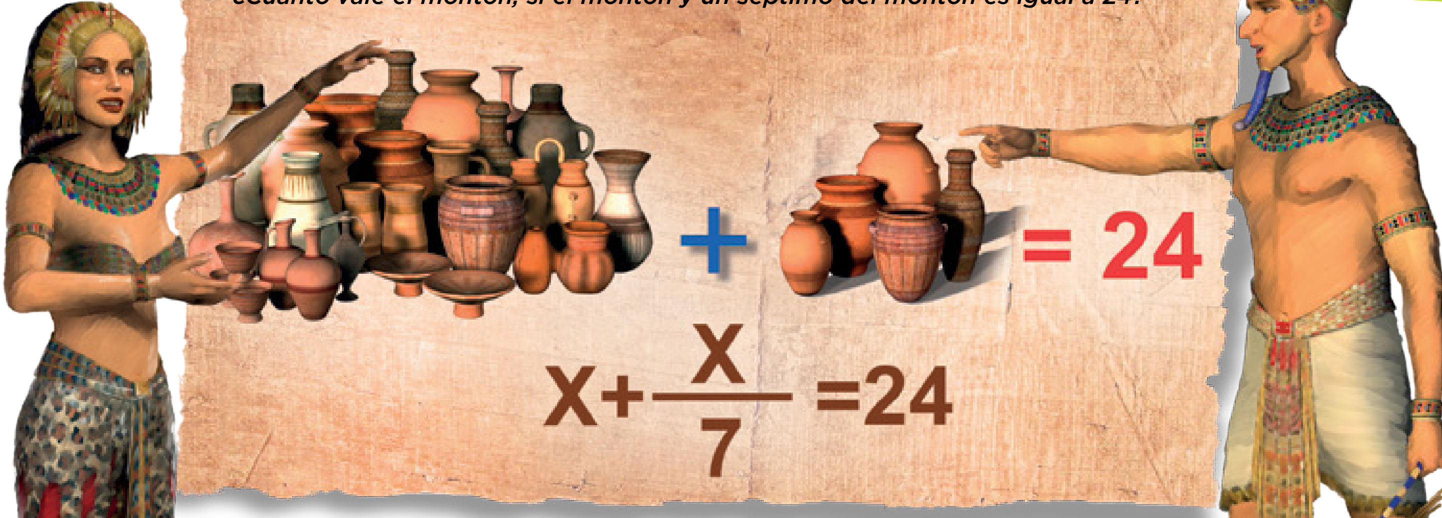
10 Álgebra

La palabra "álgebra" es de origen árabe. Ellos aprendieron de sus predecesores e hicieron progresar esta disciplina en los siglos VIII y IX.

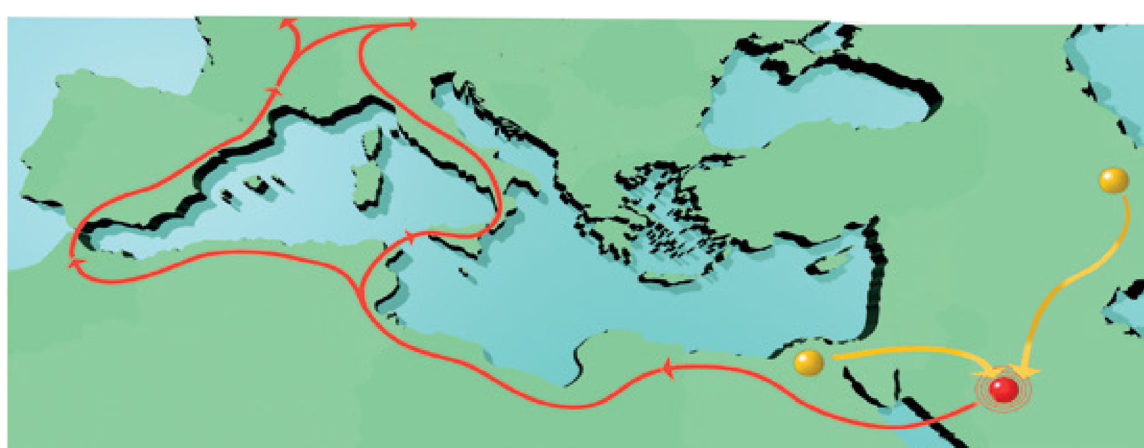
¿Cuánto vale el montón, si el montón y un séptimo del montón es igual a 24?



Este es un problema algebraico que se encuentra planteado y resuelto en un papiro egipcio del año 1650 a.C. Ahora lo resolvemos por un método muy sencillo, mediante una ecuación. Pero hasta llegar aquí, el camino ha sido largo.

Los primeros que desarrollaron métodos sistemáticos para resolver ecuaciones fueron matemáticos árabes. A la incógnita la llamaban "la cosa", algo parecido a lo de "el montón" egipcio.

Unos siglos después, los europeos aprendieron el álgebra de los árabes y la mejoraron pero seguían llamando "la cosa" a la incógnita, y al álgebra, "el arte de la cosa".



© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Letras en vez de números

En muchas tareas de las matemáticas es preciso trabajar con números de valor desconocido o indeterminado. En esos casos, los números se representan por letras y se operan con las mismas leyes y propiedades que en las expresiones numéricas. Veamos algunos ejemplos.

Otro ejemplo

Un múltiplo de un número, a, se obtiene al multiplicar a por cualquier número natural n.

$a \cdot n \longrightarrow$ múltiplo de a

Expresar propiedades aritméticas

- El orden de los sumandos no altera la suma (propiedad conmutativa).

