 40$

a) $340 + 84 + 1\,284 = 1\,708\ m^3 \rightarrow 17\,080\ hL$

b) $350 + 450 + 65 = 865\ dam^3 \rightarrow 8\,650\,000\ hL$

c) $541 - 421{,}3 = 119{,}7\ m^3 \rightarrow 1\,197\ hL$

d) $568 - 508 = 60\ kL = 600\ hL$

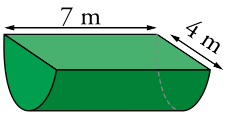
e) $60\,000 + 1\,800 = 61\,800\ dm^3 \rightarrow 618\ hL$

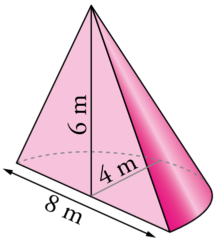
f) $(60\,000 + 3\,075 + 3{,}2)\ m^3 = 63\,078{,}2\ m^3 \rightarrow 630\,782\ hL$

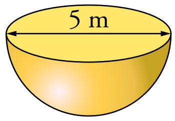
15 **La altura de un ortoedro mide 25 cm y su base tiene una superficie de 30 cm². ¿Qué volumen ocupa?**

$V = 30 \cdot 25 = 750 \text{ cm}^3$

16 **Calcula el volumen.**

a) 

b) 

c) 

a) $V = \dfrac{\pi r^2 h}{2} = \dfrac{\pi \cdot 2^2 \cdot 7}{2} \approx 44 \text{ m}^3$

b) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\pi r^2 h}{2} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 6}{2} \approx 50 \text{ m}^3$

c) $V = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \pi r^3 = \dfrac{2}{3} \cdot \pi \cdot 2{,}5^3 \approx 32{,}72 \text{ m}^3$

17 **La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 15 cm. La altura del prisma es de 2 dm. Halla su volumen.**

$V = \dfrac{12 \cdot 15}{2} \cdot 20 = 1\,800 \text{ cm}^3 = 1{,}8 \text{ dm}^3 = 1{,}8 \text{ L}$

18 **La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo. Uno de sus catetos mide 14 cm, y la hipotenusa, 26 cm. La altura del prisma es de 30 cm. Halla su volumen.**

Buscamos el cateto que nos falta por conocer de la base:

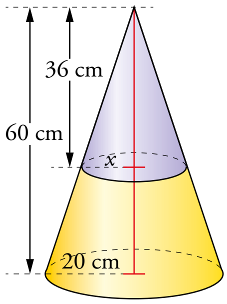
$26^2 = 14^2 + c^2 \rightarrow c = 21{,}9 \text{ cm}$

$V = \dfrac{21{,}9 \cdot 14}{2} \cdot 30 = 4\,599 \text{ cm}^3 \approx 4{,}6 \text{ L}$

19 **Un prisma tiene sus bases en forma de rombo cuyas diagonales miden 40 dm y 28 dm. Su altura es de 1,2 m. Halla su volumen.**

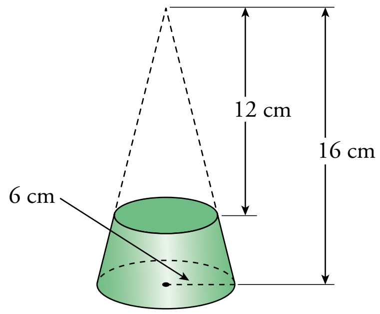
$V = \dfrac{40 \cdot 28}{2} \cdot 12 = 6\,720 \text{ dm}^3 = 6{,}720 \text{ m}^3$

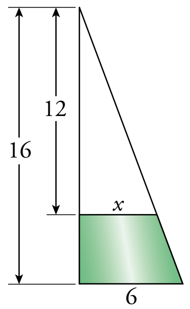
20 ***Un cono de revolución, de 60 cm de altura y 20 cm de radio en la base, se corta por un plano paralelo a la base que dista 36 cm del vértice. Calcula el volumen de tronco de cono que queda por debajo del corte.***



Ejercicio resuelto.

21 **Halla de dos formas, como en el ejercicio anterior, el volumen de este tronco de cono:**





Resolución A:

$$\frac{16}{6} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 12}{16} = 4{,}5 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 16 = 602{,}88 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 12 = 254{,}34 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 602{,}88 - 254{,}34 = 348{,}54 \text{ cm}^3$$

Resolución B:

Razón de semejanza entre los conos $\rightarrow \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$

Relación entre los volúmenes $\rightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$

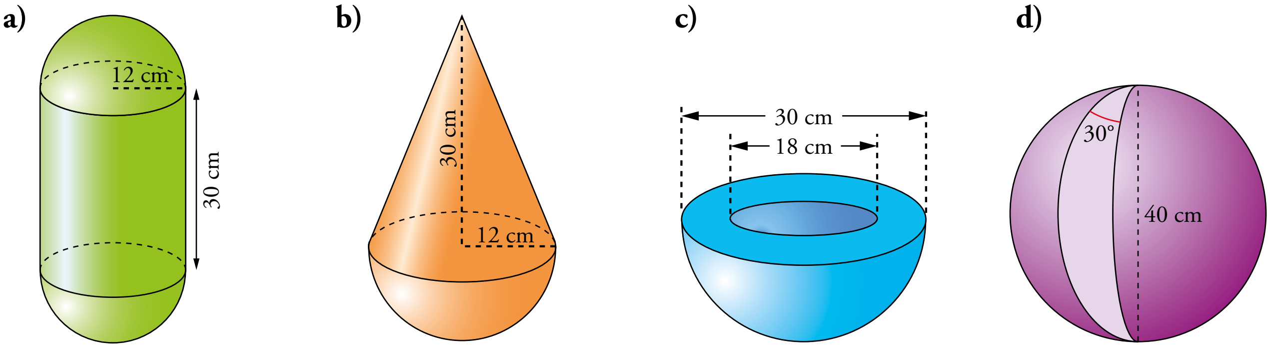
$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 16 \approx 602{,}88 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{27}{64} \cdot 602{,}88 = 254{,}34 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 602{,}88 - 254{,}34 = 348{,}54 \text{ cm}^3$$

