

# 4

## Los números enteros

“Si a 9 le añadimos 6 y restamos 7, obtenemos 8”. Esta afirmación la podemos escribir así:  $9 + 6 - 7 = 8$ . Para llegar a una expresión tan sencilla, las matemáticas han tenido que recorrer un largo camino.

**E**n el siglo III a.C., los chinos trabajaron con cantidades negativas. Para ello, utilizaban dos conjuntos de varillas, unas rojas para las positivas y otras negras para las negativas.

265	II	T	IIII
-53		IIII	III
108	I		TT
320	III	II	



**T**uvieron que pasar todavía unos mil años, hasta que en el siglo VII, en India, se sistematizara el uso de los números negativos, del cero y de la regla de los signos.

De India, y gracias a los árabes, estos conceptos llegaron a Europa hacia el siglo IX. Sin embargo, hasta el siglo XV no aparecieron los signos + y -; primero, para designar cantidades positivas y negativas, y después, para las operaciones de suma y resta. El signo = se inventó en 1560.

Ya ves, lo que tú puedes escribir en unos segundos, a la matemática le costó miles de años. 

Nombre y apellidos: ..... Fecha: .....

# 1 Números positivos y negativos

Los números naturales se utilizan para cuantificar multitud de situaciones cotidianas. Sin embargo, a veces no sirven para diferenciar las situaciones opuestas asociadas. En esos casos, es necesaria la utilización de los números negativos. Por ejemplo:

- Vivo en el segundo piso  $\longrightarrow$   $+2$   $\rightarrow$  N.º natural
- Tengo el coche en el segundo sótano  $\longrightarrow$   $-2$   $\rightarrow$  N.º negativo
- El termómetro marca 30 grados  $\longrightarrow$   $+30$   $\rightarrow$  N.º natural
- El termómetro marca 30 grados bajo cero  $\longrightarrow$   $-30$   $\rightarrow$  N.º negativo



- Los números negativos se escriben precedidos del signo menos:

$$-1, -2, -3, -4, -5, \dots$$

- Cuando un número no lleva signo, entendemos que es positivo:

$$3 = +3 \quad +15 = 15$$

- Los números negativos, en las operaciones, se escriben entre paréntesis. Así se evita que vayan dos signos seguidos:

$$5 + (-2) \rightarrow \text{El número positivo } 5 \text{ se suma con el negativo } -2.$$

$$(-4) \cdot (-3) \rightarrow \text{El número negativo } -4 \text{ se multiplica por el negativo } -3.$$

## Utilidad de los números positivos y negativos

- Los números positivos y los números negativos sirven para expresar cantidades o posiciones fijas. Por ejemplo:

- En un edificio, podemos estar en un piso sobre la calle o en un sótano:

$$\text{Sexto piso} \longrightarrow +6$$

$$\text{Segundo sótano} \longrightarrow -2$$

- Nuestro saldo en una cuenta bancaria puede ser positivo o estar en números rojos (negativo):

$$\text{Rosa tiene ciento cincuenta euros.} \longrightarrow +150$$

$$\text{Francisco debe ochenta y cinco euros.} \longrightarrow -85$$

- Los números positivos y los negativos sirven para expresar variaciones de cantidad. Por ejemplo:

- Con el ascensor del edificio puedes subir o bajar a otra planta:

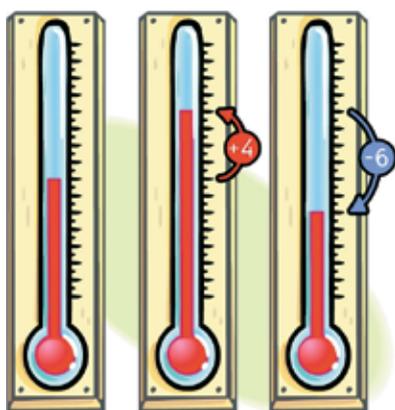
$$\text{Subes del segundo al quinto (tres plantas).} \longrightarrow +3$$

$$\text{Bajas del tercer piso al segundo sótano (cinco plantas).} \longrightarrow -5$$

- La temperatura que marca el termómetro sufre variaciones:

$$\text{Hace más calor. El termómetro ha subido cuatro grados.} \longrightarrow +4$$

$$\text{Está refrescando. El termómetro ha bajado seis grados.} \longrightarrow -6$$



**Piensa y practica**

1. Describe tres situaciones en las que se hace necesario el uso de números negativos.

Por ejemplo, para expresar las lecturas del termómetro de ambiente.

2. Escribe tres elementos más en cada una de las siguientes series numéricas:

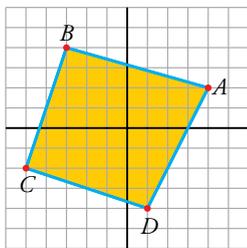
- a) 0, 1, -1, 2, -2, ...
- b) 6, 4, 2, 0, -2, ...
- c) 20, 15, 10, 5, 0, ...
- d) -21, -20, -18, -15, -11, ...
- e) 8, 7, 5, 2, -2, ...

3. Asocia un número positivo o negativo a cada uno de los enunciados siguientes:

- a) Mercedes tiene en el banco 2 500 euros.
- b) Miguel debe 150 euros.
- c) El termómetro marca 18 °C.
- d) El termómetro marca tres grados bajo cero.
- e) La avioneta vuela a 800 metros sobre el nivel del mar.
- f) El submarino navega a 40 metros bajo la superficie.

4. Observa los ejes de coordenadas en el plano cuadrículado. El punto A se define mediante sus coordenadas:

$$A \rightarrow (+4, +2)$$

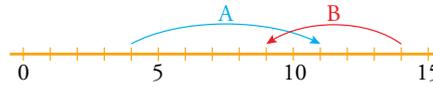


¿Cuáles son las coordenadas de los otros tres vértices del cuadrilátero?

5. Expresa numéricamente cada enunciado:

- a) El termómetro ha subido cinco grados.
- b) El termómetro ha bajado cinco grados.
- c) He perdido una moneda de 2 €.
- d) Me he encontrado una moneda de 2 €.
- e) He gastado 150 € en el supermercado.
- f) He cobrado 150 € por un trabajo realizado.

