

# 4

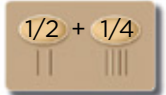
## Operaciones con fracciones



El origen de las fracciones es muy antiguo: babilonios, egipcios, griegos, chinos e indios las manejaban hace miles de años.

Los egipcios usaban, exclusivamente, fracciones unitarias (con numerador uno).

$3/4 \rightarrow$



Las fracciones de los babilonios eran sexagesimales, solo utilizaban como denominadores el número 60 y sus potencias.

Por ejemplo: para  $3/4$  ponían  $45/60$ .

$3765 \rightarrow$   $60^2$   $60$   $1$   $1/60$

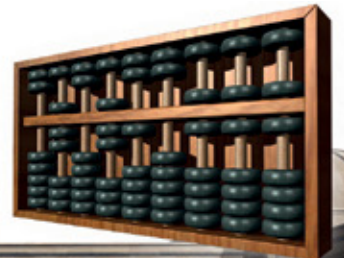
$3765 \rightarrow$




$3/4 \rightarrow$

Los chinos, sin embargo, ya en el siglo IV manejaban con toda destreza las fracciones ordinarias.

Y cosa curiosa: llamaban *hijo* al numerador y *madre* al denominador.



Los árabes, en su época de expansión y esplendor, también tuvieron grandes matemáticos en cuyos tratados aparecen las fracciones. De hecho, el nombre de fracción viene de la traducción de la palabra árabe *al-kasr*, que significa *quebrar*, *romper* (la unidad), y se tradujo al latín por *fractio*. 

Nombre y apellidos: ..... Fecha: .....

# 1 Suma y resta de fracciones

## Recuerda

$$\left. \begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 8 = 2^3 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{Mín.c.m. } (6, 8, 12) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

## En la web

Practica la suma y la resta de fracciones.

## Fracciones opuestas

• Dos **fracciones** son **opuestas** cuando su suma es cero.

• Toda fracción  $\frac{a}{b}$  tiene una opuesta,

$\frac{-a}{b}$  (o bien  $\frac{a}{-b}$ ):

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$$

EJEMPLO

$$\frac{3}{5} \rightarrow \text{Formas de la opuesta } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{-5} \end{array} \right.$$

## En la web

Practica la suma y la resta de fracciones con paréntesis.

• Para sumar o restar fracciones, las reducimos previamente a común denominador.

• Si alguno de los sumandos es un número entero,  $a$ , lo transformamos en una fracción con denominador la unidad  $\left(a = \frac{a}{1}\right)$ .

## Ejemplo

$$1 - \frac{5}{6} + \frac{3}{8} - \frac{5}{12} \rightarrow \text{mín.c.m. } (6, 8, 12) = 24$$

$$24 : 1 = 24$$

$$24 : 6 = 4$$

$$24 : 8 = 3$$

$$24 : 12 = 2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} - \frac{5}{6} + \frac{3}{8} - \frac{5}{12} &= \frac{1 \cdot 24}{24} - \frac{5 \cdot 4}{24} + \frac{3 \cdot 3}{24} - \frac{5 \cdot 2}{24} = \\ &= \frac{24 - 20 + 9 - 10}{24} = \frac{33 - 30}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

## Sumas, restas y paréntesis

El manejo de los paréntesis en las sumas y las restas de fracciones sigue las mismas reglas que en los números enteros.

• Si se suprime un paréntesis precedido del signo más, los signos interiores no varían:

$$+\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n}$$

• Si se suprime un paréntesis precedido del signo menos, los signos interiores se transforman; más en menos y menos es más:

$$-\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{m}{n}\right) = -\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{m}{n}$$

## Ejemplos

• Resolución suprimiendo previamente los paréntesis:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{13}{12} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) &= \frac{2}{1} - \frac{4}{3} - \frac{13}{12} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \\ &= \frac{24}{12} - \frac{16}{12} - \frac{13}{12} + \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{33 - 31}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

• Resolución operando dentro de los paréntesis:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{13}{12} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) &= \left(\frac{6}{3} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{13}{12} - \frac{9}{12} + \frac{2}{12}\right) = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{15 - 9}{12} = \frac{2}{3} - \frac{6}{12} = \frac{8}{12} - \frac{6}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

