

14 Probabilidad

INTRODUCCIÓN

El estudio matemático de la probabilidad surge históricamente vinculado a los juegos de azar. Actualmente la probabilidad se utiliza en muchas disciplinas unidas a la Estadística: predicción de riesgos en seguros, estudios sobre la calidad de procesos industriales, etc.

Las posibles dificultades de la unidad son más de tipo conceptual que de procedimientos, ya que los cálculos numéricos y las técnicas utilizadas son muy sencillos.

Se debe incidir en la correcta comprensión y aplicación de los conceptos claves de la unidad: experimento aleatorio y determinista, espacio muestral, suceso, tipos de frecuencias, probabilidad y regla de Laplace.

La resolución de los ejercicios permitirá a los alumnos asimilar los diferentes conceptos. Se hace especial hincapié en el cálculo de la probabilidad de un suceso, y la aplicación de la regla de Laplace en contextos de equiprobabilidad.

Convendrá explicar las similitudes entre las propiedades de las frecuencias y de la probabilidad, y mostrar su utilidad para resolver problemas o comprobar si las soluciones son correctas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Experimento aleatorio*: repetido en igualdad de condiciones no se conoce el resultado.
- *Suceso elemental*: cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- Un *suceso* está formado por varios sucesos elementales. *Suceso seguro*: se verifica siempre. *Suceso imposible*: nunca se verifica.
- *Frecuencia absoluta (f_i)*: número de veces que aparece el suceso al repetir el experimento aleatorio *n* veces.

$$\text{Frecuencia relativa: } \frac{f_i}{n}$$

- *Probabilidad de un suceso*: número hacia el cual se aproxima la frecuencia relativa conforme aumenta el número de repeticiones de un mismo experimento.
- Regla de Laplace:

$$P(\text{suceso}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos desfavorables}}$$

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Distinguir entre experimento aleatorio y determinista.	<ul style="list-style-type: none"> • Experimento determinista. • Experimento aleatorio. 	<ul style="list-style-type: none"> • Clasificación de experimentos.
2. Obtener el espacio muestral de un experimento aleatorio.	<ul style="list-style-type: none"> • Espacio muestral. 	<ul style="list-style-type: none"> • Determinación del espacio muestral de un experimento aleatorio.
3. Obtener los sucesos elementales, el suceso seguro y el suceso imposible de un experimento aleatorio.	<ul style="list-style-type: none"> • Suceso elemental. • Suceso seguro. • Suceso imposible. 	<ul style="list-style-type: none"> • Obtención de los sucesos elementales, suceso seguro e imposible de un experimento aleatorio.
4. Obtener la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de un suceso.	<ul style="list-style-type: none"> • Frecuencia absoluta. • Frecuencia relativa. 	<ul style="list-style-type: none"> • Obtención de las frecuencias absolutas y relativas.
5. Calcular la probabilidad de un suceso.	<ul style="list-style-type: none"> • Probabilidad de un suceso. • Regla de Laplace. 	<ul style="list-style-type: none"> • Utilización de la regla de Laplace para calcular probabilidades.

14

OBJETIVO 1 DISTINGUIR ENTRE EXPERIMENTO ALEATORIO Y DETERMINISTA

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Un **experimento determinista** es aquel experimento que una vez estudiado podemos predecir, es decir, saber lo que sucederá antes de que ocurra.

Por ejemplo:

- Si ponemos un recipiente con agua a calentar, sabemos que a 100 °C el agua hervirá.
- Si un coche circula a 100 km/h, y tarda en hacer un trayecto 2 horas, habrá recorrido 200 km.

Para expresar los resultados de experimentos deterministas se suele emplear la frase:

«Es seguro que...».

Un **experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado no se puede predecir, es decir, por muchas veces que repitamos el experimento en igualdad de condiciones, no se conoce el resultado.

El lenguaje utilizado para expresar experimentos aleatorios está relacionado con situaciones de incertidumbre, ya que se trata de situaciones de azar: «Es más probable que, es igual de probable que salga, es imposible, es poco probable, es más seguro, es improbable, es casi seguro...».

Por ejemplo:

- Si lanzamos un dado, no podemos predecir el número que saldrá.
- Cuando sacamos una bola de una caja que contiene bolas de diferentes colores, no podemos predecir el color que obtendremos.

- 1** Clasifica los siguientes experimentos. Si el experimento es aleatorio, escribe un posible resultado.