6. Escribe un número para cada movimiento en la recta:



7. Asocia un número a cada enunciado:

- a) La temperatura ha bajado de 21 °C a 18 °C.
- b) La semana pasada tenía 37 € en la hucha y ahora solo tengo 34 €.
- c) Ha amanecido a dos grados bajo cero y ahora, a mediodía, tenemos 3 °C.
- d) Llegué a casa de los abuelos con 6 € en mi monedero, me dieron la paga y ahora salgo con 16 €.

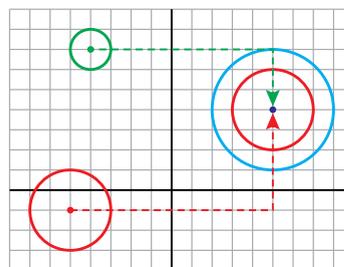
8. Cuantifica con un número positivo o negativo cada situación:



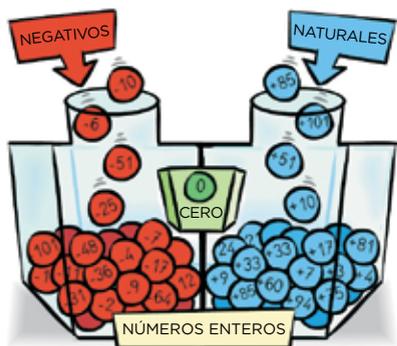
- a) Carmen vive en la quinta planta.
- b) En el tercer sótano está la caldera de la calefacción.
- c) En la planta baja hay un comercio de ropa.
- d) Victoria aparca en el segundo sótano y sube a la peluquería, en el segundo piso.
- e) Mario entra por el portal y baja al gimnasio.
- f) El conserje baja en el ascensor desde el último piso al cuarto de calderas.

9. Para trasladar la circunferencia roja y colocar su centro sobre el de la circunferencia azul, definimos este movimiento:

$$\text{HORIZONTAL} \rightarrow +10 \quad \text{VERTICAL} \rightarrow +5$$



Define, de la misma forma, el movimiento que llevaría el centro de la circunferencia verde sobre el centro de la azul.



### Observa

El conjunto  $\mathbb{Z}$  no tiene ni principio ni fin. Siempre se pueden encontrar más positivos a la derecha y más negativos a la izquierda.



### En la web

Practica ordenando números enteros.

### El conjunto $\mathbb{Z}$

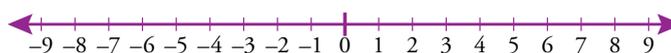
Si al conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales le añadimos los correspondientes números negativos, obtenemos un nuevo conjunto que se conoce en matemáticas como conjunto de los números enteros y se designa por la letra  $\mathbb{Z}$ .

El conjunto  $\mathbb{Z}$  de los números enteros está formado por:

- Los naturales, que son los positivos  $\rightarrow +1, +2, +3, +4, \dots$
- El cero  $\rightarrow 0$
- Los correspondientes negativos  $\rightarrow -1, -2, -3, -4, \dots$

### Ordenación y comparación de números enteros

Los números enteros se representan, ordenados, en la recta numérica:



En la recta puedes ver que cualquier número es mayor que otro que esté a su izquierda y menor que otro que esté a su derecha. Por tanto:

- Cualquier número positivo es mayor que el cero, y este es mayor que cualquier número negativo.

$$+5 > 0 \quad 0 > -5$$

- Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.

$$+5 > -2 \quad +5 > -5 \quad +5 > -13$$

- Los números negativos se ordenan *al revés* que los positivos. Es decir, cuanto mayor sea la cifra, sin considerar el signo, menor es el número.

$$-1 > -2 \quad -2 > -7 \quad -7 > -15$$

### Ejemplo



Como puedes ver:

- Quien más tiene es la chica que tiene 15 €.
- Quien no tiene nada tiene más que los que deben.
- Quien menos tiene es la chica que debe 20 €.

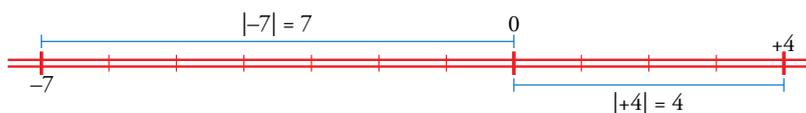
$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Quien más tiene es la chica que tiene 15 €.} \\ \bullet \text{ Quien no tiene nada tiene más que los que deben.} \\ \bullet \text{ Quien menos tiene es la chica que debe 20 €.} \end{array} \right\} -20 < -8 < 0 < +8 < +15$$

## Valor absoluto de un número entero

El valor absoluto de un número entero es la longitud del segmento que lo separa del cero en la recta numérica. Se expresa escribiéndolo entre barras:

El valor absoluto de  $-7$  es  $7$ .  $\rightarrow |-7| = 7$

El valor absoluto de  $+4$  es  $4$ .  $\rightarrow |+4| = 4$



### Así se escribe

Valor absoluto:

- De  $(+5) \rightarrow |+5| = 5$
- De  $(-5) \rightarrow |-5| = 5$

Opuesto:

- De  $(+5) \rightarrow (-5)$
- De  $(-5) \rightarrow (+5)$

El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que resulta al quitarle el signo.

$$|a| \rightarrow \text{valor absoluto de } a$$

## Opuesto de un entero

El opuesto de un número entero es su simétrico respecto del cero en la recta. Es decir, el que está a la misma distancia del cero, pero del lado contrario.



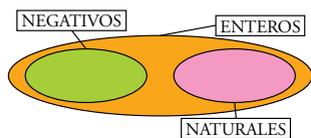
Los números  $5$  y  $-5$  son opuestos el uno del otro.

El **opuesto** de un entero es otro entero del mismo valor absoluto, pero de signo contrario.

