

DIVISIBILIDAD

1º ESO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

En esta unidad vas a:

- 1. Comprender el concepto y la utilidad de las potencias**
- 2. Conocer las propiedades de las potencias**
- 3. Realizar operaciones con potencias**
- 4. Identificar múltiplos y divisores de un número**
- 5. Identificar números primos y compuestos**
- 6. Descomponer números en factores primos**
- 7. Calcular el m.c.d. y el m.c.m. de varios números**
- 8. Resolver problemas**

SUMARIO

- 1.0.- Lectura Comprensiva
 - 1.1.- Introducción
 - 1.2.- Potencias
 - 1.3.- Propiedades de las potencias
 - 1.3.1.- Producto y cociente de potencias con la misma base
 - 1.3.2.- Potencias de Exponente 1 y 0
 - 1.3.3.- Potencia de potencia
 - 1.3.4.- Potencia de un producto y de un cociente
 - 1.4.- Divisibilidad de números naturales
 - 1.5.- Múltiplos y Divisores de un número
 - 1.6.- Números Primos y compuestos
 - 1.7.- Descomposición factorial
 - 1.7.1.- Criterios de divisibilidad
 - 1.7.2.- Descomposición en factores primos
 - 1.8.- Máximo Común Divisor y mínimo común múltiplo
 - 1.9.- Resolución de problemas
 - 1.10.- Autoevaluación

1.0.- Lectura comprensiva

El mensaje de la biblioteca de Alejandría

Lina encontró el cofre detrás de una estantería de la biblioteca. Era pequeño, de madera oscura y tenía una inscripción casi borrada: "Para quien sepa escuchar a los números".

Dentro había un pergamino con una sola frase:

Busca las estanterías que tengan número primo. En ellas encontrarás el camino.

Lina miró a su amigo Marcos, que había ido con ella a visitar una exposición sobre la Antigua Grecia.

—¿Número primo? —preguntó Marcos—. ¿Eso no era un número que solo se puede dividir entre uno y él mismo?

—Exacto —respondió Lina—. Por ejemplo, 2, 3, 5, 7, 11...

La biblioteca tenía veinte estanterías numeradas. Decidieron empezar por la estantería 2. Allí encontraron una tablilla de barro con una nueva pista: "No confíes en los números que pueden formar muchos grupos".

—Se refiere a los números compuestos —dijo Marcos—. El 6, por ejemplo, puede organizarse en grupos de 2 o de 3.

Continuaron por las estanterías 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. En cada una había una palabra escrita en griego antiguo. Lina las copió en su cuaderno y trató de ordenarlas. Al final formaban una frase: "La paciencia revela lo invisible".

La última pista estaba en la estantería 19. Allí había una nota firmada por Eratóstenes, el antiguo director de la Biblioteca de Alejandría. La nota decía que, para descubrir los números primos, había que ir tachando los múltiplos de los demás números. Lina recordó que ese método se llamaba la criba de Eratóstenes.

—Entonces, el cofre no guardaba un tesoro de oro —dijo Marcos.

—No —contestó Lina mientras sonreía—. Guardaba una idea.

Al salir de la biblioteca, ambos comprendieron que los números primos no eran simples cifras. Habían ayudado a los matemáticos de la Antigua Grecia a comprender mejor los números y, muchos siglos después, seguían siendo útiles para proteger información en internet.

Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué encontró Lina en la biblioteca?
- b) ¿Qué debía buscar según el primer mensaje?
- c) ¿Qué números visitaron Lina y Marcos?
- d) ¿Por qué el número 6 no es primo?
- e) ¿Qué es la criba de Eratóstenes?
- f) ¿Cuál era el verdadero "tesoro" del cofre?

1.01.- Introducción

Hace más de dos mil años, los matemáticos ya se interesaban por unos números muy especiales: los números primos. Son aquellos que solo pueden dividirse exactamente entre 1 y ellos mismos. Por ejemplo, 2, 3, 5, 7 y 11 son números primos.