Página 281

22 **Calcula el volumen, en litros, de los siguientes cuerpos geométricos:**



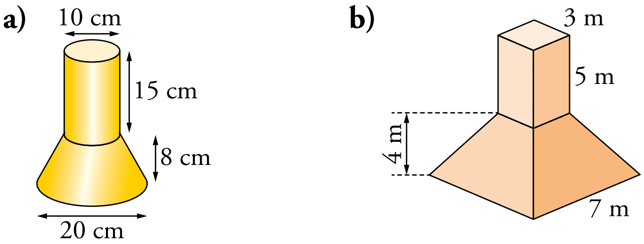
a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 + \pi \cdot 12^2 \cdot 30 = 20\,799{,}36 \text{ cm}^3 = 20{,}79936 \text{ L}$

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 8\,138{,}88 \text{ cm}^3 = 8{,}13888 \text{ L}$

c) $V = \dfrac{\frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3}{2} = \dfrac{11\,077{,}92}{2} = 5\,538{,}96 \text{ cm}^3 = 5{,}53896 \text{ L}$

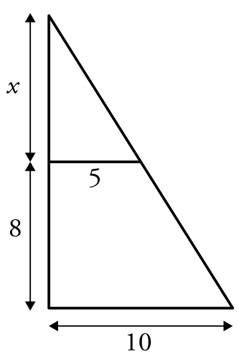
d) $V = \frac{11}{12} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 20^3 = 30\,702{,}2 \text{ cm}^3 = 30{,}7022 \text{ L}$

23 **Halla el volumen de estos cuerpos geométricos:**



a) $V_{\text{CUERPO}} = V_{\text{CILINDRO}} + V_{\text{TRONCO CONO}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 15 + V_{\text{TRONCO CONO}} \approx 1\,178 + V_{\text{TRONCO DE CONO}}$

Para calcular el volumen del tronco de cono, necesitamos conocer la altura del cono de 20 cm de diámetro, encontrar su volumen, y restarle el volumen del cono de 10 cm de diámetro.



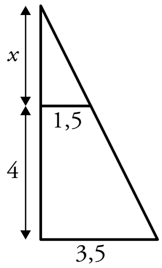
$$\frac{x+8}{10} = \frac{x}{5} \rightarrow 5x + 40 = 10x \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

$V_{\text{TRONCO CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 16 - \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 8 = \frac{1}{3}\pi(1\,600 - 200) \approx 1\,466 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CUERPO}} = 1\,178 + 1\,466 = 2\,644 \text{ cm}^3$

b) $V_{\text{CUERPO}} = V_{\text{PRISMA}} + V_{\text{TRONCO PIRÁMIDE}} = 3^2 \cdot 5 + V_{\text{TRONCO PIRÁMIDE}} = 45 + V_{\text{TRONCO PIRÁMIDE}}$

Buscamos el volumen del tronco de pirámide:



$$\frac{x+4}{3,5} = \frac{x}{1,5} \rightarrow 1,5x + 6 = 3,5x \rightarrow x = 3 \text{ m}$$

$$V_{\text{TRONCO PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot 7^2 \cdot 7 - \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 3 \approx 105,3 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{CUERPO}} = 45 + 105,3 = 150,3 \text{ m}^3$$

RESUELVE PROBLEMAS SENCILLOS

24 **¿Cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar con 0,03 dam^3?**

0,03 dam^3 = 30 000 dm^3 = 30 000 L

30 000 : 0,75 = 40 000

Se podrán llenar 40 000 botellas de 3/4 de litro.

25 **Un pantano tiene una capacidad de 0,19 km^3. Si ahora está al 28 % de su capacidad, ¿cuántos litros de agua contiene?**

28 % de 0,19 km^3 = 0,0532 km^3 = 53 200 000 000 L

Contiene 53 200 000 000 L de agua.

26 **La cuenca fluvial cuyas aguas llegan a un pantano es de 62 km^2. En las últimas lluvias han caído 27 litros por metro cuadrado. Del agua caída, se recoge en el pantano un 43 %. ¿Cuántos hectómetros cúbicos se han recogido en el pantano como consecuencia de las lluvias?**

62 000 000 m^2 $\rightarrow$ 62 000 000 m^2 · 27 L/m^2 = 1,674 · 10^9 L = 1,674 · 10^9 dm^3

1,674 · 10^6 m^3 de agua caída en la cuenca fluvial en total. Calculamos el 43 %:

1,674 · 10^6 · 0,43 = 719 820 m^3

Han recogido 0,71982 hm^3.

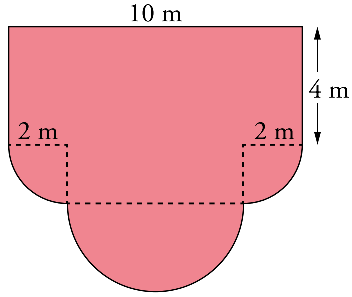
27 **Un depósito vacío pesa 27 kg, y lleno de aceite, 625,5 kg. ¿Cuántos litros de aceite contiene? La densidad de ese aceite es 0,95 kg/dm^3.**

VOLUMEN DE ACEITE		*PESO*
1 (dm^3)	$\longrightarrow$	*0,95 kg*
a (dm^3)	$\longrightarrow$	*x kg*

$$\frac{625,5 - 27}{0,95} = 630 \text{ dm}^3 = 630 \text{ L}$$

Contiene 630 L de aceite.