## Piensa y practica

1. Clasifica estos números en un gráfico como el que ves debajo:

$-9$   $+1$   $-1$   $+45$   
 $+7$   $0$   $+13$   $-2$   
 $+1$   $-12$   $-11$   $+150$



2. Representa en la recta y ordena de menor a mayor.

$-7, +4, -1, +7, +6, -4, -5, +3, -11$

3. Copia en tu cuaderno y coloca los signos  $<$  o  $>$  según corresponda.

- a)  $(+8) \dots (+3)$     b)  $(-8) \dots (+3)$     c)  $(+8) \dots (-3)$   
 d)  $(-2) \dots (-5)$     e)  $(+2) \dots (-5)$     f)  $(-2) \dots (+5)$

4. Ordena de menor a mayor.

- a)  $+5, -3, -7, 0, +1, +6, -12, -5$   
 b)  $-6, -3, -9, 0, -1, -5, -12, -4$

5. Escribe el valor absoluto y el opuesto de cada número:

a)  $+8$     b)  $-7$     c)  $+11$     d)  $-13$

6. Completa en tu cuaderno.

a)  $|-6| = \dots$     b)  $|+6| = \dots$     c)  $|-2| = \dots$   
 d)  $|+9| = \dots$     e)  $|-11| = \dots$     f)  $|+10| = \dots$

7. ¿Qué número entero es opuesto de sí mismo?

8. Dos números enteros opuestos distan en la recta 12 unidades. ¿Qué números son?

9. ¿Verdadero o falso?

- a) Todos los números enteros son también naturales.  
 b) Todos los números naturales son también enteros.  
 c) Un número positivo es siempre mayor que su opuesto.  
 d) Entre dos números enteros, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.  
 e) El valor absoluto de cero es cero.

Empecemos aprendiendo a resolver las expresiones más sencillas, que son las que no tienen paréntesis.

### Sumas y restas de dos números

#### Los dos números llevan el mismo signo

- Si me dan 5 y me dan 3, gano 8.  $\longrightarrow 5 + 3 = +8$
- Si me quitan 4 y me quitan 8, pierdo 12.  $\longrightarrow -4 - 8 = -12$

Cuando los dos números llevan el **mismo signo**:

- Se suman los valores absolutos.
- Se pone el mismo signo que tenían los números.

#### Los dos números tienen distinto signo

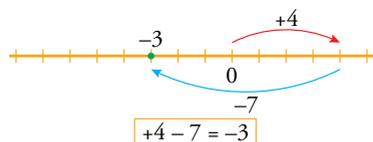
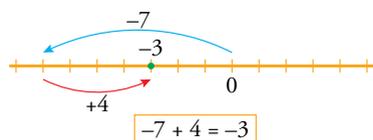
- Si me quitan 3 y me dan 10, gano 7.  $\longrightarrow -3 + 10 = +7$
- Si me dan 5 y me quitan 8, pierdo 3.  $\longrightarrow +5 - 8 = -3$

Cuando los dos números llevan **distinto signo**:

- Se restan los valores absolutos.
- Se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

#### Ten en cuenta

El orden no cuenta mientras cada número conserve su signo:



#### En la web

Practica la suma y la resta de números positivos y negativos.

#### En la web

Practica la suma y la resta de números enteros.

### Sumas y restas de más de dos números

Para resolver estas expresiones, puedes actuar de dos formas diferentes.

#### Ejemplo

Vamos a calcular  $2 - 7 + 6 - 3$ :

Puedes ir operando, paso a paso, en el orden en que aparecen los números en la expresión.

$$\begin{array}{r} 2 - 7 + 6 - 3 \\ \hline -5 + 6 - 3 \\ \hline +1 - 3 \\ \hline -2 \end{array}$$

O puedes sumar los positivos por un lado y los negativos por otro. Después, se restan los resultados.

$$\begin{array}{r} 2 - 7 + 6 - 3 \\ \hline 2 + 6 - 7 - 3 \\ \hline 8 - 10 \\ \hline -2 \end{array}$$

#### Ejercicio resuelto

$$\text{a) } 8 - 2 - 10 - 5 + 3 = \begin{cases} 6 - 10 - 5 + 3 = -4 - 5 + 3 = -9 + 3 = -6 \\ 8 + 3 - 2 - 10 - 5 = 11 - 17 = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } -6 + 19 - 15 + 23 - 12 = \begin{cases} 13 - 15 + 23 - 12 = -2 + 23 - 12 = 21 - 12 = 9 \\ 19 + 23 - 6 - 15 - 12 = 42 - 33 = 9 \end{cases}$$

**Piensa y practica**

1. Escribe cada enunciado junto a la expresión que le corresponde.

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| a) Gano 15 y gano 12.   | $-25 + 28 = +3 \rightarrow$ Gano 3.     |
| b) Gano 25 y gasto 28.  | $-15 - 12 = -27 \rightarrow$ Pierdo 27. |
| c) Gasto 25 y gano 28.  | $+15 + 12 = +27 \rightarrow$ Gano 27.   |
| d) Gasto 15 y gasto 12. | $+25 - 28 = -3 \rightarrow$ Pierdo 3.   |

2. Copia en tu cuaderno y completa.

- a) Si me dan 4 y me dan 8, gano 12.  $\rightarrow +4 + 8 = \dots$   
 b) Si me dan 5 y me quitan 9, pierdo  $\dots \rightarrow +5 - 9 = \dots$   
 c) Si me quitan 9 y me dan 2,  $\dots \rightarrow -9 + 2 = \dots$   
 d) Si me quitan 5 y me quitan 7,  $\dots \rightarrow -5 - 7 = \dots$

3. Calcula, teniendo en cuenta que ambos números tienen el mismo signo en cada caso.

- a)  $6 + 5$                       b)  $4 + 8$                       c)  $10 + 7$   
 d)  $-6 - 2$                     e)  $-4 - 6$                     f)  $-5 - 9$   
 g)  $8 + 7$                       h)  $-8 - 7$                     i)  $-12 - 4$

4. Opera, teniendo en cuenta que los dos números llevan signos diferentes en cada caso.

- a)  $9 - 5$                       b)  $3 - 7$                       c)  $6 - 10$   
 d)  $-2 + 7$                     e)  $-15 + 5$                     f)  $-11 + 8$   
 g)  $7 - 12$                     h)  $11 - 4$                     i)  $-18 + 10$

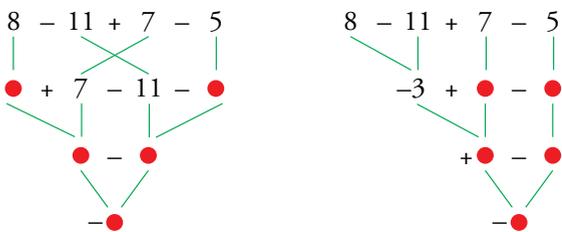
5. Calcula.