Los antiguos griegos fueron de los primeros en estudiarlos de forma organizada. Hacia el año 300 antes de Cristo, el matemático Euclides escribió un libro llamado **Los Elementos**. En él explicó que existen infinitos números primos. Esto significa que, por mucho que busquemos, nunca encontraremos el último número primo: siempre habrá otro mayor.

Euclides también presentó una forma de encontrar números primos llamada la criba de Eratóstenes. Eratóstenes fue otro sabio griego que vivió aproximadamente en la misma época. Su método consiste en escribir los números en orden y eliminar los múltiplos de 2, después los múltiplos de 3, luego los de 5 y así sucesivamente. Los números que quedan sin tachar son primos.

Por ejemplo, si queremos buscar números primos hasta el 20, primero conservamos el 2 y tachamos sus múltiplos: 4, 6, 8, 10... Después conservamos el 3 y tachamos 6, 9, 12, 15... Al final quedan 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.

Durante muchos siglos, los números primos parecían una idea interesante pero poco útil fuera de las matemáticas. Sin embargo, hoy tienen una aplicación muy importante. Se utilizan en la seguridad de internet para ayudar a proteger información: mensajes, contraseñas y compras en línea. Algunos sistemas de cifrado usan operaciones con números primos muy grandes, que son difíciles de descifrar sin la clave adecuada.

Así, una pregunta que comenzó en la Antigua Grecia sigue siendo importante en el siglo XXI. Los números primos nos recuerdan que las ideas matemáticas pueden viajar a través del tiempo y encontrar nuevos usos muchos años después.

1.02.- Potencias

Una **potencia** de un número es una forma abreviada de expresar una multiplicación de un número por sí mismo varias veces, es decir, es una multiplicación de factores iguales.



Exponente: Indica cuántas veces se multiplica la base por sí misma

Base: Indica el número o factor que se debe multiplicar

Potencia: Resultado de la potenciación

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

En una potencia, la **base** representa el factor que se repite, y el **exponente** las veces que se repite el producto.

$$a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{El producto de } a \text{ por sí mismo se repite } c \text{ veces}}$$

Ejemplo

1.- Expresa en forma de potencia: a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$ c) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

En cada uno de los casos, observamos el número que se repite (base) y las veces que se repite (exponente), y lo escribimos en forma de potencia:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{el 2 se repite 5 veces}} = 2^5$$

$$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{el 5 se repite 6 veces}} = 5^6$$

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{el 3 se repite 9 veces}} = 3^9$$

Piensa y practica

1.- Expresa en forma de potencia:

a) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$

b) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 =$

c) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$

2.- Expresa en forma de producto:

a) $2^3 =$

b) $5^5 =$

c) $9^8 =$

1.03.- Propiedades de las Potencias

A la hora de trabajar con potencias, es conveniente aprenderse algunas propiedades que nos van a facilitar su cálculo. Por eso, es conveniente que las memorices y que ensayes su aplicación en diferentes situaciones.

Por definición:

🍏 Una potencia de exponente 0 es igual a la unidad. **Todo número elevado a cero es 1.**

$$a^0 = 1 \quad 2^0 = 1 \quad 7^0 = 1$$

🍏 Una potencia de exponente 1 es igual a la base.

$$a^1 = a \quad 3^1 = 3 \quad 5^1 = 5$$

1.3.1.- Producto de potencias de la misma base

Al multiplicar potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^4} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^{3+4}} = 2^7$$

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

1.3.2.- Cociente de potencias de la misma base

Al dividir potencias de la misma base, se deja la misma base y se restan los exponentes. En este caso, tiene que ocurrir que el primer exponente sea mayor que el segundo, $b > c$.

$$2^6 : 2^4 = \frac{2^6}{2^4} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}^{2^6}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^4}} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^2$$

$$a^b : a^c = \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

Piensa y practica

3.- Expresa estas operaciones como una sola potencia y calcula su valor:

a) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3 =$

b) $2^5 \cdot 2^4 \cdot 2 =$

c) $5^7 : 5^3 =$

d) $3^4 : 3^3 \cdot 3^8 : 3^6 =$

1.3.3.- Potencia de potencia

Al elevar una potencia a otra potencia, se deja la base y se multiplican los exponentes.