## Piensa y practica

1. Escribe la fracción opuesta de:

a)  $\frac{5}{3}$       b)  $-\frac{2}{3}$       c)  $\frac{4}{-5}$

2. Copia y completa en tu cuaderno.

a)  $\frac{2}{7} - \frac{2}{\square} = 0$       b)  $\frac{3}{4} + \frac{\square}{4} = 0$

c)  $\frac{1}{6} + \frac{1}{\square} = 0$       d)  $\frac{5}{8} - \frac{-5}{\square} = 0$

3. Calcula mentalmente.

a)  $1 + \frac{1}{2}$       b)  $1 - \frac{1}{2}$       c)  $2 + \frac{1}{2}$

d)  $1 + \frac{1}{3}$       e)  $1 - \frac{1}{3}$       f)  $2 + \frac{1}{3}$

g)  $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$       h)  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$       i)  $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$

4. Calcula.

a)  $1 - \frac{3}{7}$       b)  $2 - \frac{5}{4}$       c)  $\frac{17}{5} - 3$       d)  $\frac{13}{15} - 1$

5. Opera.

a)  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$       b)  $\frac{3}{5} - \frac{1}{4}$       c)  $\frac{5}{6} - \frac{5}{9}$

d)  $\frac{1}{4} + \frac{5}{16}$       e)  $\frac{3}{11} - \frac{1}{2}$       f)  $\frac{9}{14} + \frac{1}{4}$

6. Opera y simplifica.

a)  $\frac{7}{6} + \frac{7}{12}$       b)  $\frac{1}{5} + \frac{3}{10}$       c)  $\frac{2}{7} - \frac{11}{14}$

d)  $\frac{1}{6} - \frac{1}{14}$       e)  $\frac{7}{15} - \frac{3}{10}$       f)  $\frac{7}{20} - \frac{4}{15}$

7. Calcula, reduciendo al común denominador que se indica.

a)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \rightarrow$  Denominador común: 30

b)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \rightarrow$  Denominador común: 8

c)  $\frac{5}{6} - \frac{3}{9} - \frac{3}{4} \rightarrow$  Denominador común: 36

d)  $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \rightarrow$  Denominador común: 6

e)  $\frac{7}{9} - \frac{4}{15} - \frac{1}{5} \rightarrow$  Denominador común: 45

8. Calcula.

a)  $\frac{5}{8} - \frac{7}{12} + \frac{1}{4}$

b)  $\frac{3}{10} + \frac{4}{5} - \frac{3}{4}$

c)  $1 - \frac{6}{7} + \frac{5}{11}$

d)  $\frac{9}{5} + \frac{6}{7} - 2$

9. Calcula y simplifica los resultados.

a)  $\frac{4}{9} + \frac{5}{6} - \frac{7}{18}$

b)  $\frac{3}{7} - \frac{2}{5} + \frac{27}{35}$

c)  $\frac{5}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{5}$

d)  $\frac{13}{12} - \frac{5}{8} - \frac{5}{6}$

10. Opera y compara los resultados.

a)  $2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

b)  $2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$

c)  $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10}$

d)  $\frac{3}{5} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right)$

11. Quita paréntesis y calcula.

a)  $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)$

b)  $\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)$

c)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$

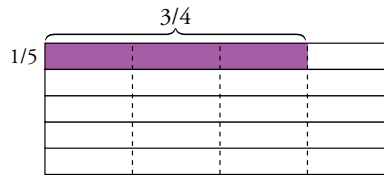
d)  $\left(1 - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{9}{14} - \frac{1}{2}\right)$

### Multiplicación

Observa e interpreta los siguientes gráficos:



$$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$



$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

### Fracciones inversas

- Dos **fracciones** son **inversas** cuando su producto es la unidad.
- Toda fracción distinta de cero tiene inversa:

Inversa de  $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{b}{a}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$$

La forma de llegar a los mismos resultados, sin ayuda de los gráficos, sería:

$$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

### Para multiplicar fracciones:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \leftrightarrow \text{Se multiplican los numeradores.}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \leftrightarrow \text{Se multiplican los denominadores.}$$

### Recuerda

#### PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES

- Primero, los paréntesis.
- Después, las multiplicaciones y las divisiones.
- Por último, las sumas y las restas.

