

Concepto de potencia

Una **potencia** es una forma abreviada de expresar el producto de un número por sí mismo varias veces.

$$a^c = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{El producto de } a \text{ por sí mismo se repite } c \text{ veces}}$$

En una potencia, la **base** representa el factor que se repite, y el **exponente** las veces que se repite el producto.

Ejemplos:

$$3^9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

el 3 se repite 9 veces

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$$

el (-2) se repite 5 veces

Propiedades de las Potencias

Producto	Cociente	Potencia
$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ $2^3 \cdot 2^2 = 2^5$	$a^b : a^c = a^{b-c}$ $6^5 : 6 = 6^4$	$a^0 = 1$ $a^1 = a$
$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$ $2^4 \cdot 3^4 = 12^4$	$a^c : b^c = (a : b)^c$ $6^3 : 3^3 = 2^3$	$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 12$

Existen ejercicios de productos o cocientes en los que ni la base ni el exponente son iguales y por tanto no podremos calcular el resultado, porque no podremos aplicar ninguna de las propiedades de la tabla anterior. Lo único que podremos hacer es calcular cada una de las potencias y operar después:

$$2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72 \quad 3^3 \cdot 5^2 = 27 \cdot 25 = 675$$

Aunque en algunos casos, **si todas las bases son diferentes, pero son potencia de un mismo número**, entonces sí que se podrán resolver utilizando las propiedades de las potencias:

$$2^3 \cdot 4^2 = 2^3 \cdot (2^2)^2 = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

$$3^5 \cdot 9^3 \cdot 27^2 = 3^5 \cdot (3^2)^3 \cdot (3^3)^2 = 3^5 \cdot 3^6 \cdot 3^6 = 3^{17}$$

Concepto de raíz cuadrada

La **raíz cuadrada**, representada por el símbolo $\sqrt{}$ es la operación inversa de elevar al cuadrado, es decir la **raíz cuadrada exacta** de un número a es otro número b que, elevado al cuadrado, nos da el número a .

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

El **radicando** es el número a , $\sqrt{}$ es el **símbolo de la raíz** y decimos que b es la **raíz cuadrada** de a .

Resultado

Raíz $\rightarrow \sqrt{25} = 5$ porque $5 \cdot 5 = 25$

Radicando $\rightarrow$

Los números con raíz cuadrada exacta, se llaman **cuadrados perfectos**.

Si el radicando no es un cuadrado perfecto, su **raíz cuadrada** no será **exacta** y estará comprendida entre dos números enteros.

$$\sqrt{20} = \rightarrow \begin{cases} (+4)^2 = 16 \text{ (no llega)} \\ (+5)^2 = 25 \text{ (se pasa)} \end{cases} \rightarrow 4 < \sqrt{20} < 5$$

Divisibilidad

Un número es **divisible** por otro cuando la división entre ellos es exacta, es decir, su resto es 0.

$$\begin{array}{r} D \quad | \quad d \\ \hline 0 \quad c \end{array}$$

Y decimos que:

• D es divisible por d

• D contiene un número exacto de veces a d.

Múltiplos y divisores de números enteros

Dos números están emparentados por la **relación de divisibilidad** cuando su cociente es exacto (o su resto es cero).

Si la división $a : b$ es **exacta**, se cumple que:

- a es **múltiplo** de b
- b es **divisor** de a
- a es **divisible** por b

Los **múltiplos** de un número lo contienen una cantidad exacta de veces y se obtienen multiplicándolo por cualquier otro número natural.

Los **múltiplos** de 12 son: $12 \cdot 1 = 12$, $12 \cdot 2 = 24$, $12 \cdot 3 = 36$, $12 \cdot 4 = 48$, $12 \cdot 5 = 60$

• Un número tiene infinitos múltiplos.

• Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad.

$$a \cdot 1 = a \quad \begin{cases} a \text{ es múltiplo de } 1. \\ a \text{ es múltiplo de } a. \end{cases}$$

• Cualquier múltiplo de un número contiene, al menos, todos los factores primos de ese número.

Los **divisores** de un número están contenidos en él una cantidad exacta de veces y, por tanto, lo dividen con cociente exacto.

Los **divisores** de 12 son:

12	12	12	6	12	4	12	3	12	2	12	1
00	1	00	2	00	3	00	4	00	6	00	12

Los **divisores** de 12 son: **1, 2, 3, 4, 5, 12**

Observa que van emparejados y que si producto siempre es 12: $12 \cdot 1 = 6 \cdot 2 = 3 \cdot 4 = 12$

• Un número tiene una cantidad finita de divisores.

• Un número tiene al menos dos divisores: él mismo y la unidad.

• De cada división exacta, obtenemos dos divisores de ese número: el divisor y el cociente.

• Los divisores de un número están formados por algunos de los factores primos de ese número.

Los Números Primos

Un número es **primo** cuando sus únicos divisores son él mismo y el 1. En caso contrario se dice que es un número **compuesto**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Descomposición en factores Primos

Para descomponer un número en factores primos:

- 1) Dividimos el número entre los sucesivos números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13,...) tantas veces como se pueda hasta obtener la unidad utilizando los **criterios de divisibilidad**.
- 2) Si el número acaba en cero quitamos el cero y añadimos los factores 2 y 5.
- 3) Escribimos el número como producto de los factores primos y si hay algunos repetidos los expresamos como potencias.