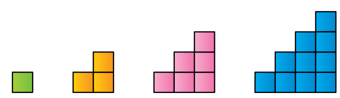
$$a + b = b + a$$

- Multiplicar un número por una suma equivale a multiplicar por cada sumando y sumar los productos parciales (propiedad distributiva).

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Generalizar relaciones numéricas

- La expresión $\dfrac{n + n^2}{2}$ generaliza la relación entre la altura de la torre, n, y el número de casillas que contiene:



1 3 6 10 … $\longrightarrow \dfrac{n + n^2}{2}$

- Las últimas casillas de la siguiente tabla generalizan la ley que define su construcción:

1	2	3	4	5	…	10	…	15	…	$\boldsymbol{n}$
2	5	10	17	26	…	101	…	226	…	$\boldsymbol{n^2 + 1}$

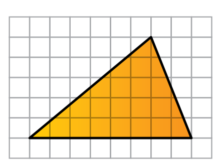
Puedes comprobarlo con algunos ejemplos:

$1 \to 1^2 + 1 = 2$ $\quad 4 \to 4^2 + 1 = 17$ $\quad 15 \to 15^2 + 1 = 226$

Expresar relaciones entre magnitudes. Fórmulas

- El área de un triángulo, A, se calcula conociendo las longitudes de su base, b, y de su altura, a.

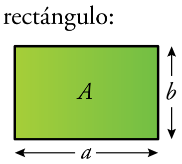
$A = \dfrac{a \cdot b}{2}$



Base $\to$ $b = 8$ u
Altura $\to$ $a = 5$ u
Área $\to$ $A = \dfrac{8 \cdot 5}{2} = 20$ u^2

Hazlo tú

Expresa con una fórmula el área del siguiente rectángulo:



- La distancia, d, recorrida por un móvil a velocidad constante, v, en un cierto tiempo, t, es:

$d = v \cdot t$

Velocidad $\to$ $v = 60$ km/h
Tiempo $\to$ $t = 3$ h
Distancia $\to$ $d = 60 \cdot 3 = 180$ km

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Expresar y operar números desconocidos

x gramos

$x + 400$ gramos

Empleando una letra, podemos representar un número cuyo valor aún no conocemos, operar con él y relacionarlo con otros números.

Ejemplo:

- Peso de un tubo de galletas ⟶ x
- Peso de dos tubos de galletas ⟶ $2x$
- Una caja pesa 400 gramos más que un tubo ⟶ $x + 400$
- Peso de dos tubos y una caja ⟶ $2x + (x + 400)$

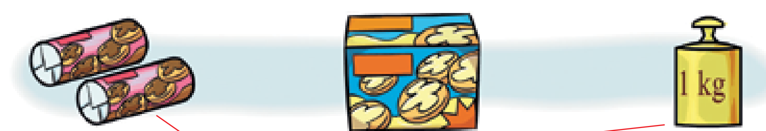
Codificar matemáticamente un problema y facilitar su resolución

Problema resuelto

Una caja de galletas pesa 400 gramos más que un tubo.

Dos tubos y una caja pesan un kilo (1 000 g).

¿Cuánto pesa un tubo y cuánto una caja?



$2x + (x + 400) = 1\,000 \;\rightarrow\; x = 200$

Solución: El tubo pesa 200 g. La caja pesa 200 + 400 = 600 g.

En la web

Traduce enunciados a lenguaje algebraico.

- Cuando las letras expresan números, las trataremos como tales en cuanto a las operaciones y sus propiedades.
- La parte de las matemáticas que se ocupa de estudiar el comportamiento de las expresiones con letras y números se denomina **álgebra.**

Piensa y practica

1. Copia en tu cuaderno y completa, sabiendo que $a = 5$.

13 ⟶ $\boxed{2 \cdot a + 3}$ ◯ ⟶ $\boxed{2 \cdot a - 3}$

16 ⟶ $\boxed{}$ ◯ ⟶ $\boxed{10 \cdot a + 7}$

2. Escribe una expresión para el valor asociado a n.

a)

2 ⟶	5
6 ⟶	13
10 ⟶	21
…	…
n ⟶	?

b)

2 ⟶	0
6 ⟶	2
10 ⟶	4
…	…
n ⟶	?

c)

2 ⟶	2
6 ⟶	30
10 ⟶	90
…	…
n ⟶	?

3. Llamando x a un número natural, escribe:

a) El doble del número. b) El siguiente del número.

c) La suma del número, su doble y su siguiente.

4. Codifica en una igualdad matemática el siguiente enunciado:

La suma de un número, x, su doble y su siguiente es 21.

5. Llamando x a la edad de Ana, escribe una expresión matemática para cada apartado:

a) La edad que tendrá dentro de ocho años.

b) La edad que tenía hace dos años.

c) El doble de la edad que tenía hace dos años.

6. Codifica en una igualdad matemática el siguiente enunciado:

La edad de Ana, dentro de ocho años, será igual al doble de la que tenía hace dos años.

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Área fotocopiable

2 Expresiones algebraicas

Ejemplos

- Un número $\longrightarrow x$
- Su siguiente $\longrightarrow x + 1$
- El doble de su siguiente $\longrightarrow 2 \cdot (x + 1)$
- El cociente entre el número y el doble de su siguiente $\longrightarrow \dfrac{x}{2 \cdot (x + 1)}$

Las expresiones algebraicas surgen al traducir a lenguaje matemático situaciones en las que aparecen datos desconocidos o indeterminados que se representan por letras.