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{15}{48} = \frac{9}{16}$$

### División

Recuerda las relaciones entre la multiplicación y la división de enteros.

$$8 \cdot 5 = 40 \rightarrow \begin{cases} 40 : 8 = 5 \\ 40 : 5 = 8 \end{cases}$$

Estas relaciones se han de mantener con las fracciones.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \rightarrow \begin{cases} \frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \\ \frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

En la práctica, para obtener esos resultados al dividir dos fracciones, se multiplica la primera por la inversa de la segunda o, lo que es lo mismo, se multiplican los términos cruzados.

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

#### Para dividir dos fracciones:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \leftrightarrow \text{Se multiplican los términos cruzados.}$$

#### Ejemplos

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{5} : 6 = \frac{2}{5} : \frac{6}{1} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

#### Piensa y practica

##### 1. Multiplica.

a)  $2 \cdot \frac{1}{3}$       b)  $\frac{3}{4} \cdot 5$       c)  $(-7) \cdot \frac{2}{5}$

d)  $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{3}$       e)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{(-2)}{7}$       f)  $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{2}$

##### 2. Multiplica y reduce como en el ejemplo.

•  $\frac{2}{5} \cdot 10 = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{1} = \frac{20}{5} = 4$

a)  $\frac{1}{3} \cdot 6$       b)  $\frac{2}{(-3)} \cdot 12$       c)  $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot 7$

d)  $\frac{3}{4} \cdot 8$       e)  $\frac{5}{3} \cdot (-12)$       f)  $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-18)$

##### 3. Multiplica y obtén la fracción irreducible.

a)  $\frac{2}{9} \cdot \frac{9}{2}$       b)  $\frac{(-3)}{5} \cdot \frac{(-5)}{3}$       c)  $\frac{13}{21} \cdot \frac{7}{13}$

d)  $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2}$       e)  $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)$       f)  $\left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{18}{35}\right)$

##### 4. Divide estas fracciones:

a)  $4 : \frac{1}{3}$       b)  $\frac{3}{5} : 2$       c)  $\frac{3}{5} : \frac{8}{7}$

d)  $\frac{1}{3} : 4$       e)  $2 : \frac{3}{5}$       f)  $\frac{8}{7} : \frac{3}{5}$

##### 5. Ejercicio resuelto

a)  $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{9-4}{12} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

b)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{6}{20} - \frac{1}{3} = \frac{3}{10} - \frac{1}{3} = \frac{9-10}{30} = \frac{-1}{30}$

##### 6. Calcula y compara los resultados de cada apartado.

a)  $\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

b)  $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right)$

c)  $\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{5}$

d)  $\frac{15}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)$

##### 7. Opera.

a)  $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) \cdot 20$

b)  $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : 7$

c)  $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$       d)  $\frac{3}{21} : \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{3}\right)$

Se presenta una serie de problemas tipo, resueltos, cuya comprensión te facilitará el camino para resolver, por analogía, muchas situaciones con fracciones.

### Fracción de una cantidad

#### PROBLEMA 1: CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

La empresa municipal de alquiler de bicicletas dispone de un total de 1155 unidades, de las que 330 están en reparación o reserva, y el resto, en funcionamiento. ¿Qué fracción de las bicicletas está en funcionamiento?



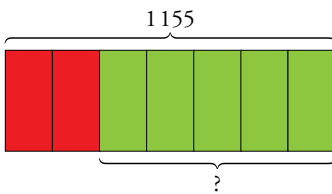
$$\text{Fuera de servicio} \longrightarrow \frac{330}{1155} \xrightarrow{\div 3} \frac{110}{385} \xrightarrow{\div 5} \frac{22}{77} \xrightarrow{\div 11} \frac{2}{7}$$

$$\text{En funcionamiento} \longrightarrow \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

**Solución:** Están en funcionamiento  $\frac{5}{7}$  de las bicicletas.

#### PROBLEMA 2: CÁLCULO DE LA PARTE (PROBLEMA DIRECTO)

La empresa municipal de alquiler de bicicletas dispone de un total de 1155 unidades, de las que  $\frac{2}{7}$  están, en reparación o reserva, fuera de servicio. ¿Cuántas bicicletas hay en funcionamiento?