$$(2^4)^2 = 2^4 \cdot 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^4} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^4} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^{4+4}=2^{4 \cdot 2}} = 2^{4 \cdot 2} = 2^8$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

1.3.4.- Potencia de un producto y de un cociente

- 🍏 Cuando multiplicamos potencias de distinta base, pero de igual exponente, se multiplican las bases:

$$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = (10)^3 = 10^3 \quad a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

- 🍏 Cuando dividimos potencias de distinta base, pero de igual exponente, se dividen las bases:

$$10^4 : 5^4 = (10 : 5)^4 = (2)^4 = 2^4 \quad a^c : b^c = (a : b)^c$$

Ejemplo

2.- Calcula utilizando las propiedades de las potencias: a) $(5^3)^4 =$ b) $7^2 \cdot 5^2 =$ c) $20^4 : 5^4 =$

En cada uno de los casos, observamos el número que se repite (base) y las veces que se repite (exponente), y lo escribimos en forma de potencia:

$$a) (5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12} \quad b) 7^2 \cdot 5^2 = (7 \cdot 5)^2 = 35^2 \quad c) 20^4 : 5^4 = (20 : 5)^4 = 4^4$$

1.3.5.- Casos especiales de potencias

Es posible que nos encontremos con ejercicios de productos o cocientes en los que ni la base ni el exponente son iguales y por tanto no podremos calcular el resultado, porque no podremos aplicar ninguna de las propiedades de las potencias. Lo único que podremos hacer es calcular cada una de las potencias y operar después.

Ejemplo

3.- Calcula los siguientes productos: a) $2^3 \cdot 3^2 =$ b) $3^3 \cdot 5^2 =$ c) $7^2 \cdot 5^3 =$

En cada uno de los casos, observamos que ni la base ni el exponente son iguales, por tanto, lo único que podemos hacer es calcular el valor de cada una de las potencias y multiplicarlos:

$$2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72 \quad 3^3 \cdot 5^2 = 27 \cdot 25 = 675 \quad 7^2 \cdot 5^3 = 49 \cdot 125 = 6.125$$

Existen potencias que en principio no se podrán realizar, pero que si somos observadores encontraremos alguna forma de hacerlas. En estos casos, suele ocurrir que, aunque las bases sean distintas, unas serán potencias de otras.

Ejemplo

3.- Calcula los siguientes productos: a) $2^3 \cdot 4^2 =$ b) $9^3 \cdot 27^2 =$

En cada uno de los casos, observamos que ni la base ni el exponente son iguales, pero nos damos cuenta de que en el primero 4 es potencia de 2 y en el segundo 27 es potencia de 3, por lo tanto:

$$2^3 \cdot \underbrace{4^2}_{4=2^2} = 2^3 \cdot (2^2)^2 = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7 \quad \underbrace{9^3}_{9=3^2} \cdot \underbrace{27^2}_{27=3^3} = (3^2)^3 \cdot (3^3)^2 = 3^6 \cdot 3^6 = 3^{12}$$

Resumen de propiedades de las potencias

Producto	Cociente	Potencia
$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $2^3 \cdot 2^5 = 2^7$	$a^b : a^c = a^{b-c}$ $6^5 : 6 = 6^4$	$a^0 = 1$ $a^1 = a$
$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$ $2^4 \cdot 3^4 = 12^4$	$a^c : b^c = (a : b)^c$ $6^3 : 3^3 = 2^3$	$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

Piensa y practica

4.- Expresa estas operaciones como una sola potencia:

a) $(5^8 \cdot 5^4) : (5^2)^5 =$	b) $[2 \cdot 2^3] : [2^3]^2 =$	c) $(12)^7 : [(3^5 \cdot 4^5)] =$	d) $25^3 : [15^5 : 3^5] =$
e) $6^3 : [(2^7 : 2^6) \cdot 3]^2 =$	f) $[3^8 : 3^3]^2 : 3 =$	g) $8^4 : (2^5 \cdot 4^2) =$	h) $[(6^2)^2 \cdot 4^4] : (2^3)^4 =$

1.04.- Divisibilidad

Decimos que un número es **divisible** por otro cuando la **división** entre ellos es **exacta**, es decir, su resto es 0.