Son expresiones algebraicas:

$$3x - 5 \qquad x^2 + 1 \qquad \frac{(a+1) \cdot b}{5} \qquad \frac{(t+1)^2}{3} \qquad \frac{a+b}{a}$$

Las operaciones, al incluir valores que no se conocen, quedan necesariamente indicadas.

Monomios

Ten en cuenta

En un monomio no se suelen incluir los signos de producto.

$$5 \cdot x \cdot y^3$$
$$\Downarrow$$
$$5xy^3$$

Cuando encontramos un número seguido de una o varias letras, entendemos que están multiplicados.

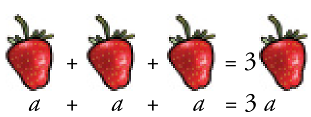
Las expresiones algebraicas más simples, formadas por productos de letras y números, se llaman **monomios.**

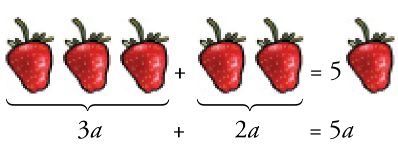
Un monomio consiste en el producto de un número conocido **(coeficiente)** por una o varias letras **(parte literal).**

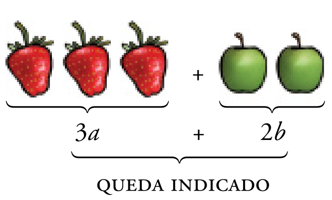
Por ejemplo:

$$\underbrace{-4}_{\text{COEFICIENTE}} \cdot \underbrace{x}_{\text{PARTE LITERAL}} \qquad \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{COEFICIENTE}} \cdot \underbrace{a^2 \cdot b}_{\text{PARTE LITERAL}}$$

Suma y resta de monomios y polinomios







Los monomios solo se pueden sumar (o restar) cuando son semejantes, es decir, cuando tienen la misma parte literal.

Cuando no son semejantes, la operación se deja indicada.

Observa los distintos casos que se presentan en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1 $a + a + a = 3a$	EJEMPLO 2 $4x + 2x = 6x$
EJEMPLO 3 $5x - 3x = 2x$	EJEMPLO 4 $a^2 + a^2 = 2a^2$
EJEMPLO 5 $3a + 2b \Rightarrow$ queda indicada	EJEMPLO 6 $x^2 + x \Rightarrow$ queda indicada
EJEMPLO 7 $7x - (2x + x) = 7x - 3x = 4x$	EJEMPLO 8 $5a - (a - 4a) = 5a - (-3a) = 5a + 3a = 8a$

Como puedes ver, las expresiones algebraicas se operan con las mismas leyes y propiedades que las expresiones numéricas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Área fotocopiable

Multiplicación de monomios

Un monomio es un producto. Por tanto, al multiplicar dos monomios obtendrás otro producto con más factores; es decir, otro monomio.

No lo olvides

Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes. Por ejemplo:

$$x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$$

Ejemplos

- $(2x) \cdot (4y) = 2 \cdot x \cdot 4 \cdot y = 2 \cdot 4 \cdot x \cdot y = 8xy$
- $(-2a) \cdot 5a = (-2) \cdot a \cdot 5 \cdot a = (-2) \cdot 5 \cdot a \cdot a = -10a^2$
- $\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot (6xy) = \frac{1}{3} \cdot x \cdot 6 \cdot x \cdot y = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot x \cdot x \cdot y = \frac{6}{3}x^2y = 2x^2y$

El producto de dos monomios es siempre otro monomio.

Multiplicación de un monomio por una suma

Cuando uno de los factores es una suma, aplicamos la propiedad distributiva; es decir, multiplicamos por cada sumando.

Ejemplos

- $5 \cdot (2a + 3b) = 5 \cdot 2a + 5 \cdot 3b = 10a + 15b$
- $2x \cdot (x^2 + 2y^2) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 2y^2 = 2x^3 + 4xy^2$

Piensa y practica

1. Reduce las expresiones siguientes:

a) $x + x$ b) $a + a + a + a$
c) $m + m - m$ d) $k + k + k + k$
e) $a + a + b + b$ f) $x + x + y + y + y$

2. Opera.

a) $2x + 5x$ b) $7a - 3a$
c) $4a + 3a$ d) $9x - 5x$
e) $2x + 3x + 4x$ f) $6a + 2a - 5a$
g) $4a - 3a + a$ h) $10x - 3x - x$

3. Iguala cada expresión con su reducida:

$x + x + 1$	$2x^2 + 2x + 3$
$x^2 + x^2 + x$	$x^2 + 5$
$3x^2 - 2x^2 + 5$	$4x^2 + x + 4$
$x^2 + x^2 + x + x$	$2x^2 + x$
$2x^2 + 4x - 2x + 3$	$2x^2 + 2x$
$9x^2 - 5x^2 + 3 + x + 1$	$2x + 1$

4. Reduce.

a) $x^2 + x^2$ b) $4a^2 - 2a^2$
c) $5a^2 + 2a^2$ d) $7x^2 - 5x^2$
e) $4x^2 + 3x^2 - 2x^2$ f) $8a^2 - 3a^2 - a^2$

5. Reduce.

a) $3x - (4x - 3x)$ b) $5x - (2x + 1)$
c) $8x - (3x + 2x)$ d) $2x - (4 - x)$
e) $(x + 4x) - (5x - 3x)$ f) $(6x - 4) - (2x - 1)$