Descompón en factores primos los números: 12, 36, 64, 72 y 750

$$750 = 75 \cdot 10$$

$$\begin{array}{r} 75 \overline{) 5} \\ 15 \overline{) 5} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 2} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$750 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

$$72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$64 = 8 \cdot 8 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6$$

$$36 = 6 \cdot 6 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

Criterios de Divisibilidad

Los **criterios de divisibilidad** son las reglas que nos permiten averiguar de forma sencilla y sin hacer la división, si un número es divisible por otro.

Por	Criterios
2	Un número es divisible por 2 si es par, es decir si termina en 0, 2, 4, 6 y 8.
3	Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
5	Para saber si un número es divisible entre 5, dicho número tiene que acabar en 0 o 5.
7	Para saber si un número es divisible entre 7 hay que restar el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades. Si el resultado es 0 o múltiplo de 7 entonces el número es divisible entre 7. Si el resultado es diferente, el número no es divisible entre 7.
11	Un número es divisible entre 11 cuando la suma de los números que ocupan la posición par menos la suma de los números que ocupan la posición impar es igual a 0 ó a un múltiplo de 11.
13	Para saber si un número es divisible entre 13 hay que restar el número sin la cifra de las unidades y 9 veces la cifra de las unidades. Si esa resta tiene como resultado 0 múltiplo de 13 entonces el número es divisible entre 13.
17	Para saber si un número es divisible por diecisiete hay que tomar la última cifra de la derecha multiplicada por 5 y restar esta cantidad al número que resulta de quitar dicha cifra. Si el resultado es cero o múltiplo de 17 el número es divisible por 17.

Máximo Común Divisor (M.C.D.)

El **máximo común divisor** de varios números es el mayor de los divisores comunes de ellos y se representa por: **M.C.D.**

Para calcularlo:

- Se descomponen los números en factores primos.
- Se toman solamente los factores primos **comunes**, elevado cada uno **al menor exponente** con el que aparece.
- Se multiplican los factores elegidos.

Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.)

El **mínimo común múltiplo** de varios números es el menor de los múltiplos comunes de ellos y se representa por: **m.c.m.**

Para calcularlo:

- Se descomponen los números en factores primos.
- Se toman **todos los factores** primos (comunes y no comunes) elevado cada uno **al mayor exponente** con el que aparece.
- Se multiplican los factores elegidos

Calcula el MCD y el mcm de los números 54, 72 y 110

Descomponemos los números en factores primos y para el MCD cogemos los comunes al menor exponente y para el mcm todos al mayor exponente:

$$54 = 6 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3$$

$$72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$110 = 11 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 11$$

$$M.C.D.(54, 72, 110) = 2$$

$$m.c.m.(54, 72, 110) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 = 11.880$$

Resolución de problemas

A la hora de resolver problemas en matemáticas, seguiremos los pasos siguientes:

- Lectura y comprensión del enunciado.
- Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
- Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
- Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
- Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

¿Cuándo usar el MCD?

Se utiliza cuando necesitas repartir, cortar, dividir o agrupar cosas en partes más pequeñas, de forma equitativa y sin que sobre nada. El resultado siempre será un número menor o igual que los datos del problema.

- Objetivo:** Buscar la máxima medida, el mayor tamaño posible o la menor cantidad de grupos.
- Palabras clave:** Dividir, repartir, cortar, hacer grupos, el mayor tamaño, la máxima longitud, el máximo común.

Una hoja de papel de 18 cm de largo y 24 cm de ancho se quiere dividir en cuadraditos iguales del mayor tamaño posible. ¿Cuánto medirá el lado de cada cuadradito?

Como nos dicen que los vamos a dividir en cuadraditos del mayor tamaño posible, nos están pidiendo el mayor de los divisores común de los números 18 y 24, o lo que es lo mismo, el máximo común divisor de 18 y 24, por tanto, descomponemos en factores primos los números 18 y 24 y cogemos los divisores que se repiten con el exponente más pequeño:

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 2} \\ 12 \overline{) 2} \\ 6 \overline{) 2} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \overline{) 2} \\ 9 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow M.C.D.(24, 18) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$

Así que el mayor tamaño posible de los cuadraditos será de 6 cm.

¿Cuándo usar el mcm?

Se utiliza cuando necesitas calcular un evento futuro que se repite o cuando quieres encontrar una coincidencia en el tiempo o el espacio. El resultado siempre será un número mayor o igual que los datos del problema.

- Objetivo:** Buscar el menor número en el que coinciden varias frecuencias o ritmos.
- Palabras clave:** Coincidir, encontrarse, volver a pasar, repetir, al mismo tiempo, simultáneamente, el menor tiempo.

En una bahía hay tres faros que emiten sus destellos cada 20 segundos, cada 25 y cada 30 segundos, respectivamente. Si los tres coinciden emitiendo señales a las 11 de la noche, ¿a qué hora volverán a coincidir?

Como cada faro emite sus destellos cada 20, 25 y cada 30 segundos, volverán a coincidir pasados 30 segundos, por tanto, el número será mayor y por ello haremos el mínimo común múltiplo de dichos números. Así que, primero, descomponemos en factores primos:

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 5} \\ 4 \overline{) 2} \\ 2 \overline{) 2} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 5} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 2} \\ 15 \overline{) 3} \\ 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

$$25 = 5^2$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\rightarrow m.c.m.(20, 25, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300 \text{ seg}$$

Coincidirán pasados 300 segundos, que son: $300 : 60 = 5 \text{ min}$

Así que coincidirán a las 23:05 h

Problemas de potencias

Una bacteria se reproduce por mitosis dividiéndose por la mitad cada minuto. ¿Cuántas bacterias serán al cabo de cinco minutos?

Cada minuto el número de bacterias se duplica, por tanto, en 5 minutos:

A los 5 minutos habrán: $2^5 = 32$ bacterias.