- $D \mid d$ • D es divisible por d.
 $0 \mid c$ • D contiene un número exacto de veces a d.

Si D es divisible por d, decimos que entre D y d existe una **relación de divisibilidad**.

Ejemplo

4.- Comprueba si existe relación de divisibilidad entre 104 y 8:

Para calcular los divisores de 12, hacemos todas las divisiones posibles con resto cero:

12 $\overline{)12}$	12 $\overline{)6}$	12 $\overline{)4}$	12 $\overline{)3}$	12 $\overline{)2}$	12 $\overline{)1}$
00 1	00 2	00 3	00 4	00 6	00 12

Por lo tanto, los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Observa que van emparejados y que el producto del primero por el último, el segundo por el penúltimo, etc, es siempre 12:

$$12 \cdot 1 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

1.05.- Múltiplos y divisores de un número

Si la división $a:b$ es exacta, podemos decir que:

$$\begin{cases} a \text{ es divisible por } b \\ b \text{ es divisor de } a \\ a \text{ es múltiplo de } b \end{cases}$$

🍏 Los **múltiplos** de un número lo contienen una cantidad exacta de veces y se obtienen multiplicándolo por cualquier otro número natural.

Ejemplo

4.- Escribe los ocho primeros múltiplos de 12:

Para calcular los nueve primeros múltiplos del número 12, bastaría con multiplicar el 12 por los números naturales:

$$1 \cdot 12 = 12 \quad 2 \cdot 12 = 24 \quad 3 \cdot 12 = 36 \quad 4 \cdot 12 = 48 \quad 5 \cdot 12 = 60 \quad 6 \cdot 12 = 72 \quad 7 \cdot 12 = 84 \quad 8 \cdot 12 = 96 \dots$$

🍏 Un número tiene infinitos múltiplos.

- 🍏 Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad. $\rightarrow a \cdot 1 = a$ $\begin{cases} a \text{ es múltiplo de } 1. \\ a \text{ es múltiplo de } a. \end{cases}$
- 🍏 Cualquier múltiplo de un número contiene, al menos, todos los factores primos de ese número.

🍏 Los **divisores** de un número están contenidos en él una cantidad exacta de veces y, por tanto, lo dividen con cociente exacto (resto cero).

Ejemplo

5.- Escribe los divisores del número 12:

Para calcular los divisores de 12, hacemos todas las divisiones posibles con resto cero:

$$\begin{array}{r} 12 \quad | 12 \\ 00 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \quad | 6 \\ 00 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \quad | 4 \\ 00 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \quad | 3 \\ 00 \quad 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \quad | 2 \\ 00 \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \quad | 1 \\ 00 \quad 12 \end{array}$$

Por lo tanto, los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Observa que van emparejados y que el producto del primero por el último, el segundo por el penúltimo, etc, es siempre 12:

$$12 \cdot 1 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

- 🍏 Un número tiene una cantidad finita de divisores.
- 🍏 Un número tiene al menos dos divisores: él mismo y la unidad.
- 🍏 De cada división exacta, obtenemos dos divisores de ese número: el divisor y el cociente.
- 🍏 Los divisores de un número están formados por algunos de los factores primos de ese número.