6. Multiplica el número por el monomio.

a) $3 \cdot 2x$ b) $5 \cdot 3a$ c) $2 \cdot 4m$
d) $(-3) \cdot 5x$ e) $2 \cdot (-2a)$ f) $(-3) \cdot (-4m)$
g) $\frac{1}{2} \cdot 6x$ h) $4 \cdot \frac{1}{6}a$ i) $(-2) \cdot \frac{6}{8}m$

7. Multiplica los monomios siguientes:

a) $x \cdot 2x$ b) $5a \cdot a$ c) $m \cdot 2m^2$
d) $2x \cdot 5x$ e) $3a \cdot 4a^2$ f) $2m^2 \cdot 5m^2$
g) $3x^2 \cdot 2x^3$ h) $4a \cdot 2a^4$ i) $2m^2 \cdot 2m^4$
j) $x^3 \cdot (-2x)$ k) $(-5a^2) \cdot 3a^3$ l) $2m^3 \cdot (-4m^3)$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas. Sin embargo, no todas las igualdades algebraicas son ecuaciones, como verás a continuación.

Igualdades algebraicas: ecuaciones e identidades

Observa la diferencia entre las igualdades siguientes:

$3x - 4 = 8$	$6x - 4x = 2x$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
La igualdad se cumple solamente para $x = 4$. (Es una ecuación)	La igualdad se cumple para cualquier valor de x. (Es una identidad)

- Una **ecuación** es una igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple solamente para ciertos valores de las letras.
- Una **identidad** es una igualdad algebraica que se cumple siempre, independientemente de los valores que tomen las letras.

Elementos de una ecuación

Para poder manejar las ecuaciones, es necesario que sepas nombrar sus elementos:

- **Miembros:** son las expresiones que aparecen a cada lado del signo de igualdad.
- **Términos:** son los sumandos que forman los miembros.

PRIMER MIEMBRO SEGUNDO MIEMBRO

$$\underbrace{4x - 5}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{2x + 1}_{\text{segundo miembro}}$$

TÉRMINOS

- **Incógnitas:** son las letras que aparecen en los términos.
- **Soluciones:** son los valores que han de tomar las letras para que se cumpla la igualdad.

$$4x - 5 = 2x + 1 \begin{cases} \text{ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA} \\ \text{SOLUCIÓN: } x = 3, \text{ ya que } 4 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot 3 + 1 \end{cases}$$

Ten en cuenta

El **grado** de una ecuación es el mayor de los grados de los monomios que contiene.

- ECUACIÓN DE PRIMER GRADO:

$$5x - 4 = 3x$$

Solución $\rightarrow x = 2$

- ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO:

$$6 + x^2 = 5x$$

$$\textit{Soluciones} \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Piensa y practica

1. Razona y encuentra una solución para cada una de estas ecuaciones:

a) $5x = 20$ b) $5x - 2 = 18$

c) $\frac{5x-2}{3} = 6$ d) $\frac{5x+4}{8} = 3$

2. Busca, por tanteo, una solución para cada ecuación:

a) $5x - 8 = 7$ b) $2x + 3 = 5x - 3$

c) $2(x - 1) = 8$ d) $10 - (x - 3) = 6$

e) $\frac{3-x}{2} = 1$ f) $\frac{5+x}{6} = 2$

g) $\frac{x-1}{4} = 5$ h) $\frac{x+2}{3} = 1$

i) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$ j) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = 7$

k) $x + x^2 + x^3 = 3$ l) $\sqrt{x+5} = 3$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

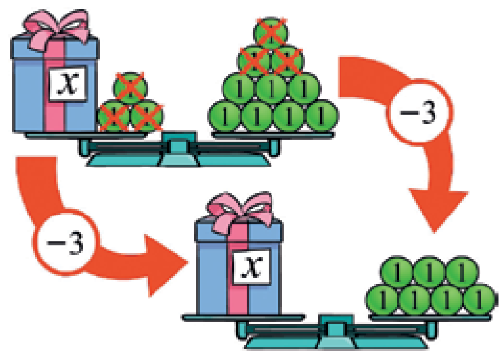
4 Primeras técnicas para la resolución de ecuaciones

Ahora vas a estudiar los procedimientos básicos para resolver ecuaciones. Aunque los ejemplos son muy sencillos y la solución salta a la vista, sigue las técnicas que se exponen, pues te servirán para resolver casos más complejos.

Resolución de la ecuación $x + a = b$

Ejemplo: $x + 3 = 10$

Restando 3 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$x + 3 = 10$$
$$\downarrow$$
$$x + \cancel{3} - \cancel{3} = 10 - 3$$
$$\downarrow$$
$$x = 7$$

La solución es $x = 7$.

Para resolver la ecuación $x + a = b$, restamos a en ambos miembros.

$$x + a = b \rightarrow x + a - a = b - a \rightarrow x = b - a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está sumando en uno de los miembros, pasa restando al otro.

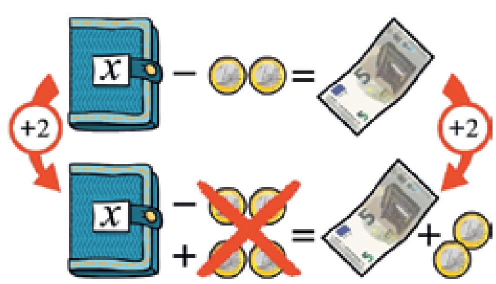
EJEMPLOS

a)	b)
$x + 5 = 10$	$x + 9 = 5$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 10 - 5$	$x = 5 - 9$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 5$	$x = -4$

Resolución de la ecuación $x - a = b$

Ejemplo: $x - 2 = 5$

Sumando 2 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$x - 2 = 5$$
$$\downarrow$$
$$x - \cancel{2} + \cancel{2} = 5 + 2$$
$$\downarrow$$
$$x = 7$$

La solución es $x = 7$.