28 **Halla el volumen de una habitación de 2,8 m de altura, cuya planta tiene esta forma y dimensiones:**



$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PARALELOGRAMO GRANDE}} = 4 \cdot 10 \cdot 2{,}8 = 112 \text{ m}^3 \\ V_{\text{SEMICÍRCULO}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 \cdot 2{,}8 = 39{,}6 \text{ m}^3 \\ V_{\text{PARALELOGRAMO PEQUEÑO}} = 2 \cdot 6 \cdot 2{,}8 = 33{,}6 \text{ m}^3 \\ V_{1/2 \text{ CIRCUNFERENCIA}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 \cdot 2{,}8 = 17{,}6 \text{ m}^3 \end{array}\right\} V_{\text{TOTAL}} = 202{,}8 \text{ m}^3$$

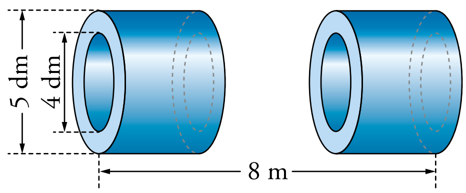
29 **Un sótano cuya superficie es de 208 m^2 se ha inundado. El agua llega a 1,65 m de altura. Se extrae el agua con una bomba que saca 6 hL por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarlo?**

$208 \cdot 1{,}65 = 343{,}2$ m^3 hay en el sótano.

$$\frac{3\,432 \text{ hL}}{6 \text{ hL/min}} = 572 \text{ min} = 9{,}5\overset{\frown}{3} \text{ horas} = 9 \text{ h } 32 \text{ min}$$

Se tardará en vaciarlo 9 horas y 32 minutos.

30 **Calcula el volumen de hormigón que se ha necesitado para hacer esta tubería de 8 metros de longitud.**



Calculamos el volumen del cilindro de 5 dm de diámetro y le restamos el de 4 dm, teniendo en cuenta que debemos indicar todas las medidas con la misma unidad:

$$V = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 80 - \pi \cdot 2^2 \cdot 80 = 180\pi \approx 565{,}5 \text{ dm}^3 = 565 \text{ L}$$

Se han necesitado 565,5 m^3 de hormigón.

31 **Halla el volumen de una habitación con forma de ortoedro de dimensiones 6 m × 3,8 m × 2,6 m. ¿Cuántas duchas podrías darte con el agua que cabe en la habitación suponiendo que gastas 80 L de agua en cada ducha?**

$V = 6 \cdot 3{,}8 \cdot 2{,}6 = 59{,}28$ m^3 $= 59\,280$ L

$59\,280 : 80 = 741$

Podrías darte 741 duchas.

32 **Con una barra cilíndrica de oro de 15 cm de larga y 5 mm de diámetro se fabrica un hilo de 1/4 mm de diámetro. ¿Cuál es la longitud del hilo?**

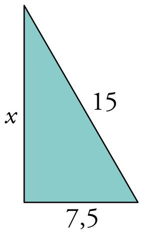
$V_{\text{BARRA}} = \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 150 = 2\,943{,}75 \text{ mm}^3$

Dividiéndolo entre la superficie de una circunferencia de 0,25 mm de diámetro nos dará la longitud del hilo:

$2\,943{,}75 : (\pi \cdot 0{,}125^2) = 60\,000 \text{ mm} = 60 \text{ m}$

La longitud del hilo es 60 m.

33 **Una columna de basalto tiene forma de prisma hexagonal regular. El lado de la base mide 15 cm. La altura de la columna es de 2,95 m. Halla su peso sabiendo que 1 m³ de basalto pesa 2 845 kg.**

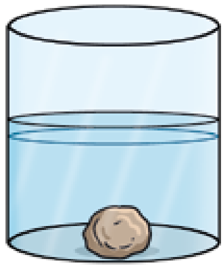


$x \approx 13$ $\qquad V_{\text{COLUMNA}} = 13 \cdot \dfrac{15 \cdot 6}{2} \cdot 295 = 172\,575 \text{ cm}^3$

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 \text{ m}^3 & \to & 2\,845 \text{ kg} \\ 0{,}172575 \text{ m}^3 & \to & x \text{ kg} \end{array}\right\} x = 491 \text{ kg}$$

La columna pesará 491 kg.

34 **Para medir el volumen de una piedra pequeña, hacemos lo siguiente: llenamos un vaso cilíndrico hasta la mitad, sumergimos la piedra y comprobamos que el nivel ha subido 22 mm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?**



DATOS DEL VASO

Diámetro exterior: 9 cm

Diámetro interior: 8,4 cm

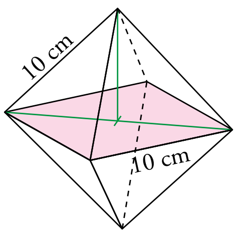
Altura: 15 cm

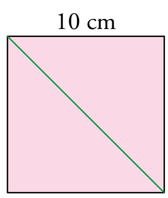
Usa solo los datos que necesites.

$V = \left(\dfrac{8{,}4}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2{,}2 = 121{,}86 \text{ cm}^3$ es el volumen de la piedra.