Propiedades:

- ✓ La suma de dos múltiplos de un número a es otro múltiplo de a . $m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a$
Ejemplo: $4 + 6 = 10$; (4 es múltiplo de 2, 6 es múltiplo de 2 y 10 también es múltiplo de 2)
- ✓ Si a un múltiplo de a se le suma otro número que no lo sea, el resultado no es múltiplo de a .
Ejemplo: $4 + 5 = 9$; (4 es múltiplo de 2, 5 no es múltiplo de 2 y 9 tampoco es múltiplo de 2)

1.06.- Números Primos y compuestos

En matemáticas, un **número primo** es un número natural mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores distintos: él mismo y el 1. Por el contrario, los números compuestos son los números naturales que tienen algún divisor natural aparte de sí mismos y del 1, y, por lo tanto, pueden factorizarse. El número 1, por convenio, no se considera ni primo ni compuesto.

🍏 Un **número es primo** cuando es positivo y sus únicos divisores son él mismo y la unidad. En caso contrario, es **compuesto**.

Números Primos

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	997	

Ejemplo

6.- Indica si los siguientes números son primos o compuestos: 19 y 24

El número 19 es primo porque solo se puede dividir por 1 y por 19.

El número 24 es compuesto porque además de poder dividirse por 1 y por 24, también se puede dividir por 2, por 3, por 4, por 6, por 8 y por 12.

19		19		24		24		24	
00	19	00	1	00	24	00	1	00	12

Por lo tanto, 19 es un número primo y 24 es compuesto.

1.07.- Factorización de un número

Para descomponer un número en factores primos (factorizar), lo dividimos entre 2 tantas veces como sea posible; después, entre 3; después, entre 5, ... y así sucesivamente entre los siguientes primos hasta obtener 1 en el cociente.

Para ello es conveniente conocer los criterios de divisibilidad de los números.

1.7.1.- Criterios de divisibilidad

Los **criterios de divisibilidad** son las reglas que nos permiten averiguar, sin dividir, si un número es divisible por otro.

Los criterios más útiles son los asociados a los números primos, veamos los más importantes:

Divisible por	Criterio	Ejemplo
2	Para saber si un número es divisible entre dos hay que comprobar que sea par. Si es par, entonces será divisible por 2. Recuerda que los números pares son los que terminan en 0, 2, 4, 6 y 8.	12 es divisible por 2 porque es par.
3	Para saber si un número es divisible entre 3, tenemos que comprobar que la suma de todos sus dígitos sea 3 o múltiplo de 3.	12 es divisible por 3 porque $1+2=3$.
5	Para saber si un número es divisible entre 5, dicho número tiene que acabar en 0 o 5.	15 es divisible por 5 porque acaba en 5.

7	Para saber si un número es divisible entre 7 hay que restar el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades. Si el resultado es 0 o múltiplo de 7 entonces el número es divisible entre 7. Si el resultado es diferente, el número no es divisible entre 7.	182: Separamos la cifra de las unidades 18 / 2 Restamos el número 18 menos el doble de la cifra de las unidades $2 \times 2 = 4$ $18 - 4 = 14$ 14 es un múltiplo de 7. Por lo tanto 182 sí es divisible por 7.
11	Un número es divisible entre 11 cuando la suma de los números que ocupan la posición par menos la suma de los números que ocupan la posición impar es igual a 0 o a un número múltiplo de 11.	5863: Sumamos posiciones pares: 8 y 3. $8 + 3 = 11$ Sumamos las impares: 5 y 6. $5 + 6 = 11$ $11 - 11 = 0$ por lo tanto 5863 es divisible entre 11.
13	Para saber si un número es divisible entre 13 hay que restar el número sin la cifra de las unidades y 9 veces la cifra de las unidades. Si esa resta tiene como resultado 0 múltiplo de 13 entonces el número es divisible entre 13.	325: Separamos la cifra de las unidades 32/5 Restamos la cifra sin las unidades y 9 veces las unidades $32 - 9 \times 5 = 32 - 45 = -13$ El resultado es -13. Como es un múltiplo de 13, el número 325 sí es divisible entre 13.

A veces, si el número es muy grande, habrá que reiterar el proceso varias veces.

Ejemplo

7.- ¿Es 4.225 divisible por 13?