Para resolver la ecuación $x - a = b$, sumamos a en ambos miembros.

$$x - a = b \rightarrow x - a + a = b + a \rightarrow x = b + a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está restando en uno de los miembros, pasa sumando al otro.

EJEMPLOS

a)	b)
$x - 8 = 5$	$13 - x = 5$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 5 + 8$	$13 - 5 = x$
$\downarrow$	$\downarrow$
$x = 13$	$x = 8$

Piensa y practica

1. Resuelve aplicando las técnicas recién aprendidas.

a) $x + 3 = 4$ b) $x - 1 = 8$ c) $x + 5 = 11$
d) $x - 7 = 3$ e) $x + 4 = 1$ f) $x - 2 = -6$
g) $9 = x + 5$ h) $5 = x - 4$ i) $2 = x + 6$

2. Resuelve aplicando las técnicas anteriores.

a) $x + 6 = 9$ b) $x - 4 = 5$ c) $2 - x = 4$
d) $5 + x = 4$ e) $3 + x = 3$ f) $6 = x + 8$
g) $0 = x + 6$ h) $1 = 9 - x$ i) $4 = x - 8$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

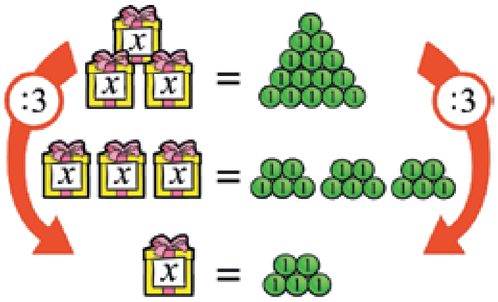
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Área fotocopiable

Resolución de la ecuación $a \cdot x = b$

Ejemplo: $3x = 15$

Dividiendo por 3 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$3x = 15 \;\downarrow\; \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3} \;\downarrow\; x = 5$$

La solución es $x = 5$.

> Para resolver la ecuación $ax = b$, dividimos ambos miembros por a. $\;ax = b \rightarrow \frac{ax}{a} = \frac{b}{a} \rightarrow x = \frac{b}{a}$

En la práctica

REGLA

Lo que está multiplicando a un miembro (a todo él), pasa dividiendo al otro.

EJEMPLOS

a) $4x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{4} \rightarrow x = 4$

b) $7x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{7}$

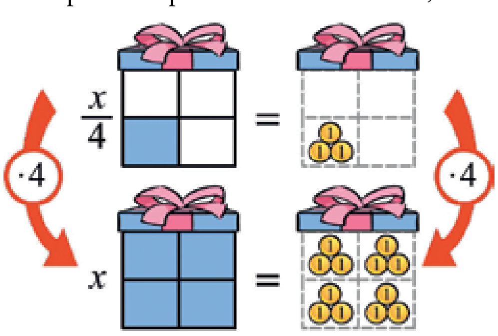
CASOS ESPECIALES

- La ecuación $0 \cdot x = b$ (con $b \neq 0$) no tiene solución. No hay ningún número que multiplicado por cero dé un número distinto de cero.
- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones. Cualquier número multiplicado por cero da cero.

Resolución de la ecuación $x/a = b$

Ejemplo: $\frac{x}{4} = 3$

Multiplicando por 4 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.



$$\frac{x}{4} = 3 \;\downarrow\; \frac{x}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} = 3 \cdot 4 \;\downarrow\; x = 12$$

La solución es $x = 12$.

> Para resolver la ecuación $\frac{x}{a} = b$, multiplicamos ambos miembros por a. $\;\frac{x}{a} = b \rightarrow \frac{x}{a} \cdot a = b \cdot a \rightarrow x = b \cdot a$

En la práctica

REGLA

Lo que está dividiendo a un miembro (a todo él), pasa multiplicando al otro.

EJEMPLOS

a) $\frac{x}{5} = 3 \rightarrow x = 3 \cdot 5 \rightarrow x = 15$

b) $\frac{x}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow x = \frac{1}{6} \cdot 3 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

En la web

Practica resolviendo ecuaciones.

Piensa y practica

3. Resuelve con las técnicas que acabas de aprender.

a) $4x = 20$ b) $\frac{x}{2} = 1$ c) $3x = 12$

d) $\frac{x}{5} = 2$ e) $8 = 4x$ f) $4 = \frac{x}{2}$

4. Resuelve combinando las técnicas anteriores.

a) $3x - 2 = 0$ b) $4x + 5 = 13$ c) $2x - 5 = 9$

d) $8 - 3x = 2$ e) $\frac{x}{2} + 4 = 7$ f) $\frac{x}{3} - 2 = 3$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