- a)  $6 - 7$                       b)  $-8 + 7$                       c)  $-5 - 1$   
 d)  $8 + 2$                     e)  $10 - 12$                     f)  $-16 + 20$   
 g)  $11 + 21$                     h)  $-13 - 12$                     i)  $-18 + 11$

6. Obtén el resultado de las expresiones siguientes:

- a)  $51 - 28$                     b)  $-32 + 49$                     c)  $-22 - 36$   
 d)  $18 + 27$                     e)  $-92 + 49$                     f)  $-62 - 31$

7. Copia en tu cuaderno sustituyendo cada punto por un número.



8. Resuelve como en el ejemplo.

- $-6 + 8 - 10 + 13 = +2 - 10 + 13 = -8 + 13 = +5$   
 a)  $10 - 3 - 5$                     b)  $15 - 9 - 6$                     c)  $9 - 3 + 5$   
 d)  $-2 + 2 + 7$                     e)  $-10 - 3 + 8$                     f)  $-4 - 3 - 2$

9. Opera como en el ejemplo.

- $-12 + 19 - 14 = 19 - 12 - 14 = 19 - 26 = -7$   
 a)  $9 - 2 - 3$                     b)  $12 - 4 - 6$                     c)  $5 - 9 + 8$   
 d)  $-13 + 6 + 4$                     e)  $-11 - 4 + 8$                     f)  $-5 - 3 - 4$

10. Resuelve paso a paso, igual que en el modelo resuelto.

- $7 - 5 - 8 - 4 = 2 - 8 - 4 = -6 - 4 = -10$   
 a)  $2 - 4 - 5 + 8$                     b)  $6 - 7 + 4 - 3$   
 c)  $5 + 8 - 9 - 6$                     d)  $-4 - 9 + 6 + 2$   
 e)  $-3 - 5 + 7 + 7$                     f)  $-4 - 8 - 2 - 5$

11. Opera agrupando por signos, como en el ejemplo.

- $-4 + 6 - 8 + 7 = 6 + 7 - 4 - 8 = 13 - 12 = 1$   
 a)  $5 + 7 - 2 - 4$                     b)  $2 - 6 + 4 - 9$   
 c)  $9 - 6 - 7 + 2$                     d)  $-4 - 5 + 3 + 8$   
 e)  $-8 + 2 - 7 + 6$                     f)  $-1 + 5 + 6 - 7$

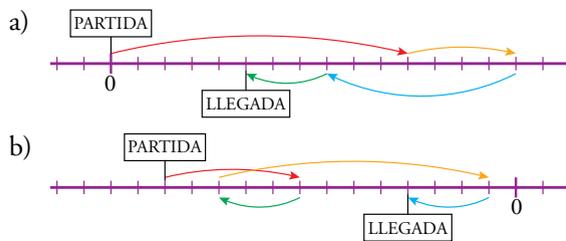
12. Copia en tu cuaderno y completa.

- a)  $2 - 7 - 5 + 8 = \square - 5 + 8 = \square + 8 = \square$   
 b)  $15 - 21 + 13 - 10 = \square + 13 - 10 = \square - 10 = \square$   
 c)  $-6 + 11 - 8 + 4 = 11 + \square - 6 - \square = \square - \square = \square$

13. Resuelve.

- a)  $6 - 9 - 7 - 5 + 2 + 11$   
 b)  $15 + 18 - 11 - 7 - 21 + 27$   
 c)  $-9 + 12 - 16 + 25 - 18 - 4$   
 d)  $-44 - 16 + 8 + 33 + 23 - 5$   
 e)  $-3 - 17 - 21 - 9 - 17 + 57$

14. Escribe una expresión para los movimientos reflejados en cada recta numérica, y resuélvela:



Ya sabes que los números enteros, en las operaciones, se suelen escribir entre paréntesis. Ahora vas a aprender a suprimir esos paréntesis en las expresiones con sumas y restas. Así, se reducen a lo que ya sabes. Se presentan cuatro casos:

■ SUMAR UN NÚMERO POSITIVO

Ingreso un talón de 5 €.



Gano. Tengo cinco euros MÁS.

$$+(+5) = +5$$

■ SUMAR UN NÚMERO NEGATIVO

Me llega una factura de 5 €.



Pierdo. Tengo cinco euros MENOS.

$$+(-5) = -5$$

Ten en cuenta

Atendiendo a los dos signos, de fuera y dentro del paréntesis:

- Si son **iguales**, el resultado es **positivo**.

$$\left. \begin{array}{l} +(+)\ \\ -(-)\ \end{array} \right\} \rightarrow +$$

- Si son **distintos**, el resultado es **negativo**.

$$\left. \begin{array}{l} +(-)\ \\ -(+)\ \end{array} \right\} \rightarrow -$$

Para **sumar un número entero**, se quita el paréntesis y se deja el signo propio del número.

$$+(+a) = +a \quad +(-a) = -a$$

■ RESTAR UN NÚMERO POSITIVO

Entrego un talón de 5 €.



Pierdo. Tengo cinco euros MENOS.

$$-(+5) = -5$$

■ RESTAR UN NÚMERO NEGATIVO

Me perdonan una factura de 5 €.