Separamos las unidades 422/5 y restamos a la cifra sin unidades 9 veces las unidades:

$$422 - 9 \times 5 = 422 - 45 = 377$$

Volvemos a separar las unidades: 37/7 y le restamos a la cifra sin unidades 9 veces las unidades:

$$37 - 9 \times 7 = 37 - 63 = -26$$

Vemos que -26 es claramente múltiplo de 13.

Por tanto, el número 4.225 es divisible entre 13

1.7.2.- Descomposición en factores primos

Todo número entero se puede expresar de forma única como el producto de potencias de números primos. A esta expresión se le llama **factorización del número** o **descomposición en factores primos**.

Para descomponer un número en sus factores primos seguiremos los siguientes pasos:

1. Dividimos el número entre los sucesivos números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13,...) tantas veces como se pueda hasta obtener la unidad utilizando los criterios de divisibilidad.
2. Si el número acaba en cero quitamos el cero y añadimos los factores 2 y 5.
3. Escribimos el número como producto de los factores primos y si hay algunos repetidos los expresamos como potencias.

Ejemplo

$$\begin{array}{l}
 750 = 75 \cdot 10 \\
 \left. \begin{array}{l}
 75 \begin{array}{l} 5 \\ 15 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 3 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array} \\
 10 \begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array} \begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array}
 \end{array} \right\} 750 = 75 \cdot 10 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = \mathbf{2 \cdot 3 \cdot 5^3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 72 = 8 \cdot 9 = \mathbf{2^3 \cdot 3^2} \\
 64 = 8 \cdot 8 = \mathbf{2^3 \cdot 2^3 = 2^6} \\
 36 = 6 \cdot 6 = \mathbf{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2} \\
 12 = 4 \cdot 3 = \mathbf{2^2 \cdot 3}
 \end{array}$$

Como veis algunos números los podemos descomponer rápidamente con la ayuda de las tablas de multiplicar. Claro que para ello es importante sabérselas bien y tener velocidad en el cálculo mental.

Piensa y practica

8.- Separa, entre los siguientes números, los primos de los compuestos

29	39	57	83	91	101	111	113	243
9.- Descompón estos números en factores primos.								
48	72	84	100	130	160	594	720	975
10.- Calcula los 5 primeros múltiplos de 13								
11.- Calcula todos los divisores de 32								
12.- Escribe los números primos comprendidos entre 80 y 100.								

1.08.- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Como ya estudiamos en el curso pasado, el máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (mcm) se utilizan mucho a la hora de trabajar con fracciones, pero sobre todo a la hora de resolver cierto tipo de problemas.

1.8.1.- Máximo común divisor (MCD)

El **máximo común divisor** de varios números a, b, c es el **mayor de los divisores comunes** de dichos números y se representa por:

$$M.C.D. (a, b, c)$$

Para calcularlo:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman solamente los factores primos comunes, elevado cada uno al menor exponente con el que aparece.
3. Se multiplican los factores elegidos.

Ejemplo

Calcula el MCD (máximo común divisor) de 24, 60 y 72.

En primer lugar descomponemos ambos números

$$\begin{array}{r|l}
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \rightarrow 24 = 2^3 \cdot 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \rightarrow 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 72 & 2 \\
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \rightarrow 72 = 2^3 \cdot 3^2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

Después cogemos los factores que se repiten con el menor exponente y los multiplicamos:

$$\left. \begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 72 = 2^3 \cdot 3^2 \end{array} \right\} M.C.D. (24, 60, 72) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \rightarrow M.C.D. (24, 60, 72) = 12$$

1.8.2.- Mínimo común múltiplo (mcm)

El **mínimo común múltiplo** de varios números a, b, c es el **menor de los múltiplos comunes** de dichos números y se representa por:

$$m.c.m. (a, b, c)$$

Para calcularlo:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman todos los factores primos (comunes y no comunes) elevado cada uno al mayor exponente con el que aparece.
3. Se multiplican los factores elegidos

Ejemplo

Calcula el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de 24, 60 y 72.