5 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

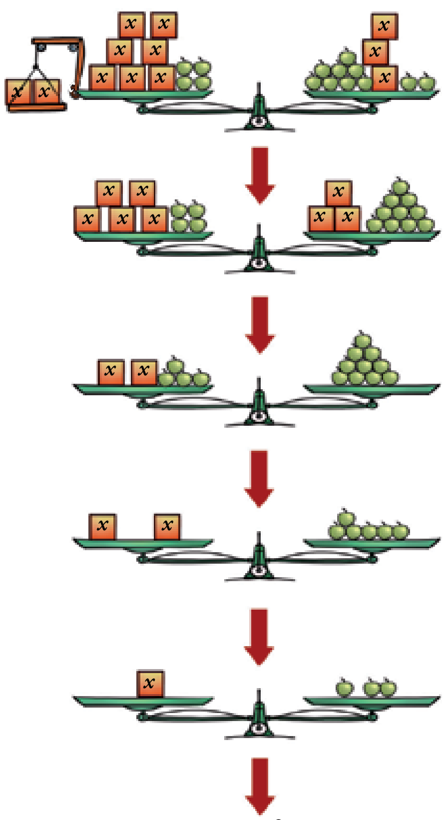
Para resolver una ecuación, la iremos transformando, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes cada vez más sencillas, hasta despejar la incógnita; es decir, hasta que quede sola en un miembro y en el otro un número conocido.

Para transformar una ecuación en otra equivalente, utilizaremos dos recursos:

- Reducir sus miembros.
- Transponer sus términos, de un miembro al otro.

Ejemplo

$7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$



$x = 3$

Vamos a resolver la ecuación: $7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$

$7x - 2x + 4 = 8 + 3x + 2$

REDUCIR →

$5x + 4 = 10 + 3x$

TRANSPONER →
(Restamos $3x$ en ambos miembros).

$5x + 4 - 3x = 10$

REDUCIR →

$2x + 4 = 10$

TRANSPONER →
(Restamos 4 en ambos miembros).

$2x = 10 - 4$

REDUCIR →

$2x = 6$

TRANSPONER →
(Dividimos a ambos miembros por 2).

$x = \dfrac{6}{2}$

REDUCIR →

$x = 3$

Comprobación: Sustituimos x por 3 en la ecuación primitiva y comprobamos que la igualdad se cumple.

$$\boxed{x = 3}$$

$$\downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x - 2x + 4 \rightarrow 7 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 4 = 21 - 6 + 4 = 19 \\ 8 + 3x + 2 \rightarrow 8 + 3 \cdot 3 + 2 = 8 + 9 + 2 = 19 \end{array}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{7 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 4}_{19} = \underbrace{8 + 3 \cdot 3 + 2}_{19}$$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Área fotocopiable

Ejercicio resuelto

Resolver esta ecuación:

$$5 - 4x = 7 + 8x - 6$$

$5 - 4x = 7 + 8x - 6 \;\rightarrow\; 5 - 4x = 1 + 8x \;\rightarrow\; 5 = 1 + 8x + 4x \;\rightarrow\; 5 = 1 + 12x \;\rightarrow\; 5 - 1 = 12x \;\rightarrow\; 4 = 12x \;\rightarrow\; \frac{4}{12} = x \;\rightarrow\; x = \frac{1}{3}$

Práctica en la resolución de ecuaciones

Los ejercicios que siguen te ayudarán a tomar confianza en la resolución de ecuaciones. Abórdalos en el orden en que aparecen y aplicando las técnicas que has aprendido: *reducir los miembros-transponer los términos*.

Para que puedas evaluar tu trabajo, encontrarás las soluciones al final de la página.

Piensa y practica

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x + 1 = 6$ b) $x + 8 = 3$
c) $7 = x + 3$ d) $5 = 11 + x$
e) $x + 1 = -2$ f) $x + 5 = -2$
g) $5 + x = 7$ h) $4 + x = 4$
i) $8 + x = 1$ j) $-3 = 2 + x$

2. Resuelve estas ecuaciones:

a) $x - 2 = 4$ b) $x - 6 = 7$
c) $2 = x - 2$ d) $5 = x - 1$
e) $x - 4 = -1$ f) $x - 5 = -3$
g) $-4 = x - 2$ h) $-8 = x - 1$
i) $4 - x = 1$ j) $5 - x = 6$
k) $8 = 13 - x$ l) $15 = 6 - x$

3. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $5x - 4x = 9$ b) $7x - 2x = 15$
c) $x - 2x = 7$ d) $2x - 6x = 12$
e) $2x - 5x = -3$ f) $4x - 6x = -8$
g) $6x - 4x = 1$ h) $11x - 5x = 2$
i) $2x - 7x = 4$ j) $3x - x = -8$

4. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $8x - 5x = x + 8$
b) $3x + 6 = 2x + 13$
c) $5x - 7 = 2 - 4x$
d) $3x + x + 4 = 2x + 10$
e) $4x + 7 - x = 5 + 2x$
f) $8 - x = 3x + 2x + 5$

SOLUCIONES

1. a) 5 b) –5 c) 4 d) –6 e) –3 f) –7 g) 2 h) 0 i) –7 j) –5

2. a) 6 b) 13 c) 4 d) 6 e) 3 f) 2 g) –2 h) –7 i) 3 j) –1 k) 5 l) –9

3. a) 9 b) 3 c) –7 d) –6 e) 1 f) 4 g) 1/2 h) 1/3 i) –4/5 j) –4

4. a) 4 b) 7 c) 1 d) 3 e) –2 f) 1/2

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

6 Resolución de problemas mediante ecuaciones

Las ecuaciones son una potente herramienta para resolver problemas. Observa en los ejemplos el proceso que hay que seguir. El objetivo es que tú, ante un problema, seas capaz de aplicar ese proceso.

En la web Resuelve problemas haciendo uso de las ecuaciones.

En la web Calcula la anchura de un río utilizando ecuaciones.