EXPERIMENTO	DETERMINISTA	ALEATORIO	
Lanzar un dado		×	Sacar un 3
El resultado de dividir 10 entre 2	×		
En una caída libre de 5 metros, conocer la velocidad que se alcanza			
Lanzar una moneda al aire			
Sacar una carta de una baraja española			
Saber la fecha de tu nacimiento			
Sacar una ficha roja de una caja donde hay 20 fichas rojas y 5 fichas azules			
Al lanzar un dado, obtener una puntuación mayor que 5			
El resultado de elevar un número al cuadrado			
El tiempo que va a hacer mañana			

OBJETIVO 2

OBTENER EL ESPACIO MUESTRAL DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO**14**

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa por E .
- Cada uno de los resultados posibles se denomina **suceso elemental**.

EJEMPLO

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL	SUCESOS ELEMENTALES
Lanzar una moneda	$E = \{\text{cara, cruz}\}$	cara (c) y cruz (x)
Lanzar un dado	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	1, 2, 3, 4, 5 y 6

↑
Todos los resultados
posibles.

↑
Cada uno de los
resultados posibles.

1 Se tiene un dado en forma de tetraedro (ocho caras numeradas del 1 al 8).

a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b) ¿Cuáles son los sucesos elementales del experimento aleatorio que consiste en tirar el dado?

2 Determina el espacio muestral de un experimento que consiste en sacar tres bolas, sin introducir la bola que se saca, de una urna que contiene tres bolas numeradas de 1 a 3.

3 Di cuál es el espacio muestral de un experimento que consiste en sacar dos bolas, sin introducir la bola que se saca, de una urna que contiene dos bolas numeradas como 1 y 2.

4 Se lanzan dos dados y se suman los puntos. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener? Forma el espacio muestral.

14

OBJETIVO 3

SUCESO ELEMENTAL, SUCESO SEGURO Y SUCESO IMPOSIBLE

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Un **suceso** está formado por uno o varios sucesos elementales.
- El **suceso seguro** está formado por todos los resultados posibles (sucesos elementales). Se verifica siempre.
- El **suceso imposible** no contiene ningún suceso elemental. Nunca se verifica.

EJEMPLO

En el experimento de lanzar un dado al aire, un **suceso seguro** es obtener un número menor que 7 y un **suceso imposible** es obtener el número 30.

- 1** Se tiene una baraja de cartas española. Realizamos el experimento de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales.

- Sacar oros.
- Sacar un 5.
- Sacar una figura.
- Sacar bastos.

- 2** Se tienen ocho cartas numeradas del 1 al 8. Realizamos el experimento aleatorio de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales.

- Obtener número par.
- Obtener múltiplo de 3.
- Obtener número mayor que 4.

- 3** De los siguientes experimentos, indica qué sucesos son seguros e imposibles.

EXPERIMENTO	SUCESO SEGURO	SUCESO IMPOSIBLE
De una baraja española de 40 cartas, sacar picas		
En una bolsa con 2 bolas rojas y 3 verdes, obtener una bola azul		
En una caja con fichas numeradas del 1 al 4, obtener una ficha con un número menor que 5		
Al lanzar un dado al aire, obtener un número mayor que 6		
Al tirar dos dados al aire y sumar la puntuación de sus caras, obtener 0		
Al tirar dos dados al aire y sumar la puntuación de sus caras, obtener 3		
Al tirar dos dados al aire y multiplicar la puntuación de sus caras, obtener 40		

OBJETIVO 4

FRECUENCIA ABSOLUTA Y LA FRECUENCIA RELATIVA DE UN SUCESO

14

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- La **frecuencia absoluta** (f_i) de un suceso es el número de veces que aparece dicho suceso cuando se repite un experimento aleatorio n veces.
- La **frecuencia relativa** (h_i) de un suceso es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número de veces que se ha repetido el experimento: $h_i = \frac{f_i}{n}$.

EJEMPLO

Roberto ha lanzado un dado 50 veces, obteniendo los resultados de la tabla.

El número de veces que aparece cada cara es su frecuencia absoluta (f_i).

La frecuencia relativa (h_i) la obtenemos dividiendo la frecuencia absoluta entre el número de veces que se repite el experimento.

CARA	1	2	3	4	5	6	Suma
f_i	7	6	14	9	10	4	50
h_i	0,14	0,12	0,28	0,18	0,20	0,08	1

- 1 En un bombo hay diez bolas numeradas del 0 al 9. Se repite 100 veces el experimento de extraer una bola y reemplazarla a continuación. Los resultados obtenidos se expresan en la tabla siguiente.