Página 282

35 **Calcula el volumen de un octaedro regular de 10 cm de arista.**

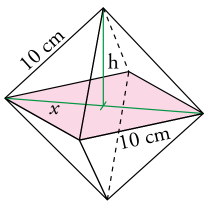


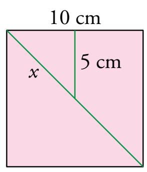


$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE}} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{h}$

$x = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7{,}07 \text{ cm}$

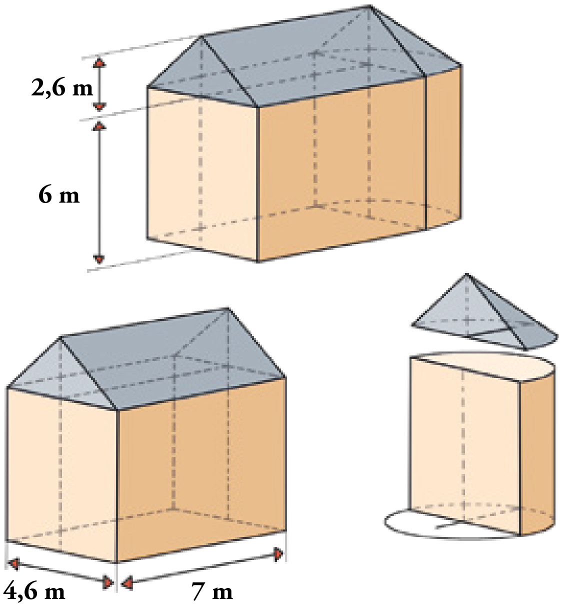
$\text{h} = \sqrt{10^2 - 7{,}07^2} = 7{,}07 \text{ cm}$





$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{h} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 7{,}07 = 471{,}3 \text{ cm}^3$

36 Meta 7.2. **Para decidir el sistema de calefacción que se va a instalar en una ermita, se necesitan saber los metros cúbicos de aire que encierra. ¿Podrías calcularlos con las dimensiones que muestra la ilustración? Justifica tu respuesta.**



Calculamos el volumen de la nave:

$V_{\text{SIN TEJADO}} = 4{,}6 \cdot 7 \cdot 6 = 193{,}2 \text{ m}^3$

$V_{\text{TEJADO NAVE}} = \dfrac{4{,}6 \cdot 2{,}6}{2} \cdot 7 = 41{,}86 \text{ m}^3$

$V_{\text{NAVE}} = 193{,}2 + 41{,}86 = 235{,}06 \text{ m}^3$

Calculamos el volumen del ábside:

$V_{\text{SIN TEJADO}} = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{4{,}6}{2}\right)^2 \cdot 6 \approx 50 \text{ m}^3$

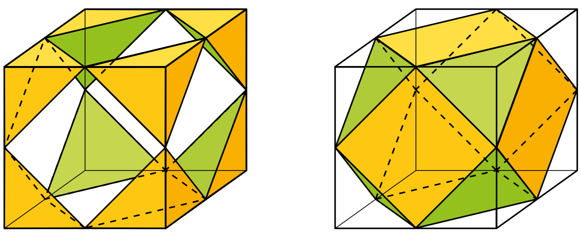
$V_{\text{TEJADO}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{4{,}6}{2}\right)^2 \cdot 2{,}6 \approx 7{,}2 \text{ m}^3$

$V_{\text{ÁBSIDE}} = 50 + 7{,}2 = 57{,}2 \text{ m}^3$

La ermita encierra $235{,}06 + 57{,}2 = 292{,}26 \text{ m}^3$ de aire.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

37 **A un cubo de arista 10 cm, se le cortan las esquinas como se muestra a continuación.**



Explica la siguiente expresión, como procedimiento para calcular el volumen del poliedro resultante.

$$V = 10^3 - \left(\frac{5 \cdot 5}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 8 = 833 \text{ cm}^3$$

Cada una de las esquinas cortadas es una pirámide que tiene tres aristas perpendiculares e iguales a la mitad de la arista del cubo, es decir, de 5 cm.

Si la apoyamos sobre una de sus caras triangulares, la superficie de la base es $\frac{5 \cdot 5}{2}$ y la altura, 5 cm. Así, el volumen de una esquina será:

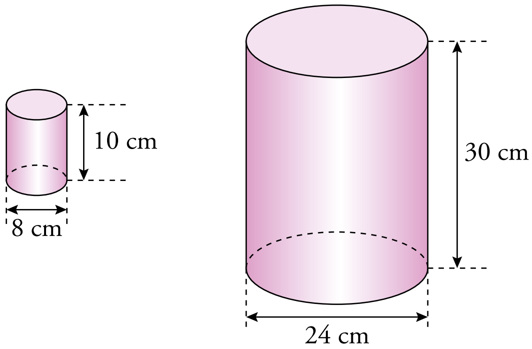
$$\text{Superficie de la base por la altura dividido entre 3} \rightarrow \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{3}$$

Y el volumen de las ocho esquinas será: $\left(\frac{5\cdot 5}{2}\cdot 5\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 8$

Finalmente, para calcular el volumen del poliedro resultante, al volumen de cubo, 10^3, se le resta el volumen de las ocho esquinas cortadas:

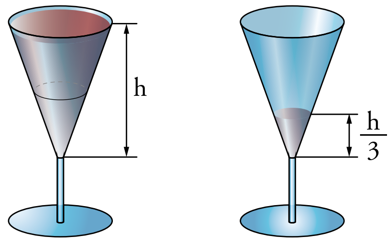
$$V = 10^3 - \left(\frac{5\cdot 5}{2}\cdot 5\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 8 = 833\ \text{cm}^3$$

38 ***En la ilustración aparecen dos depósitos cilíndricos. Calcular cuántas veces hay que llenar el pequeño y verterlo sobre el grande para que se llene.***



Problema resuelto.

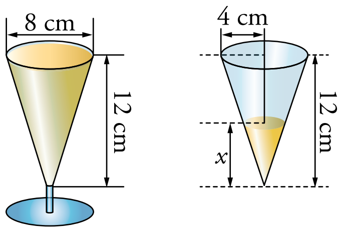
39 **Ana ha pedido un batido de fresa que le sirven en una copa como la que ves en la ilustración. Tras beber varios sorbos, comprueba que el nivel ha bajado a la tercera parte. ¿Qué fracción del batido le queda?**



Razón de semejanza = $\dfrac{\frac{h}{3}}{L} = \dfrac{1}{3} \rightarrow$ Razón de sus volúmenes = $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$

Le queda $\dfrac{1}{27}$ del batido.