Problemas resueltos

1. ***Al sumar un número natural con el doble de su siguiente, se obtiene 14. ¿Qué número es?***

a) Deja claro lo que conoces y da nombre a lo que no conoces.

- El número ⟶ x
- Su siguiente ⟶ $x + 1$
- El doble del siguiente ⟶ $2(x + 1)$
- El número más el doble de su siguiente es igual a 14.

b) Relaciona, con una igualdad, los elementos conocidos y los desconocidos.

$$\boxed{\text{EL NÚMERO}} + \boxed{\text{EL DOBLE DEL SIGUIENTE}} = 14$$

$$x + 2(x + 1) = 14$$

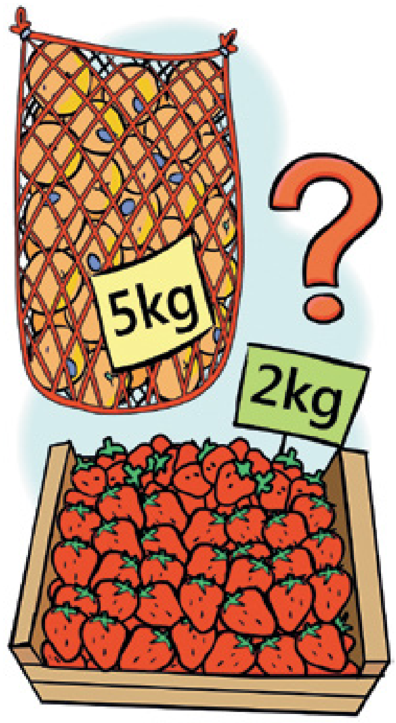
c) Resuelve la ecuación.

$$x + 2(x + 1) = 14 \rightarrow x + 2x + 2 = 14 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

d) Expresa la solución en el contexto del problema y compruébala.

Solución: El número buscado es 4.

Comprobación: $4 + 2(4 + 1) = 4 + 2 \cdot 5 = 4 + 10 = 14$



2. ***El supermercado vende la bolsa de naranjas de cinco kilos al mismo precio que la caja de fresas de dos kilos. Así, el kilo de fresas sale 1,80 € más caro que el de naranjas. ¿A cómo sale el kilo de naranjas y a cómo el de fresas?***

a) Los datos:

- Coste de un kilo de naranjas (€) ⟶ x
- Coste de un kilo de fresas (€) ⟶ $x + 1,80$
- Cinco kilos de naranjas cuestan lo mismo que dos de fresas.

b) La ecuación:

$$\boxed{\text{COSTE DE 5 kg DE NARANJAS}} = \boxed{\text{COSTE DE 2 kg DE FRESAS}}$$

$$5x = 2(x + 1,8)$$

c) Resolución de la ecuación.

$$5x = 2(x + 1,8) \rightarrow 5x = 2x + 2 \cdot 1,8 \rightarrow 5x = 2x + 3,6 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5x - 2x = 3,6 \rightarrow 3x = 3,6 \rightarrow x = \frac{3,6}{3} = 1,2$$

d) *Solución*: Las naranjas se venden a 1,20 €/kg.

Las fresas se venden a 1,20 + 1,80 = 3 €/kg.

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 5 \cdot 1,2 = 6 \text{ €} \\ 2(1,2 + 1,8) = 6 \text{ €} \end{array}\right\} 5 \cdot 1,2 = 2(1,2 + 1,8)$

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Lenguaje algebraico

1. Asocia la edad de cada personaje con una de las expresiones que hay debajo:

- Jorge tiene x años.
- Pilar, su esposa, tiene 3 años menos.
- Manuel, su padre, le dobla la edad.
- Lola, su madre, tiene 5 años menos que su padre.
- Gema, su hija, nació cuando Jorge tenía 26 años.
- Javi, el pequeño, tiene la mitad de años que la niña.

$x - 3$	$x - 26$	$2x$
$2x - 5$	x	$(x - 26) : 2$

2. Llamando x a un número natural, escribe la expresión algebraica que corresponde a cada enunciado:

a) El siguiente de ese número.

b) Su doble.

c) El doble de su anterior.

d) La mitad del número que resulta al sumarle cinco.

e) El número que resulta al restarle cinco a su mitad.

3. Asigna una expresión algebraica al sueldo de cada uno de los siguientes empleados:

- El sueldo de un informático en cierta empresa es de x euros mensuales.
- Un contable gana un 10 % menos.
- El jefe de su sección gana 700 € más.
- Un operario manual gana 400 euros menos que un informático.
- El gerente gana el doble que un jefe de sección.
- El director gana 800 euros más que el gerente.
- El sueldo de un peón sobrepasa en 200 euros la de un operario manual.

4. Una empresa de ventas online anuncia una promoción de discos, a 4,50 € el álbum, más un fijo de 3,50 € por los gastos de envío. ¿Cuál de las siguientes igualdades relaciona el importe (I) del envío, con el número de discos (d) pedidos?:

a) $I = (3{,}5 + 4{,}5) \cdot d$ b) $I = 3{,}5 - 4{,}5 \cdot d$

c) $I = 3{,}5 + 4{,}5 \cdot d$ d) $I = (3{,}5 + 4{,}5) : d$

Monomios y operaciones

5. Opera.

a) $3x + 2x + x$ b) $10x - 6x + 2x$

c) $5a - 7a + 3a$ d) $a - 5a + 2a$

e) $-2x + 9x - x$ f) $-5x - 2x + 4x$

6. Reduce todo lo posible.

a) $x + x + y$ b) $2x - y - x$

c) $5a + b - 3a + b$ d) $3a + 2b + a - 3b$

e) $2 + 3x + 3$ f) $5 + x - 4$

g) $2x - 5 + x$ h) $3x + 4 - 4x$

i) $x - 2y + 3y + x$ j) $2x + y - x - 2y$

7. Reduce, cuando sea posible.

a) $x^2 + 2x^2$ b) $x^2 + x$

c) $3a^2 - a - 2a^2$ d) $a^2 - a - 1$

e) $x^2 - 5x + 2x$ f) $4 + 2a^2 - 5$

g) $2a^2 + a - a^2 - 3a + 1$ h) $a^2 + a - 7 + 2a + 5$

8. Multiplica.

a) $2 \cdot (5a)$ b) $(-4) \cdot (3x)$ c) $(-2a) \cdot a^2$

d) $(5x) \cdot (-x)$ e) $(2a) \cdot (3a)$ f) $(-2x) \cdot (-3x^2)$

g) $(2a) \cdot (-5ab)$ h) $(6a) \cdot \left(\frac{1}{3}b\right)$ i) $\left(\frac{2}{3}x\right) \cdot (3x)$

9. Divide.

a) $(6x) : 3$ b) $(-8) : (2a)$ c) $(-15a) : (-3)$

d) $(2x) : (2x)$ e) $(6a) : (-3a)$ f) $(-2x) : (-4x)$

g) $(15a^2) : (3a)$ h) $(-8x) : (4x^2)$ i) $(10a) : (5a^3)$

Ecuaciones

10. Resuelve.

a) $2x + 5 - 3x = x + 19$ b) $7x - 2x = 2x + 1 + 3x$

c) $11 + 2x = 6x - 3 + 3x$ d) $7 + 5x - 2 = x - 3 + 2x$

e) $x - 1 - 4x = 5 - 3x - 6$ f) $5x = 4 - 3x + 5 - x$

11. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $3x - x + 7x + 12 = 3x + 9$

b) $6x - 7 - 4x = 2x - 11 - 5x$

c) $7x + 3 - 8x = 2x + 4 - 6x$

d) $5x - 7 + 2x = 3x - 3 + 4x - 5$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.

Resuelve problemas

12. La suma de tres números consecutivos es 57. ¿Qué números son?

13. Si a un número le sumas su mitad y le restas 7, obtienes 17. ¿Qué número es?

14. Si a un número le sumas 20 obtienes el triple que si le restas 8. ¿De qué número se trata?

15. Al sumarle a un número 30 unidades se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cuatro. ¿Cuál es el número?

16. Si añadieras 20 botes de kétchup a la estantería, habría el cuádruple que si retiraras 10. ¿Cuántos botes hay en la estantería?

17. Un pastor tiene, entre ovejas y cabras, 231 cabezas. El número de ovejas supera en 83 al de cabras. ¿Cuántas cabras y cuantas ovejas hay en el rebaño?

18. En un garaje hay 12 coches más que motos, y en total contamos 60 ruedas. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay en el garaje?

	MOTOS	COCHES
VEHÍCULOS	x	$x + 12$
RUEDAS	$2x$	$4(x + 12)$

19. Amaya ha encontrado en un cajón 13 monedas, unas de diez céntimos y otras de 20 céntimos, que valen en total 1,70 €. ¿Cuántas hay de cada clase?

 $\rightarrow$ x monedas  $\rightarrow$ $(13 - x)$ monedas

20. Alfredo tiene 36 cromos más que Iván, y si comprara 10 más, tendría el triple. ¿Cuántos cromos tiene cada uno?

Iván $\rightarrow x$ Alfredo $\rightarrow x + 36$

CROMOS DE ALFREDO + 10 = 3 · CROMOS DE IVÁN

Autoevaluación

1. En una granja hay vacas (V) y avestruces (A).

a) ¿Cuál de las siguientes expresiones indica el número de cabezas?

b) ¿Y el número de alas?

c) ¿Y el número de patas?

$\boxed{2V + A}$ $\boxed{4V + 2A}$ $\boxed{V + A}$ $\boxed{2A}$ $\boxed{V - 2A}$

2. Completa en tu cuaderno las tablas siguientes:

n	1	2	3	5	10	15
$n^2 + 3$				28		

1	2	3	5	10	a	n
2	5	10	26	101		

3. Calcula.

a) $x \cdot 3x^3$ b) $15a^3 : 3a^2$ c) $(-2x) \cdot 3x^4$

4. Reduce.

a) $5a^3 - 2a^3$ b) $x + 2 - x^2 + 2x + x^2$

c) $(7x^2 - x) - (4x^2 + 2x)$ d) $3(x^2 - 1) + 2(x - 1)$

5. Resuelve.

a) $3x - 5 + 2x = x + 3$

b) $8 - 2(x + 1) = 5(x - 1) + 4$

6. La suma de tres números naturales consecutivos es 54. ¿Cuáles son esos números?

7. Por tres kilos de naranjas y dos de peras, he pagado 6,40 €. ¿A cómo está el kilo de cada una de esas frutas, si el de peras es veinte céntimos más caro que el de naranjas?

8. En una ferretería se venden clavos en cajas de tres tamaños diferentes. La caja grande contiene el doble de unidades que la mediana, y esta, el doble que la pequeña. Si compras una caja de cada tamaño, te llevas 350 unidades. ¿Cuántos clavos tiene cada caja?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

© Grupo Anaya, S. A. Material fotocopiable autorizado.