BOLA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma
f_i	7	13	11	12	8	10	12	6	10	11	100
h_i											

- a) Completa la tabla calculando las frecuencias relativas.
 b) Considera los sucesos: A = múltiplo de 3, B = número impar y C = divisor de 6, y calcula.

Frecuencia relativa de A , B y C :

$$A = \{3, 6, 9\} \quad h_A = h_3 + h_6 + h_9 =$$

$$B =$$

$$C =$$

Frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ y $A \cap C$:

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\} \quad h_{A \cup B} = h_1 + h_3 + h_5 + h_6 + h_7 + h_9 =$$

$$A \cap B =$$

$$A \cup C =$$

$$A \cap C =$$

14

OBJETIVO 5 CALCULAR LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

La **probabilidad de un suceso** es el número al que se aproxima la frecuencia relativa de ese suceso conforme aumenta el número de veces de repeticiones de un experimento aleatorio.

EJEMPLO

Se lanza un dado de cuatro caras y se anotan las veces que aparece la cara 1.

LANZAMIENTOS	20	40	60	80	100
f_i	7	11	15	18	27
h_i	0,35	0,275	0,25	0,225	0,27

Observa que el número al que se aproxima la frecuencia del suceso aparecer cara 1 es 0,25. Por tanto, la probabilidad de obtener cara 1 al lanzar un dado de cuatro caras es $P = 0,25$.

1 Tira una moneda 25 veces y completa la tabla.

	RECuento	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
CARA			
CRUZ			

a) ¿Son las frecuencias relativas números próximas a 0,5? b) ¿Qué consecuencias obtienes?

REGLA DE LAPLACE

Cuando todos los **sucesos elementales** de un experimento aleatorio son **equiprobables**, la probabilidad de un suceso A es el cociente del número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

Esta expresión es la **regla de Laplace**: $P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$

EJEMPLO

Se lanza un dado de seis caras al aire. El espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Calcula las siguientes probabilidades.

SUCESOS	CASOS FAVORABLES	CASOS POSIBLES	$P = \frac{\text{CASOS FAVORABLES}}{\text{CASOS POSIBLES}}$
Salir número par	{2, 4, 6}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{3}{6}$
Salir número par o menor que 5 (Se puede dar cualquiera de las opciones: número par o menor que 5)	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{4}{6}$
Salir número par y 4 (Se tienen que dar las dos opciones a la vez: número par y 4)	{4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \frac{1}{6}$

- 2** Hacemos quinielas con un dado de tres caras con el 1, dos caras con la X y la otra cara con el 2. Tras lanzar el dado, halla mediante la regla de Laplace (son sucesos elementales equiprobables).

- a) El espacio muestral: $E = \dots\dots$
- b) La probabilidad de obtener 1.
- c) La probabilidad de obtener X.
- d) La probabilidad de obtener 2.

- 3** Una urna contiene 4 bolas: 1 roja, 1 azul, 1 verde y 1 blanca. Si se sacan 2 bolas a la vez, halla.

- a) El espacio muestral: $E = \dots\dots$
- b) La probabilidad de que una bola sea blanca y la otra roja.
- c) La probabilidad de que las dos bolas sean rojas.
- d) La probabilidad de que ninguna de las dos bolas sea blanca.

- 4** Se saca una carta de una baraja española de 40 cartas. Mediante la regla de Laplace, halla la probabilidad de obtener.

- a) Un rey.
- b) Oros.
- c) Un 4 o un 6.
- d) El rey de oros.
- e) Una carta que no sea de copas.
- f) Una figura de bastos.
- g) Una carta que no sea figura.
- h) Una carta menor que 5.

- 5** En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres. Han tomado carne 16 hombres y 20 mujeres, y el resto ha tomado pescado. Completa la tabla, considerando que elegimos una persona al azar.

	CARNE	PESCADO	Suma
HOMBRES	16		28
MUJERES	20		32
Suma	36		

- a) ¿Qué probabilidad hay de que sea hombre?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado pescado?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya tomado pescado?

- 6** Si se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos, halla.

- a) El espacio muestral: $E = \dots\dots$
- b) La probabilidad de que la suma sea 3.
- c) La probabilidad de que la suma sea 7.
- d) La probabilidad de que la suma sea superior a 10.
- e) La probabilidad de que la suma sea 4 o 5.