Gano. Tengo cinco euros MÁS.

$$-(-5) = +5$$

Para **restar un número entero**, se quita el paréntesis y se le pone al número el signo contrario al que tenía.

$$-(+a) = -a \quad -(-a) = +a$$

Ejercicio resuelto

a)  $7 + (+3) = 7 + 3 = 10$

b)  $7 + (-9) = 7 - 9 = -2$

c)  $12 - (+4) = 12 - 4 = 8$

d)  $12 - (-4) = 12 + 4 = 16$

e)  $(-9) + (-11) = -9 - 11 = -20$

f)  $(-14) - (-8) = -14 + 8 = -6$

Piensa y practica

1. Quita paréntesis.

a)  $+(-1)$

b)  $-(+4)$

c)  $+(+8)$

a)  $+(+8) - (+5)$

b)  $-(+6) - (-2)$

d)  $-(+7)$

e)  $+(-10)$

f)  $-(-6)$

c)  $+(-2) + (-6)$

d)  $+(+7) - (-3)$

g)  $+(-11)$

h)  $-(-13)$

i)  $+(-15)$

e)  $+(-9) - (+2)$

f)  $-(+6) + (+4)$

j)  $-(+16)$

k)  $+(-9)$

l)  $-(-7)$

Soluciones: a) 3; b) -4; c) -8; d) 10; e) -11; f) -2

## Sumas y restas dentro de paréntesis

El paréntesis empaqueta, en un solo bloque, todo lo que va en él. Por eso, el signo que lo precede afecta a todos los sumandos (o restandos) que haya en el interior. Se dan dos casos.

### ■ PARÉNTESIS PRECEDIDO DE SIGNO POSITIVO

$$+(5 - 8 + 6) \begin{cases} \text{me dan } (+5) \\ \text{me dan } (-8) \\ \text{me dan } (+6) \end{cases} \rightarrow +(+5) + (-8) + (+6) = 5 - 8 + 6$$

Los signos finales son los que tenían los sumandos dentro del paréntesis.

Al quitar un paréntesis precedido del signo +, los signos de los sumandos (restandos) interiores quedan como estaban.

### ■ PARÉNTESIS PRECEDIDO DE SIGNO NEGATIVO

$$-(5 - 8 + 6) \begin{cases} \text{me quitan } (+5) \\ \text{me quitan } (-8) \\ \text{me quitan } (+6) \end{cases} \rightarrow -(+5) - (-8) - (+6) = -5 + 8 - 6$$

Los signos finales son los contrarios a los que había dentro del paréntesis.

Al quitar un paréntesis precedido del signo -, cada uno de los signos de los sumandos (restandos) interiores se cambia por su opuesto.

### En la web

Rellena los cuadrados mágicos.

### Ejercicio resuelto

Resolver la expresión siguiente:

$$15 - [12 - (6 - 11) + (3 - 9)]$$

Podemos operar de dos formas:

- a) Operar dentro de los paréntesis, empezando por los más pequeños.      b) Quitar paréntesis, empezando por los más pequeños, y después operar.

$$\begin{aligned} 15 - [12 - (6 - 11) + (3 - 9)] \\ 15 - [12 - (-5) + (-6)] \\ 15 - [12 + 5 - 6] \\ 15 - 11 \\ 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15 - [12 - (6 - 11) + (3 - 9)] \\ 15 - [12 - 6 + 11 + 3 - 9] \\ 15 - 12 + 6 - 11 - 3 + 9 \\ 15 + 6 + 9 - 12 - 11 - 3 \\ 30 - 26 \\ 4 \end{aligned}$$

### Piensa y practica

3. Quita paréntesis, calcula, y comprueba el resultado.

- a)  $+(5 + 3)$       b)  $-(-6 - 3)$       c)  $-(8 + 15)$   
d)  $-(-2 - 4)$       e)  $+(9 - 7 - 2)$       f)  $-(1 - 8 + 3)$   
g)  $-(-6 + 5 - 7)$       h)  $-(7 - 5 + 4)$       i)  $-(-3 - 1 - 4)$

Soluciones: a) 8; b) 9; c) -23; d) 6; e) 0; f) 4; g) 8; h) -6; i) 8

4. Resuelve por dos métodos diferentes.

- a)  $5 - (9 - 3)$       b)  $7 + (2 - 8)$   
c)  $12 + (-3 + 10)$       d)  $15 - (8 + 11)$   
e)  $+(9 - 10) - 2$       f)  $-(7 + 4) + 14$   
g)  $(5 + 8) - (7 + 6)$       h)  $(16 - 9) - (10 - 7)$

## Piensa y practica

5. Quita los paréntesis.

a)  $+(+2)$     b)  $+(-8)$     c)  $-(+4)$     d)  $-(-9)$

6. Quita el paréntesis y calcula igual que en el ejemplo.

•  $-16 - (-5) = -16 + 5 = -11$

a)  $12 + (+4)$     b)  $10 - (+8)$     c)  $15 - (-6)$   
d)  $10 - (+16)$     e)  $-2 + (+8)$     f)  $-3 - (-5)$

7. Opera, como en el ejemplo, suprimiendo paréntesis.

•  $- (+14) - (-12) = -14 + 12 = -2$

a)  $+(+7) + (+6)$     b)  $+(-5) + (-3)$   
c)  $+(-6) - (+8)$     d)  $-(-7) + (-10)$   
e)  $-(-3) - (-5)$     f)  $-(-2) - (+6)$   
g)  $+(+7) - (-3)$     h)  $-(-5) + (+4)$   
i)  $+(-12) + (+10)$     j)  $- (+6) - (+8)$

8.  ¿Verdadero o falso?

- a) La suma de dos números positivos es mayor que cero.
- b) La suma de un número positivo y otro negativo es un número negativo.
- c) El resultado de restar dos números negativos puede ser mayor que cero.
- d) Restar un número, positivo o negativo, es lo mismo que sumar su opuesto.