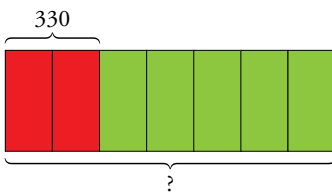
$$\text{Fuera de servicio} \longrightarrow \frac{2}{7} \text{ de } 1155 = \frac{1155 \cdot 2}{7} = 330$$

$$\text{En funcionamiento} \longrightarrow 1155 - 330 = 825$$

**Solución:** Hay 825 bicicletas en funcionamiento.

#### PROBLEMA 3: CÁLCULO DEL TOTAL (PROBLEMA INVERSO)

La empresa municipal de alquiler de bicicletas tiene 330 unidades fuera de servicio, en reparación o reserva, lo que supone  $\frac{2}{7}$  del total. ¿De cuántas bicicletas dispone la empresa?



$$\frac{2}{7} \text{ del total} \longrightarrow 330$$

$$\frac{1}{7} \text{ del total} \longrightarrow 330 : 2 = 165$$

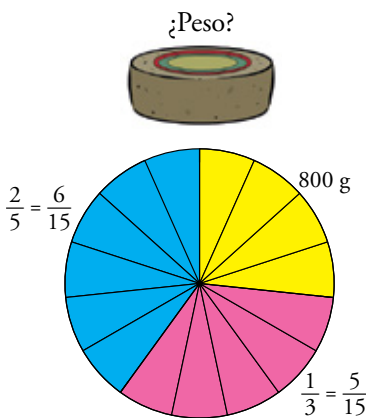
$$\frac{7}{7}, \text{ es decir, el total} \longrightarrow 165 \cdot 7 = 1155$$

**Solución:** La empresa dispone de 1155 bicicletas.

### Suma y resta de fracciones

#### PROBLEMA 4: CÁLCULO DEL TOTAL (PROBLEMA INVERSO)

Adela compra un queso y regala dos quintos a su hermana y un tercio a su vecina. Si el trozo que le queda pesa 800 gramos, ¿cuánto pesaba el queso completo?



$$\text{Regala} \longrightarrow \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\text{Le quedan} \longrightarrow \frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{15} \text{ del queso} \longrightarrow 800 \text{ g}$$

$$\frac{1}{15} \text{ del queso} \longrightarrow 800 : 4 = 200 \text{ g}$$

$$\frac{15}{15}, \text{ es decir, el queso completo} \longrightarrow 200 \cdot 15 = 3000 \text{ g} = 3 \text{ kg}$$

**Solución:** El queso completo pesaba 3 kg.



## Multiplicación y división de fracciones



### PROBLEMA 5: PRODUCTO

Cada cápsula de cierto medicamento lleva  $\frac{3}{20}$  de gramo del principio activo. ¿Cuántos gramos de principio activo hay en un bote de 30 cápsulas?

$$\frac{3}{20} \cdot 30 = \frac{3 \cdot 30}{20} = \frac{90}{20} = \frac{9}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

*Solución:* En un bote de 30 cápsulas hay cuatro gramos y medio de principio activo.

### PROBLEMA 6: COCIENTE

Cada cápsula de cierto medicamento lleva  $\frac{3}{20}$  de gramo del principio activo. ¿Cuántas cápsulas hay en un bote que contiene en total cuatro gramos y medio de principio activo?

$$\text{Cuatro gramos y medio} \longrightarrow 4 + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

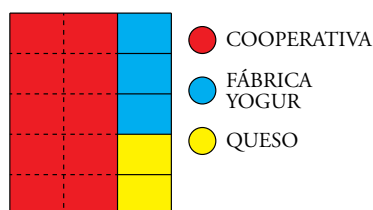
$$\text{Número de cápsulas} \longrightarrow \frac{9}{2} : \frac{3}{20} = \frac{9 \cdot 20}{2 \cdot 3} = \frac{180}{6} = 30$$

*Solución:* En un bote con cuatro gramos y medio de principio activo hay 30 cápsulas.

## Fracción de otra fracción

### PROBLEMA 7: CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

Un granjero entregó el mes pasado  $\frac{2}{3}$  de su producción de leche a la cooperativa ganadera y vendió  $\frac{3}{5}$  del resto a la fábrica de yogur. Con lo que le quedó, hizo queso. ¿Qué fracción de la leche destinó a la producción de queso?



$$\text{En la cooperativa} \begin{cases} \text{Entrega } \frac{2}{3} \\ \text{Queda } \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{En la fábrica de yogur} \begin{cases} \text{Entrega } \frac{3}{5} \text{ de } \frac{1}{3} \\ \text{Queda } \frac{2}{5} \text{ de } \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

*Solución:* El granjero destinó  $\frac{2}{15}$  de la leche a la producción de queso.