40 **Un vaso cónico, de 8 cm de diámetro en la parte más ancha y 12 cm de altura, contenía zumo y se ha vaciado quedando un octavo de su volumen. ¿Qué altura alcanza el líquido que queda?**

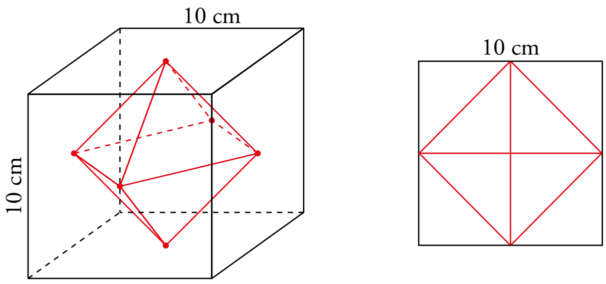


Como la razón de los volúmenes es $\dfrac{1}{8}$ podemos afirmar que la razón de las alturas es $\dfrac{1}{2}$, ya que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$. Por tanto, la altura de lo que queda es la mitad.

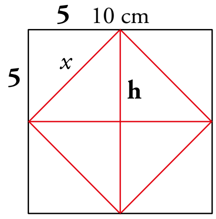
El líquido que queda alcanza los 6 cm de altura.

Página 283

41 **Calcula el volumen del octaedro regular cuyos vértices coinciden con los centros de las caras de un cubo de 10 cm de arista.**



$$x = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7{,}07$$



Calculamos el volumen del octaedro a partir de las dos pirámides que lo conforman.

$$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{h} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} \cdot \text{h} = 2 \cdot \frac{50}{3} \cdot 5 = 166{,}\widehat{6}\ \text{cm}^3$$

42 **Al posar sobre el agua de un barreño una pelota de 24 cm de diámetro, comprobamos que se hunde 4 cm. ¿Qué porcentaje del volumen de la pelota queda sumergido bajo la superficie del agua del barreño?**

$$V_{\text{PELOTA}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 = 7\,234{,}56\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}}$$

$$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot R^2 \cdot \text{h} = \pi \cdot 12^2 \cdot 4 \approx 1\,808{,}64\ \text{m}^3$$

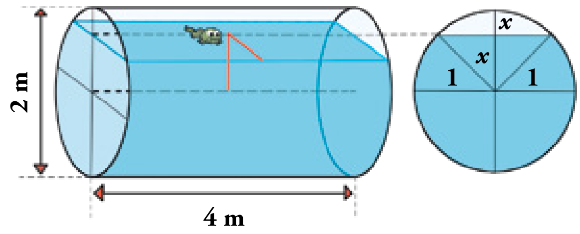
$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^3 \approx 1\,272{,}9\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = 1\,808{,}64 - 1\,272{,}9 \approx 535{,}74\ \text{cm}^3$$

$$\frac{535{,}74\ \text{cm}^3}{7\,238{,}23\ \text{cm}^3} \approx 7{,}4\,\%$$

Queda sumergido el 7,4 % de la pelota.

43 **En la cisterna de la ilustración, el renacuajo intruso debería bucear la misma distancia (x) para llegar al eje de la cisterna, que para alcanzar, nadando, una de sus paredes. ¿Cuántos litros de agua contiene?**



$1^2 = x^2 + x^2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$ m

Por tanto, la altura del trozo sin agua es 2 – 1,7 = 0,3 m.

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 1^2 \cdot 4 = 4\pi \approx 12{,}6\ \text{m}^3$

Si le restamos el volumen de un ortoedro de base cuadrada de lado $2x$, y altura la misma del cilindro, obtendremos 4 veces el volumen que queda sin agua. Así:

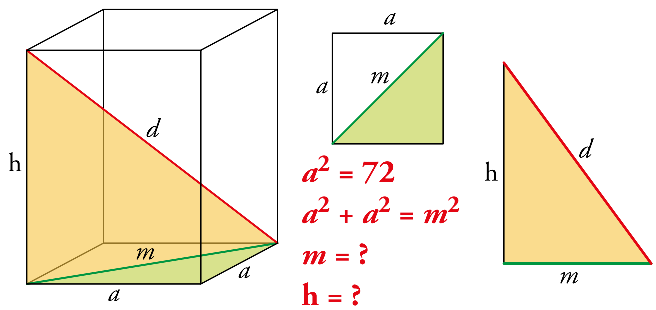
$V_{\text{ORTOEDRO}} = 1{,}4^2 \cdot 4 = 7{,}84\ \text{m}^3$

$V_{\text{SIN AGUA}} = \dfrac{1}{4} \cdot (V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{ORTOEDRO}}) = \dfrac{1}{4}(12{,}6 - 7{,}84) = 1{,}19\ \text{m}^3$

$V_{\text{AGUA}} = 12{,}6 - 1{,}19 = 11{,}41\ \text{m}^3 = 11\,410$ L

Contiene 11 420 L de agua.