9. Resuelve, como en el modelo, quitando primero el paréntesis.

a)  $12 + (+3 - 5)$

b)  $14 - (+12 - 10)$

c)  $8 - (-5 + 13)$

•  $13 - (+4 - 9)$

$$\begin{array}{r} 13 - 4 + 9 \\ 22 - 4 \\ 18 \end{array}$$

10. Quita primero el paréntesis y, después, calcula.

a)  $4 + (9 - 7)$     b)  $15 - (2 - 9)$

c)  $11 - (-6 + 3)$     d)  $10 - (-7 - 5)$

e)  $13 + (-8 + 2)$     f)  $17 + (-5 - 9)$

g)  $8 + (-8 + 8)$     h)  $9 - (-3 - 10)$

11. Repite los ejercicios de la actividad anterior, operando en primer lugar dentro del paréntesis, como se hace en el modelo.

•  $13 - (+4 - 9)$

$$\begin{array}{r} 13 - (-5) \\ 13 + 5 \\ 18 \end{array}$$

12. Calcula, quitando primero los paréntesis, como en el ejemplo.

•  $(5 - 12) - (8 - 6) = 5 - 12 - 8 + 6 = 11 - 20 = -9$

a)  $(7 - 4) + (9 - 5)$     b)  $(2 + 6) + (5 - 8)$

c)  $(5 - 9) + (2 - 12)$     d)  $(7 + 3) - (5 + 4)$

e)  $(8 - 12) - (2 - 5)$     f)  $(10 - 7) - (-2 - 6)$

g)  $- (8 + 4) + (5 - 9)$     h)  $- (6 - 2) - (7 - 9)$

13. Repite los ejercicios de la actividad anterior, operando en primer lugar dentro de los paréntesis, como se hace en este ejemplo:

•  $(5 - 12) - (8 - 6) = (-7) - (2) = -7 - 2 = -9$

14. Calcula como en el ejemplo:

•  $4 - [5 - (8 + 3)] = 4 - [5 - (11)] =$   
 $= 4 - [5 - 11] = 4 - [-6] = 4 + 6 = 10$

a)  $6 + [5 + (7 + 2)]$     b)  $8 + [4 - (3 + 5)]$

c)  $10 - [6 + (2 + 7)]$     d)  $15 - [2 - (6 - 10)]$

e)  $15 - [10 - (8 + 4)]$     f)  $12 - [7 - (2 - 10)]$

g)  $(-6) + [5 + (2 - 12)]$     h)  $(-7) - [3 - (4 - 9)]$

15. Ejercicio resuelto

Operar:  $[8 - (+11)] - [3 + (-7 + 5)]$ 

$$\begin{array}{r} [8 - (+11)] - [3 + (-7 + 5)] \\ [8 - 11] - [3 + (-2)] \\ [-3] - [3 - 2] \\ (-3) - (1) \\ -3 - 1 \\ -4 \end{array}$$

$$[8 - (+11)] - [3 + (-7 + 5)] = [8 - 11] - [3 + (-2)] =$$
  
 $= [-3] - [3 - 2] = (-3) - (1) = -3 - 1 = -4$

16. Calcula.

a)  $(2 - 10) + [5 - (8 + 2)]$

b)  $(12 - 3) - [1 - (2 - 6)]$

c)  $[9 - (+5)] + [7 + (-10)]$

d)  $[10 - (-2)] - [5 - (+12)]$

e)  $[8 - (6 + 4)] - (5 - 7)$

f)  $[1 + (6 - 9)] - (8 - 12)$

# 5 Multiplicación y división de números enteros

## Multiplicación de números enteros

Ya sabes que multiplicar es hacer una suma repetida de sumandos iguales. Teniendo esto en cuenta, multiplicaremos números enteros igual que multiplicamos números naturales, solo que ahora tendremos que atender a los signos.

$(+3) \cdot (+7) = +21$

$(+4) \cdot (-5) = -20$

$(-3) \cdot (+7) = -21$

$(-4) \cdot (-5) = +20$

### ■ PRODUCTO DE DOS NÚMEROS POSITIVOS

Sumamos tres veces (+7):

$$(+7) + (+7) + (+7) = 7 + 7 + 7 = +21$$

$$(+3) \cdot (+7) = +21$$

### ■ PRODUCTO DE UN NÚMERO POSITIVO POR OTRO NEGATIVO

Sumamos cuatro veces (-5):

$$(-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -5 - 5 - 5 - 5 = -20$$

$$(+4) \cdot (-5) = -20$$

### ■ PRODUCTO DE UN NÚMERO NEGATIVO POR OTRO POSITIVO

Restamos tres veces (+7):

$$-(+7) - (+7) - (+7) = -7 - 7 - 7 = -21$$

$$(-3) \cdot (+7) = -21$$

### ■ PRODUCTO DE DOS NÚMEROS NEGATIVOS

Restamos cuatro veces (-5):

$$-(-5) - (-5) - (-5) - (-5) = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$$

$$(-4) \cdot (-5) = +20$$

Para automatizar la multiplicación de enteros, aplica la siguiente regla, que te permite obtener el signo del producto sin necesidad de pararte a reflexionar.

### En la web

Practica la regla de los signos.

#### REGLA DE LOS SIGNOS

Al multiplicar dos números enteros:

- Si los dos factores tienen el **mismo signo**, el **resultado** final es **positivo**.
 

}	$(+) \cdot (+) = +$
	$(-) \cdot (-) = +$
- Si los dos factores tienen **distinto signo**, el **resultado** final es **negativo**.
 