#### Ten en cuenta

La fracción de otra fracción es igual al producto de ambas fracciones.

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$



■ PROBLEMA 8: CÁLCULO DE LA PARTE (PROBLEMA DIRECTO)

Un ganadero obtuvo el mes pasado 90 000 litros de leche. Entregó  $\frac{2}{3}$  a la cooperativa ganadera y  $\frac{3}{5}$  del resto a la fábrica de yogur. Con lo que le quedó, hizo queso. ¿Cuántos litros destinó a la producción de queso?

	ENTREGA	QUEDA
A LA COOPERATIVA	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A LA FÁBRICA DE YOGUR	$\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

$$\begin{aligned} \text{Quedan } \frac{2}{15} \text{ de } 90\,000 \text{ litros} &= \\ &= \frac{2 \cdot 90\,000}{15} = 12\,000 \text{ litros} \end{aligned}$$

Solución: El granjero destinó 12 000 litros de leche a la producción de queso.

Piensa y practica

- Roberto ha necesitado 100 pasos para avanzar 80 metros. ¿Qué fracción de metro recorre en cada paso?
- Un colegio tiene matriculados 837 alumnos de los cuales 186 están en primer ciclo de ESO. ¿Qué fracción de alumnos matriculados cursa primer ciclo de ESO?
- Un colegio tiene matriculados 837 alumnos de los cuales  $\frac{2}{9}$  están en primer ciclo de ESO. ¿Cuántos alumnos tiene en primer ciclo de ESO?
- Una familia dedica dos tercios de sus ingresos a cubrir gastos de funcionamiento, ahorra la cuarta parte del total y gasta el resto en ocio. ¿Qué fracción de los ingresos invierte en ocio?
- En unas instalaciones deportivas,  $\frac{3}{8}$  de los presentes está practicando atletismo;  $\frac{2}{5}$  juega al tenis; una décima parte, al fútbol, y el resto efectúa tareas no deportivas. ¿Qué fracción de personas no está haciendo deporte?
- En un hotel, la mitad de las habitaciones están en el primer piso; la tercera parte, en el segundo piso, y el resto, en el ático, que tiene diez habitaciones. ¿Cuántas habitaciones hay en cada piso?
- Un saltamontes recorre 25 metros en 40 saltos. ¿Qué fracción de metro avanza en cada salto?
- ¿Cuántas botellas de vino de tres cuartos de litro se llenan con un tonel de 1 800 litros?
- Un bote de suavizante tiene un tapón dosificador con una capacidad de  $\frac{3}{40}$  de litro. ¿Cuál es la capacidad del bote sabiendo que llena 30 taponos?
- Un bote de suavizante de dos litros y cuarto proporciona, mediante su tapón dosificador, 30 dosis para lavado automático. ¿Qué fracción de litro contiene cada dosis?
- Un bote de suavizante de dos litros y cuarto lleva un tapón dosificador con una capacidad de  $\frac{3}{40}$  de litro. ¿Cuántas dosis contiene el bote?
- Los  $\frac{3}{4}$  de los empleados de una empresa tienen contrato indefinido;  $\frac{2}{3}$  del resto tienen contrato temporal, y los demás son eventuales. ¿Qué fracción suponen los eventuales?
- Una empresa tiene 60 empleados. Los  $\frac{3}{4}$  tienen contrato indefinido;  $\frac{2}{3}$  del resto tienen contrato temporal, y los demás son eventuales. ¿Cuántos trabajadores eventuales hay en la empresa?
- Un embalse está lleno a principios de verano. En julio pierde  $\frac{3}{7}$  de su contenido, y en agosto,  $\frac{3}{4}$  de lo que le quedaba. ¿Qué fracción conserva aún a principios de septiembre?



En la web  Resuelve problemas con fracciones.



Las propiedades que estudiaste para las potencias de números enteros se conservan con los números fraccionarios. Estas propiedades se traducen en reglas de uso práctico; pero no te limites a memorizarlas, si comprendes su justificación, las usarás con mayor seguridad y eficacia.