44 **La diagonal de un ortoedro mide 20 dm y su base es un cuadrado con una superficie de 72 cm². Calcula el volumen del ortoedro.**



$a^2 = 72 \;\rightarrow\; a \approx 8{,}5$ cm

$a^2 + a^2 = m^2 \;\rightarrow\; m = 12$ cm

Tomamos d en centímetros, $d = 200$ cm, y calculamos:

$\text{h}^2 + m^2 = d^2 \;\rightarrow\; \text{h} = \sqrt{40\,000 - 144} = 199{,}6$ cm

$V = a^2 \cdot \text{h} = 72 \cdot 199{,}6 = 14\,374{,}1\ \text{cm}^3$

45 **Queremos construir una pared de 7,5 m por 5,6 m y un grosor de 30 cm. ¿Cuántos ladrillos de 15 cm × 10 cm × 6 cm se necesitarán si el cemento ocupa un 15 % del volumen?**

$V_{\text{PARED}} = 7{,}5 \cdot 5{,}6 \cdot 0{,}3 = 12{,}6\ \text{m}^3$

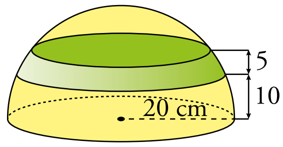
$V_{\text{LADRILLO}} = 15 \cdot 10 \cdot 6 = 900\ \text{cm}^3 = 0{,}0009\ \text{m}^3$

Le quitamos a la pared el volumen que ocupa el cemento antes de calcular los ladrillos que necesitaremos. Los ladrillos ocupan el 85 % de la pared:

$\dfrac{0{,}85 \cdot 12{,}6}{0{,}0009} = 11\,900$ ladrillos

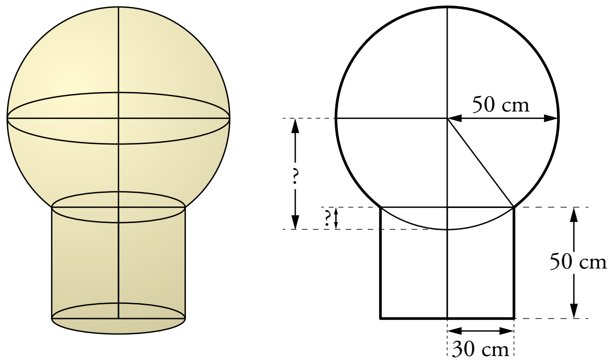
Se necesitan 11 900 ladrillos.

46 **Calcula el volumen de esta zona esférica:**



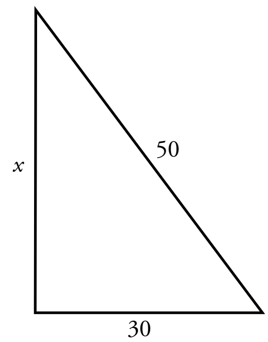
$V_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \pi \cdot 20^2 \cdot 5 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (15^3 - 10^3) \approx 3\,794{,}17 \text{ cm}^3$

47 **Calcula el volumen del cuerpo representado en la figura.**



Calculamos primero el volumen de la esfera quitando el casquete inferior:

$V_{\text{ESFERA}} = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 50^3 \approx 523\,333 \text{ cm}^3$



$x = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40 \longrightarrow$ La altura del casquete es de $50 - 40 = 10$ cm.

$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}}$

$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot 50^2 \cdot 10 \approx 78\,500 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 50^3 - \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40^3 \approx 63\,846{,}6 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} \approx 14\,653{,}4 \text{ cm}^3$

$V_{\text{ESFERA}} - V_{\text{CASQUETE INFERIOR}} = 523\,333 - 14\,653{,}4 = 508\,679{,}6 \text{ cm}^3$

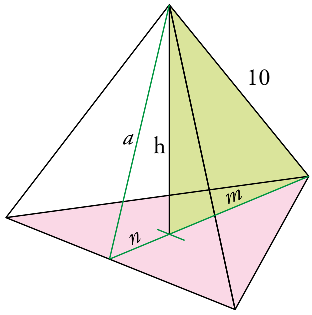
Calculamos ahora el volumen del cilindro sobre el que se adosa la esfera:

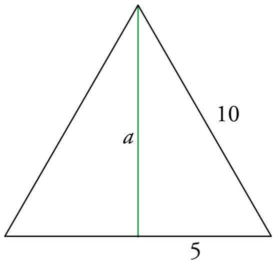
$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 30^2 \cdot 50 = 141\,300 \text{ cm}^3$

$V_{\text{CUERPO RESULTANTE}} = 508\,679{,}6 + 141\,300 = 649\,979{,}6 \text{ cm}^3$

INTERPRETA, DESCRIBE, EXPRÉSATE

48 **Explica, paso a paso, el proceso que se expone a continuación para calcular el volumen de un tetraedro regular de 10 cm de arista.**





- **Calculamos** $a = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8{,}7$ **cm**
- **Calculamos el área de la base:**

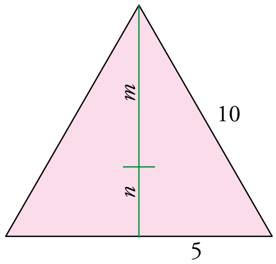
  $A_{BASE} = \dfrac{10 \cdot a}{2} = \dfrac{10 \cdot 8{,}7}{2} = 43{,}5 \text{ cm}^2$

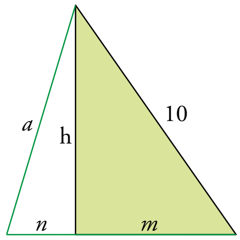
- **Calculamos** m **y h:**

  $a = m + n$

  $m = \dfrac{2}{3} \cdot a = \dfrac{2}{3} \cdot 8{,}7 = 5{,}8 \text{ cm}$

  $\text{h} = \sqrt{10^2 - m^2} = \sqrt{10^2 - 5{,}8^2} \approx 8{,}1 \text{ cm}$





- **Calculamos el volumen del tetraedro:**

  $V_{TETRAEDRO} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{BASE} \cdot \text{h} = \dfrac{1}{3} \cdot 43{,}5 \cdot 8{,}1 = 117{,}45 \text{ cm}^3$