}	$(+) \cdot (-) = -$
	$(-) \cdot (+) = -$

Para multiplicar tres o más números enteros, tendremos en cuenta las propiedades de la multiplicación:

- **Conmutativa:** Cambiar el orden de los factores no influye en el resultado.
- **Asociativa:** La forma en que se agrupen los factores no cambia el resultado.

$$\begin{array}{ccccc}
 \overbrace{(-3) \cdot (+5)} & \cdot & (-2) & = & \overbrace{(-3) \cdot (+5)} & \cdot & (-2) & = & \overbrace{(-2) \cdot (-3)} & \cdot & (+5) \\
 \swarrow \searrow & & & & \swarrow \searrow & & & & \swarrow \searrow & & \\
 (-15) & \cdot & (-2) & & (-3) & \cdot & (-10) & & (+6) & \cdot & (+5) \\
 \swarrow \searrow & & & & \swarrow \searrow & & & & \swarrow \searrow & & \\
 +30 & & & & +30 & & & & +30 & & 
 \end{array}$$

### División de números enteros

Igual que en la multiplicación, lo único nuevo que necesitas aprender para dividir enteros es la forma de calcular el signo del cociente. Con lo que ya sabes del producto, es fácil averiguar ese signo:

$$(+4) \cdot (+5) = +20 \rightarrow (+20) : (+4) = +5 \rightarrow \text{Más entre más, más.}$$

$$(-4) \cdot (-5) = +20 \rightarrow (+20) : (-4) = -5 \rightarrow \text{Más entre menos, menos.}$$

$$(+4) \cdot (-5) = -20 \rightarrow (-20) : (+4) = -5 \rightarrow \text{Menos entre más, menos.}$$

$$(-4) \cdot (-5) = -20 \rightarrow (-20) : (-5) = +4 \rightarrow \text{Menos entre menos, más.}$$

#### Ten en cuenta

No es lo mismo...

$$[(-60) : (+6)] : (-2)$$

$$[-10] : (-2)$$

$$+5$$

que...

$$(-60) : [(+6) : (-2)]$$

$$[-60] : (-3)$$

$$+20$$

La división de enteros **no es asociativa**.

La **regla de los signos** para la división coincide con la del producto.

SIGNOS IGUALES	}	(+) : (+) = +
		(-) : (-) = +
SIGNOS DIFERENTES	}	(+) : (-) = -
		(-) : (+) = -

#### Ejemplos

$$(-12) : (+4) = -3 \quad (+30) : (-5) = -6 \quad (+18) : (+9) = +2 \quad (-15) : (-3) = +5$$

### Operaciones combinadas

En las expresiones con números enteros hemos de atender:

- Primero, a los paréntesis.
- Después, a las multiplicaciones y a las divisiones.
- Por último, a las sumas y a las restas.

#### Ejemplo

$$15 - 3 \cdot [6 - (-12) : (+4)]$$

$$15 - 3 \cdot [6 - (-3)]$$

$$15 - 3 \cdot [+9]$$

$$15 - 27$$

$$-12$$

$$15 - 3 \cdot [6 - (-12) : (+4)] = 15 - 3 \cdot [6 - (-3)] =$$

$$= 15 - 3 \cdot [6 + 3] =$$

$$= 15 - 3 \cdot [+9] = 15 - 27 = -12$$

#### Piensa y practica

1. Calcula estos productos:

a)  $3 \cdot (-2)$

b)  $4 \cdot (+5)$

c)  $8 \cdot (-6)$

d)  $(-4) : (+3)$

e)  $(+20) : (-7)$

f)  $(-1) : (+6)$

d)  $-5 \cdot (+3)$

e)  $-2 \cdot (-4)$

f)  $-6 \cdot (+3)$

g)  $(-15) : (-3)$

h)  $(+32) : (+8)$

i)  $(-36) : (+9)$

g)  $(-4) \cdot (+7)$

h)  $(+2) \cdot (+6)$

i)  $(-5) \cdot (-7)$

j)  $(+42) : (-7)$

k)  $(-48) : (-8)$

l)  $(+54) : (+6)$

j)  $(+3) \cdot (-8)$

k)  $(-9) \cdot (-3)$

l)  $(-6) \cdot (+4)$

3. Calcula.

2. Calcula el cociente entero, si existe.

a)  $(-8) : (+2)$

b)  $(+20) : (-10)$

c)  $(-12) : (-4)$

a)  $(-3) \cdot [(-9) - (-7)]$

b)  $28 : [(-4) + (-3)]$

c)  $[(-9) - (+6)] : (-5)$

d)  $(-11) - (-2) \cdot [15 - (+11)]$

# Ejercicios y problemas

## El conjunto $\mathbb{Z}$ . Orden y representación

1. Expresa con la notación de los números enteros, como se hace en el ejemplo:

• **Me llega una factura de 84 €.**  $\rightarrow +(-84) = -84$

a) Cobro 155 € por un trabajo realizado.

b) Le pago a Juana los 10 euros que le debía.

c) Mi hermano me perdona los 10 € que me prestó.

2. Escribe, en cada caso, todos los números enteros comprendidos entre:

a) +5 y -5      b) -10 y -2      c) -8 y 0

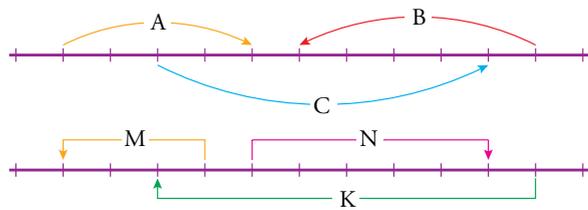
3. Ordena de menor a mayor.

a) +6, +2, 0, +4, -7, +3

b) -7, -2, 0, -1, -5, -9

c) -4, 0, +6, -8, +3, -5

4. Escribe un número entero para cada movimiento en la recta:



## Suma y resta

5. Calcula.

a)  $13 - 9 + 5 - 7$

b)  $6 - 8 - 6 + 5 + 4 - 6$

c)  $-3 - 5 + 2 - 1 - 7 + 4$

d)  $-8 - 7 + 2 + 9 - 10 + 18$

6. Quita paréntesis y opera.

a)  $(+3) - (+8)$

b)  $(-9) + (-6)$

c)  $(-7) - (-7) - (+7)$

d)  $(-11) + (+8) - (-6)$

e)  $(+15) - (-12) - (+11) + (-16)$

f)  $(-3) - (-2) - (+4) + (-7) + (+8)$

## 7. Ejercicio resuelto

**Calcular:**  $11 - (5 - 8 - 6 + 3)$

Podemos operar antes o después de quitar paréntesis:

$$\bullet 11 - (5 - 8 - 6 + 3) = 11 - (5 + 3 - 8 - 6) = \\ = 11 - (8 - 14) = 11 - (-6) = 11 + 6 = 17$$

$$\bullet 11 - (5 - 8 - 6 + 3) = 11 - 5 + 8 + 6 - 3 = \\ = 11 + 8 + 6 - 5 - 3 = 25 - 8 = 17$$