## Potencia de una fracción

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$$

### No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Para elevar una fracción a una potencia, se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

## Potencia de un producto de fracciones

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{c^2}{d^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

### No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores.

Por ejemplo:  $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{15}{30}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

## Potencia de un cociente de fracciones

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)^3 = \frac{a^3 \cdot d^3}{b^3 \cdot c^3} = \frac{a^3}{b^3} : \frac{c^3}{d^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{c}{d}\right)^3$$

### No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor.

Por ejemplo:  $\left(\frac{3}{10}\right)^2 : \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{10} : \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{15}{60}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

## Producto de potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^3}{b^3} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^5}{b^5} = \left(\frac{a}{b}\right)^5 \leftarrow (5=3+2)$$

### No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes.

Por ejemplo:  $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3+4} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$

## Cociente de potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^7 : \left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^7}{b^7} : \frac{a^4}{b^4} = \frac{a^7 \cdot b^4}{b^7 \cdot a^4} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \leftarrow (3 = 7 - 4)$$

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

Para dividir dos potencias de la misma base, se restan los exponentes.

**Ejemplo**

$$\left(\frac{3}{5}\right)^8 : \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \left(\frac{3}{5}\right)^{8-6} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

## Potencias de exponente cero ( $a^0$ )

En principio, la expresión  $a^0$  no tendría sentido; pero a esa combinación de signos le vamos a dar un significado dentro del lenguaje matemático:

- El cociente de dos números iguales es igual a la unidad.  $\rightarrow \frac{5^3}{5^3} = 1$
  - Para dividir dos potencias de igual base, restamos los exponentes.  $\rightarrow \frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$
- $$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \frac{5^3}{5^3} = 1 \\ \rightarrow \frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \end{array} \right\} 5^0 = 1$$

Y de la misma forma:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 1 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^{3-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \end{array} \right\} \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

No lo olvides

$$a^0 = 1 \quad \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

La potencia de exponente cero vale siempre uno (para cualquier base distinta de cero).

## Potencia de otra potencia

Siguiendo un razonamiento similar al del apartado anterior:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^3 = \left[\frac{a^2}{b^2}\right]^3 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^6}{b^6} = \left(\frac{a}{b}\right)^6 \leftarrow (6 = 2 \cdot 3)$$

Para elevar una potencia a otra potencia, se multiplican los exponentes.

No lo olvides

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

**Ejemplo**

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^9}$$

## Números y potencias de base 10

Ya conoces la descomposición polinómica de un número entero según las sucesivas potencias de base 10:

$$2458 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Esto nos proporciona un método para expresar con comodidad números de muchas cifras.

### Ejemplos

- Un millón de billones.

$$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$$

- La distancia media de la Tierra al Sol es 149 598 000 km.

$$149\,598\,000 \approx 150\,000\,000 = 150 \cdot 1\,000\,000$$

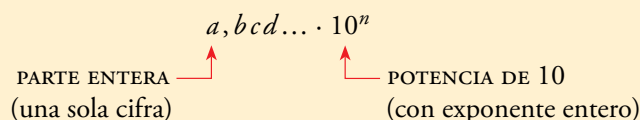
$$\text{Distancia media de la Tierra al Sol} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Esta forma de expresar los números recibe el nombre de **notación científica**.

### Reflexiona

$$52\,463\,000\,000\,000 = 52 \cdot 10^{12}$$

¿Cuál de las dos formas te parece más efectiva?



### Piensa y practica

1. Calcula.

a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$     b)  $\left(\frac{1}{3}\right)^2$     c)  $\left(\frac{1}{5}\right)^4$     d)  $\left(\frac{1}{10}\right)^6$

2. Calcula, como en el ejemplo, por el camino más corto.

•  $\frac{15^4}{5^4} = \left(\frac{15}{5}\right)^4 = 3^4 = 81$

a)  $\frac{12^3}{4^3}$     b)  $\frac{8^5}{4^5}$     c)  $\frac{5^4}{10^4}$   
 d)  $5^2 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^2$     e)  $(-4)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$     f)  $10^2 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^2$

3. Reduce.

a)  $\frac{x^6}{x^2}$     b)  $\frac{z^4}{z^4}$     c)  $\frac{x^7 \cdot x^{10}}{x^{12}}$     d)  $\frac{a^3 \cdot a^7}{a^4 \cdot a^5}$

4. Reduce a una sola potencia.

a)  $x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3$     b)  $\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^3$     c)  $\left(\frac{z}{m}\right)^4 \cdot \frac{z}{m}$

5. Reduce.

a)  $\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot y^4$     b)  $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3$     c)  $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^4$   
 d)  $\left(\frac{x}{y}\right)^3 : x^3$     e)  $\left(\frac{a}{b}\right)^4 : \left(\frac{1}{b}\right)^3$     f)  $\left(\frac{x}{y}\right)^5 : \frac{y}{x}$

6. Calcula.

a)  $2^0$     b)  $5^0$     c)  $10^0$     d)  $(-4)^0$

7. Escribe la descomposición polinómica de:

a) 72,605  
 b) 658,32

8. Expresa con todas sus cifras.

a)  $5 \cdot 10^6$   
 b)  $34 \cdot 10^7$

9. Expresa en notación científica.

Un año luz equivale a 9 460 800 000 000 km.