- Todas las caras son triángulos equiláteros.
- Primero calculamos *a*, que es la apotema de la pirámide y, a la vez, la altura y una de las medianas de la base.
- Calculamos la superficie de la base, S_{BASE}, sabiendo que es un triángulo equilátero de lado 10 cm y altura *a*.
- El vértice de la pirámide se proyecta sobre el punto *O*, centro de la base, a la vez baricentro, incentro, circuncentro y ortocentro de esta. Y divide a la mediana, *a*, en dos segmentos, *m* y *n*, de longitudes $m = 2a/3$ y $n = a/3$ (propiedad de las medianas).
- La altura de la pirámide, h, el segmento *m* y la arista lateral correspondiente forman un triángulo equilátero. Conocidas la hipotenusa, 10 cm, y uno de los catetos, *m*, calculamos h.
- Sabiendo la superficie de la base de la pirámide, S_{BASE}, y la altura, h, calculamos el volumen de esta.

TALLER DE MATEMÁTICAS

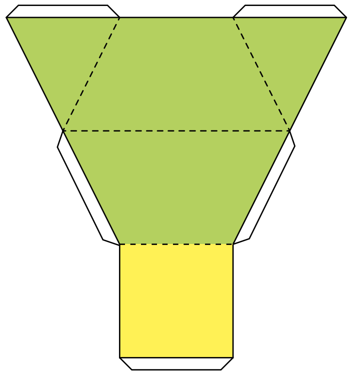
Página 284

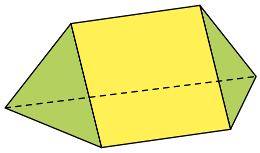
IMAGINA, EXPERIMENTA Y MANIPULA

¿Un poliedro regular?

Calca y amplía esta figura. Dóblala por las líneas de trazos, pega por las solapas y habrás construido un poliedro.

Construye otro igual y busca la forma de juntar ambas piezas para conseguir un poliedro regular. ¿Cuál de ellos será?





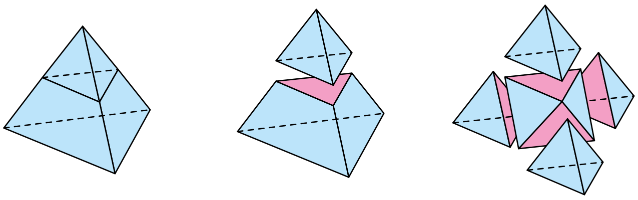
La ilustración muestra un poliedro de cinco caras que coincide exactamente con la mitad de un tetraedro regular.

Uniendo las caras amarillas de las dos figuras iguales, de forma que las aristas más largas se crucen perpendicularmente, se consigue el tetraedro.

ÉCHALE INGENIO

- **El volumen de un tetraedro regular es 80 cm^3. ¿Cuál es el volumen del poliedro que queda tras cortarle las cuatro esquinas?**

  ¿Puedes resolverlo de cabeza? Explica cómo.



- Cada una de las esquinas cortada es un tetraedro regular de arista mitad de la arista del tetraedro original. Por tanto, ambas figuras son semejantes y la razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.

  La razón de los volúmenes es $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

  El volumen de cada esquina es 80 : 8 = 10 cm^3.

  El volumen del octaedro restante es 80 – 10 · 4 = 40 cm^3.

AUTOEVALUACIÓN

1 Transforma en metros cúbicos estas cantidades:

a) 450 dam^3 **b)** $1{,}2 \text{ dam}^3\ 1\,253 \text{ dm}^3$

c) $0{,}11 \text{ km}^3$ **d)** $35\,840 \text{ dm}^3$

e) 500 hL **f)** 30 000 L

a) $450\,000 \text{ m}^3$

b) $1\,200 + 1{,}253 = 1\,201{,}253 \text{ m}^3$

c) $110\,000\,000 \text{ m}^3$

d) $35{,}84 \text{ m}^3$

e) 50 m^3

f) 30 m^3

2 Expresa en litros.

a) $3{,}25 \text{ m}^3$ **b)** $0{,}1 \text{ dam}^3$

c) $0{,}0025 \text{ hm}^3$ **d)** $24{,}5 \text{ dm}^3$

e) 250 cm^3 **f)** $500\,000 \text{ mm}^3$

a) 3 250 L

b) 100 000 L

c) 2 500 000 L

d) 24,5 L

e) 0,25 L

f) 0,5 L

3 Expresa en forma compleja.

a) $75\,427\,038 \text{ m}^3$ **b)** $32{,}14962 \text{ dm}^3$

c) $0{,}0000084 \text{ km}^3$ **d)** $832\,000 \text{ dam}^3$

a) $75 \text{ hm}^3\ 427 \text{ dam}^3\ 38 \text{ m}^3$

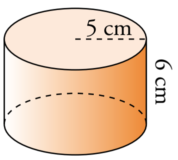
b) $32 \text{ dm}^3\ 149 \text{ cm}^3\ 620 \text{ mm}^3$

c) $8 \text{ dam}^3\ 400 \text{ m}^3$

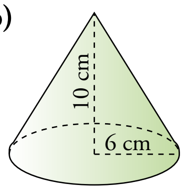
d) 832 hm^3

4 Halla el volumen de estos cuerpos de revolución.

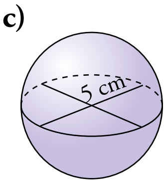
a)



b)



c)



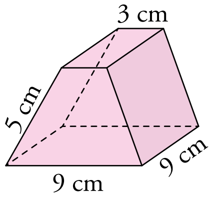
a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 471 \text{ cm}^3$

b) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 10 = 376{,}8 \text{ cm}^3$

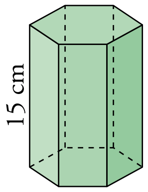
c) $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = 523{,}3 \text{ cm}^3$