En primer lugar descomponemos ambos números

$$\begin{array}{r|l}
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \rightarrow 24 = 2^3 \cdot 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \rightarrow 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 72 & 2 \\
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \rightarrow 72 = 2^3 \cdot 3^2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

Después cogemos todos los factores primos (se repitan o no) con el mayor exponente y los multiplicamos:

$$\left. \begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 72 = 2^3 \cdot 3^2 \end{array} \right\} m.c.m.(24, 60, 72) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360 \rightarrow m.c.m.(24, 60, 72) = 360$$

Con todo esto podemos afirmar que:

- El m.c.m. de dos números primos siempre será su producto.
- Cuando uno de los números es múltiplo del otro, el m.c.m. es el mayor de ambos.

Piensa y practica

13.- Calcula el m.c.m. y el M.C.D. de 54, 72, 110

14.- ¿Verdadero o falso?

- El mínimo común múltiplo de dos números es igual al mayor de ellos.
- El m.c.m. de dos números contiene los factores comunes a ambos y también los no comunes.
- $m.c.m.(1, k) = k$
- Si a es múltiplo de b , $mín.c.m.(a, b) = a$.
- El mínimo común múltiplo de dos números primos es su producto.

15.- Un faro se enciende cada 12 segundos, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto. Si los tres se encienden a las 18:30, ¿a qué hora volverán a coincidir?, ¿cuántas veces coincidirán en el siguiente cuarto de hora?

1.09.- Resolución de problemas

Una de las actividades fundamentales en Matemáticas es la resolución de problemas. Conviene que distingamos entre ejercicio y problema. Cuando se plantea un ejercicio, se identifica de inmediato la técnica que se precisa para resolverlo. En cambio, un problema es una tarea cuyos términos y propósitos son comprensibles por la persona, pero no se sabe de momento como abordar.

La resolución de problemas ayuda a la construcción de conceptos y a establecer relaciones entre ellos. Pero no se aprende a resolver problemas por el hecho de haber aprendido determinados conceptos y algunos algoritmos de cálculo. Hemos de disponer de herramientas, técnicas específicas y pautas

generales, que nos permitan enfrentarnos a ellos sin miedo. La mejor manera de aprender a resolver problemas eficazmente es resolver una cantidad suficiente. Este aprendizaje, como cualquier otro, lleva algún tiempo.

En general, a la hora de resolver problemas en matemáticas, seguiremos el siguiente esquema:

- a)** Lectura y comprensión del enunciado.
- b)** Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
- c)** Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
- d)** Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
- e)** Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

1.10.- Autoevaluación

1.- Ordena de mayor a menor:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{10}$$

2.- Calcula.

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$

b) $\frac{5}{9} - \frac{7}{12} + \frac{11}{18}$

3.- Opera:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{3} \cdot 3$ d) $\frac{2}{3} : 4$

4.- Resuelve paso a paso:

a) $\frac{5}{2} + 2 \left(7 - \frac{1}{3} \right) - 8$

b) $3 + \frac{2}{7} \left(1 - \frac{1}{3} \right)$

5.- Calcula paso a paso:

a) $3 + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + 3 \left(4 - \frac{2}{3} \right) \right]$

b) $5 : \left(\frac{1}{2} + 1 \right)^2 - 3 : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$

6.- Las latas de refresco tienen un volumen de $\frac{1}{3}$ de litro. ¿Cuántas latas son necesarias para envasar 20000 litros de refresco?

7.- Un sexto de los alumnos de una clase son 5. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

8.- ¿Cuántos vasos de un octavo de litro se necesitan para llenar una botella de tres cuartos de litro?

9.- Un quiosco recibe de madrugada 225 revistas. Vende por la mañana $\frac{1}{3}$ del total, y, por la tarde, $\frac{2}{5}$ también del total. ¿Cuántas revistas le quedan al finalizar la jornada?

10.- Un señor sale de casa con 60 €. Gasta en un vestido $\frac{1}{3}$ de su dinero, y, en el mercado, $\frac{2}{5}$ de lo que le quedaba.

a) ¿Qué fracción de dinero le queda?

b) ¿Cuánto dinero le queda?



9