# Ejercicios y problemas

## Suma y resta de fracciones

1. Calcula mentalmente.

a)  $1 - \frac{1}{10}$       b)  $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$       c)  $1 + \frac{1}{3}$   
d)  $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$       e)  $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$       f)  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

2. Calcula y simplifica.

a)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$       b)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{15}$   
c)  $\frac{1}{6} - \frac{5}{9} + \frac{1}{2}$       d)  $\frac{4}{3} - 2 + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}$

3. Opera.

a)  $2 - \left(1 + \frac{3}{5}\right)$       b)  $\left(1 - \frac{3}{4}\right) - \left(2 - \frac{5}{4}\right)$

## Multiplicación y división de fracciones

4. Calcula y simplifica.

a)  $\frac{3}{7} \cdot 14$       b)  $\frac{2}{5} : 4$       c)  $\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{(-7)}$   
d)  $\frac{3}{11} : \frac{(-5)}{11}$       e)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{20}$       f)  $\frac{4}{15} : \frac{2}{5}$

## Operaciones combinadas

5. Opera y reduce.

a)  $\left(1 - \frac{5}{7}\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{5}\right)$       b)  $\left(1 - \frac{1}{4}\right) : \left(1 + \frac{1}{8}\right)$   
c)  $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right)$       d)  $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)$

## Potencias y fracciones

6. Reduce a una sola potencia.

a)  $a^5 \cdot a^2$       b)  $a^8 : a^5$   
c)  $\frac{a^3 \cdot a^4}{a^5}$       d)  $\frac{a^6}{a \cdot a^3}$

7. Simplifica.

a)  $x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$       b)  $x^3 : \left(\frac{1}{x}\right)^5$       c)  $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot b^4$   
d)  $\left(\frac{a}{b}\right)^3 : a^3$       e)  $(a^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^7$       f)  $\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 : \left(\frac{1}{a^3}\right)^3$

8. Escribe con todas sus cifras estas cantidades:

a)  $37 \cdot 10^7$       b)  $64 \cdot 10^{11}$       c)  $3,5 \cdot 10^{13}$

9. Expresa en forma abreviada como se ha hecho en el ejemplo.

•  $5\,300\,000\,000 = 53 \cdot 10^8$

a) 8 400 000  
b) 61 000 000 000

## Interpreta, describe, exprésate

10. Aquí tienes la resolución que han presentado David y Olga al siguiente problema.

*Una empresa de coches usados recibe un lote de 180 vehículos. El primer mes vende las tres cuartas partes. El siguiente mes coloca la quinta parte del lote. ¿Cuántos coches le quedan aún por vender?*

### Solución de David

•  $3/4$  de 180 =  $(180 : 4) \cdot 3 = 135$   
•  $1/5$  de 180 =  $180 : 5 = 36$   
•  $135 + 36 = 171$   
•  $180 - 171 = 9$

### Solución de Olga

•  $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15 + 4}{20} = \frac{19}{20}$   
•  $\frac{20}{20} - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$   
•  $1/20$  de 180 =  $180 : 20 = 9$

Ambos se han limitado a realizar las operaciones sin explicar el proceso. Hazlo tú, indicando el significado de cada operación y el resultado obtenido en cada caso.

## Resuelve problemas

11. Un pilón de riego con una capacidad de  $2\,800 \text{ m}^3$  guarda en este momento  $1\,600 \text{ m}^3$  de agua. ¿Qué fracción del pilón falta por completar?

12. Una furgoneta de reparto llevaba 36 cajas con 30 botellas de refrescos en cada una. Si se han roto 162 botellas en el trayecto, ¿qué fracción de las botellas se ha roto?

13. Un incendio ha arrasado las tres décimas partes de un monte de 1 700 hectáreas. ¿Cuántas hectáreas se han salvado de la quema?