5 **Calcula el volumen de estos poliedros.**

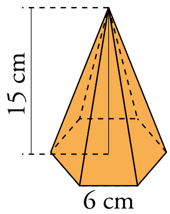
a)



b)



c)



a) $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm

$$V = \frac{3+9}{2} \cdot 4 \cdot 9 = 216 \text{ cm}^3$$

b) $6^2 = 3^2 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{36-9} \approx 5{,}2$ cm

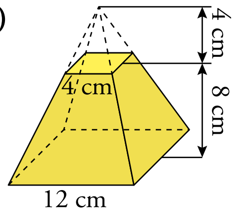
$$V = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} \cdot 15 = 1\,404 \text{ cm}^3$$

c) $6^2 = 3^2 + a^2 \rightarrow a = \sqrt{36-9} \approx 5{,}2$ cm

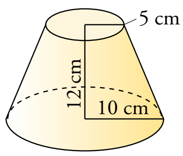
$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} \cdot 15 = 468 \text{ cm}^3$$

6 **Halla el volumen del tronco de pirámide y del tronco de cono.**

a)



b)



a) $V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 12 = 576 \text{ cm}^3$

$$V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = 21{,}\widehat{3} \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 576 - 21{,}\widehat{3} \approx 555 \text{ cm}^3$$

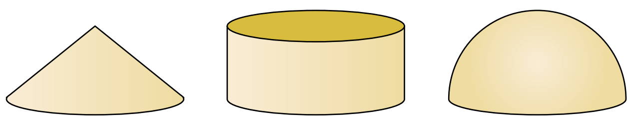
b) $\frac{x+12}{10} = \frac{x}{5} \rightarrow x = 12$

La altura del cono grande es 24 cm, y la del cono pequeño, 12 cm.

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO GRANDE}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 24 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 2\,512 - 314 = 2\,198 \text{ cm}^3$$

7 **Aquí tienes tres de los quesos que ha hecho Martina con la leche de su granja. Los tres se apoyan en bases idénticas y tienen la misma altura.**



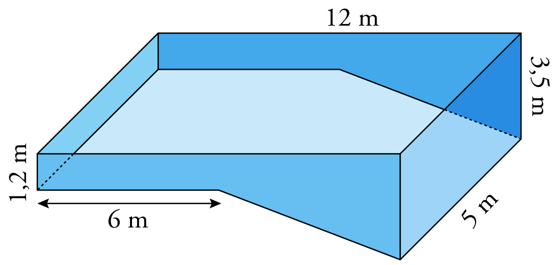
0,5 kg **1,5 kg** **¿? kg**

¿Cuánto pesará el tercero?

$V_{\text{CILINDRO}} - V_{\text{CONO}} = V_{\text{CASQUETE}} \rightarrow 1{,}5 - 0{,}5 = 1$

Pesará 1 kg.

8 **La cubeta de una piscina tiene la siguiente forma:**



¿Cuál es su capacidad?

$V = 6 \cdot 5 \cdot 1{,}2 + \dfrac{3{,}5 + 1{,}2}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 36 + 70{,}5 = 106{,}5 \text{ m}^3 = 106\,500 \text{ L}$

9 **La piscina del ejercicio anterior se empieza a llenar con un grifo que vierte 120 litros por minuto. Al cabo de 9 horas, se cierra. ¿A qué distancia del borde quedará el agua?**

$120 \cdot 60 \cdot 9 = 64\,800$ L ha vertido el grifo durante las horas que ha estado abierto.

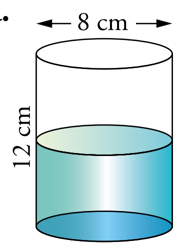
$V_{\text{PARTE HONDA}} = \dfrac{6 \cdot (3{,}5 - 1{,}2) \cdot 5}{2} = 34{,}5 \text{ m}^3 = 34\,500 \text{ L}$

Con el agua que queda, que son $64\,800 - 34\,500 = 30\,300 \text{ L} = 30{,}3 \text{ m}^3$ llegará el agua hasta:

$30{,}3 = 12 \cdot 5 \cdot x \rightarrow x = 0{,}505$

Por lo que el agua queda a $1{,}2 - 0{,}505 = 0{,}695$ m del borde.

10 **El interior de este vaso mide 8 cm de diámetro y 12 cm de altura. Está medio lleno de agua.**
Se echan dentro 20 canicas de 3 cm de diámetro.
a) ¿Se derramará el agua? Si no, ¿a qué altura llegará?
b) ¿Y si echamos 22 canicas?



a) Volumen de las 20 canicas: $V = 20 \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^3 \approx 282{,}6 \text{ cm}^3$

Volumen que ocupa el agua: $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 \approx 301{,}44 \text{ cm}^3$

Volumen del vaso sin agua: $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 12 \approx 602{,}88 \text{ cm}^3$

Restamos al volumen del vaso el que ocupa el agua y las canicas:

$602{,}88 - 301{,}44 - 282{,}6 = 18{,}84 \text{ cm}^3$

El agua no se derramará, porque al introducir las canicas quedan todavía por llenar $18{,}84 \text{ cm}^3$.

Calculamos ahora qué altura alcanzará el agua:

$584{,}04 = \pi \cdot 4^2 \cdot a \rightarrow a = \dfrac{584{,}04}{\pi \cdot 4^2} = 11{,}625 \text{ cm}$

Una vez las canicas estén dentro, el agua subirá hasta 11,625 cm.

b) Volumen de las 22 canicas: $V = 22 \cdot \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^3 \approx 310{,}86 \text{ cm}^3$

El volumen del agua y de las canicas sería de $301{,}44 + 310{,}86 = 612{,}3 \text{ cm}^3$, por lo que se derramaría el agua.