8. Calcula.

a)  $(4 + 8) - (3 - 9)$

b)  $10 + (8 - 15 + 2 - 6)$

c)  $12 - (7 + 11 - 14 - 8)$

d)  $(6 - 12 + 2) - (11 - 4 + 2 - 5)$

9. Ejercicio resuelto

**[[+2] + (-12)] - [(3 - 7) - (7 - 2)] =**

$$= [2 - 12] - [(-4) - (+5)] = [-10] - [-4 - 5] =$$

$$= [-10] - [-9] = -10 + 9 = -1$$

10. Calcula.

a)  $(5 - 7) - [(-3) + (-6)]$

b)  $(-8) + [(+7) - (-4) + (-5)]$

c)  $(+9) - [(+3) - (3 - 12) - (+8)]$

d)  $[(+6) - (-8)] - [(-4) - (-10)]$

e)  $[(2 - 8) + (5 - 7)] - [(-9 + 6) - (-5 + 7)]$

## Multiplicación y división

11. Opera como en el ejemplo y compara lo obtenido.

$$\bullet (+48) : [(-6) \cdot (+4)] = (+48) : [-24] = -2$$

$$[(+48) : (-6)] \cdot (+4) = [-8] \cdot (+4) = -32$$

$$a) (-18) : [(+6) \cdot (-3)] \quad [(-18) : (+6)] \cdot (-3)$$

$$b) (+54) : [(-6) : (+3)] \quad [(+54) : (-6)] : (+3)$$

12. Observa el ejemplo y resuelve.

$$\bullet 6 \cdot 5 - 4 \cdot 7 - 28 : 4 + 36 : 9 =$$

$$= 30 - 28 - 7 + 4 = 34 - 35 = -1$$

a)  $2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3$

b)  $30 : 6 - 42 : 7 - 27 : 9$

c)  $3 \cdot 5 - 4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 - 6 \cdot 5$

d)  $5 \cdot 4 - 28 : 4 - 3 \cdot 3$

## Resuelve problemas

13.  En una industria de congelados, la nave de envasado está a  $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ , y el interior del almacén frigorífico, a  $15\text{ }^{\circ}\text{C}$  bajo cero. ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre la nave y la cámara?
14.  Un día de invierno amaneció a dos grados bajo cero. A las doce del mediodía, la temperatura había subido 8 grados, y hasta las cinco de la tarde subió 3 grados más. Desde las cinco a medianoche bajó 5 grados, y de medianoche al alba bajó 6 grados más. ¿A qué temperatura amaneció el segundo día?
15.  Un buzo se encuentra en la plataforma base a 6 m sobre el nivel del mar y realiza estos desplazamientos:
- Baja 20 metros para dejar material.
  - Baja 12 metros más para hacer una soldadura.
  - Sube 8 metros para reparar una tubería.
  - Finalmente, vuelve a subir a la plataforma.
- ¿Cuánto ha subido en su último desplazamiento?

16.  Una estación de montaña emite este resumen de la evolución de sus finanzas a lo largo de un año:
- MARZO-JUNIO: Pérdidas de  $5\,675\text{ €/mes}$ .
- JULIO-AGOSTO: Ganancias de  $4\,280\text{ €/mes}$ .
- SEPTIEMBRE-NOVIEMBRE: Pérdidas de  $3\,240\text{ €/mes}$ .
- DICIEMBRE-FEBRERO: Ganancias de  $9\,720\text{ €/mes}$ .
- ¿Cuál fue el balance final del año?

17.  Un depósito se abastece de agua mediante un grifo que se abre cada día, automáticamente, durante un cuarto de hora, y aporta un caudal de 15 litros por minuto. Después, se conecta, durante hora y media, a un sistema de riego que demanda un caudal de 3 litros por minuto.
- Calcula cuánta agua gana o pierde el depósito al día.
  - Calcula la cantidad de agua que debe contener hoy, al iniciar el día, para que el riego se mantenga durante un mes.

## Autoevaluación

- Escribe un número entero para cada enunciado:
  - Jorge ha gastado 35 euros en el supermercado.
  - Adela ha recibido 6 euros de paga.
  - Hace frío. Estamos a dos grados bajo cero.
  - Mi casa está en la cuarta planta.
  - La temperatura ha subido de  $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $2\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
  - La fiebre le ha bajado de  $39\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
- ¿Verdadero o falso?
  - Todos los números enteros son naturales.
  - Todos los números naturales son enteros.
  - Algunos números negativos son enteros.
  - Todos los números positivos son enteros.
  - Cualquier número entero es mayor que cero.
- Representa estos números en una recta numérica:
 
$$(+3), (-4), (+1), (-6), (-1), (+5), (-5)$$
- Ordena de menor a mayor.
 
$$(+4), (-3), (+5), (-5), (+1), (-6), (+2), (-1)$$
- Calcula.
 

a) $4 - 9$	b) $3 - 8 + 1$
c) $-5 - 7 + 4 + 2$	d) $10 - 12 + 15 - 9 - 7$
- Opera.
 

a) $(-7) + (+4)$	b) $(+2) - (-3) + (-5)$
c) $(-8) - (5 - 9)$	d) $20 - [(15 - 9) - (7 + 3)]$
- Resuelve.
 

a) $5 \cdot (-2)$	b) $(-3) \cdot (-4)$	c) $(-1) \cdot (+3) \cdot (-5)$
d) $15 : (-3)$	e) $(-18) : (-6)$	f) $(-20) : [(+12) : (-3)]$
- Resuelve.
 

a) $4 \cdot 5 - 2 \cdot 8 - 3 \cdot 2$	b) $(-2) \cdot (6 - 8)$
c) $(-3) \cdot (+5) - [(8 - 12) - (5 - 2)]$	