14. Se ha volcado un palé que tenía 5 cajas con 30 docenas de huevos en cada una y se han estropeado dos quintas partes. ¿Cuántos huevos se han salvado?
15. Por tres cuartos de kilo de cerezas hemos pagado 1,80 €. ¿A cómo sale el kilo?
16. Amelia ha gastado  $\frac{3}{8}$  de sus ahorros en la compra de un teléfono móvil que le ha costado 90 €. ¿Cuánto dinero le queda todavía?
17. La tercera parte de los 240 viajeros que ocupan un avión son europeos y  $\frac{2}{5}$  africanos. El resto son americanos. ¿Cuántos americanos viajan en el avión?
18. Un decorador ha hecho una mezcla de 20 kilos de pintura que lleva dos quintas partes de rojo, tres décimas partes de azul y el resto de amarillo. ¿Cuántos kilos de pintura amarilla llevará la mezcla?
19. Begoña gasta  $\frac{3}{8}$  de sus ahorros en arreglar la moto y  $\frac{3}{10}$  del resto en un concierto. ¿Qué fracción de lo que tenía ahorrado le queda?
20. Una confitería ha recibido un pedido de varias bolsas de caramelos. Dos quintas partes de las bolsas son de naranja, tres décimas partes de limón y el resto de fresa. Si había 6 bolsas de fresa, ¿cuántas bolsas formaban el pedido?
21. Sara avanza 4 metros en 5 pasos. ¿Qué fracción de metro avanza en cada paso? ¿Y en 100 pasos?
22. Un frasco de perfume tiene una capacidad de  $\frac{1}{20}$  de litro. ¿Cuántos frascos se pueden llenar con un bidón que contiene tres litros y medio?
23. ¿Cuántos litros de zumo se necesitan para llenar 200 botellas de  $\frac{3}{8}$  de litro cada una?
24. Una máquina depuradora filtra tres metros cúbicos de agua en cinco horas. ¿Cuántos metros cúbicos de agua filtra en hora y cuarto?
25. Un granjero tiene a finales de mayo unas reservas de 2800 kg de pienso para alimentar a su ganado. En junio gasta  $\frac{3}{7}$  de sus existencias, y en julio,  $\frac{3}{4}$  de lo que le quedaba. ¿Cuántos kilos de pienso tiene a primeros de agosto?
26. Un jardinero poda el lunes  $\frac{2}{7}$  de sus rosales, el martes  $\frac{3}{5}$  del resto y el miércoles finaliza el trabajo podando los 20 que faltaban. ¿Cuántos rosales tiene en total en el jardín?
27. Una empresa de transportes trabaja con camiones de largo recorrido, furgonetas de reparto y motos de mensajería. De cada doce vehículos, siete son furgonetas y tres motos. Si los camiones son ocho, ¿cuántos vehículos tiene la empresa en total?

## Autoevaluación

1. Calcula.

a)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$

b)  $\frac{5}{9} - \frac{7}{12} + \frac{11}{18}$

2. Opera.

a)  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$

b)  $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$

c)  $\frac{2}{3} \cdot 6$

d)  $\frac{2}{3} : 4$

3. Resuelve.

a)  $\frac{2}{\frac{1}{3}}$

b)  $\frac{10}{\frac{3}{6}}$

c)  $\frac{2}{\frac{5}{4}}$

d)  $\frac{1}{\frac{3}{6}} \cdot 5$   
 $\frac{1}{6} \cdot 10$

4. Resuelve.

a)  $\left(1 - \frac{11}{12}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4}\right)$

b)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right)$

5. Calcula.

a)  $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 6^3$

b)  $\left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{3}{5}\right)^3$

6. Escribe con todas sus cifras:  $1,38 \cdot 10^6$

7. Expresa en notación científica: 24700 000 000

8. Un quiosco recibe de madrugada 225 revistas. Vende por la mañana  $\frac{1}{3}$  del total, y, por la tarde,  $\frac{2}{5}$  también del total. ¿Cuántas revistas le quedan al finalizar la jornada?

9. Un señor sale de casa con 60 €. Gasta en un vestido  $\frac{1}{3}$  de su dinero, y, en el mercado,  $\frac{2}{5}$  de lo que le quedaba.

a) ¿Qué fracción de dinero le queda?

b) ¿Cuánto dinero le queda?