

# 3

## Divisibilidad

Alejandro Magno fundó Alejandría en el siglo IV a.C., que pasó a ser el centro cultural (científico, artístico) de la civilización griega.



**E**l sabio griego **Euclides** vivió en Alejandría en el siglo III a.C., donde fundó una gran escuela de matemáticas. Recopiló y sistematizó todo el conocimiento matemático de su época y plasmó su obra en una colección de trece libros que se denominaron *Elementos*. La mayor parte de estos libros estaban dedicados a la geometría, y solo cuatro de ellos, a la aritmética. En estos últimos desarrolló, entre otras cosas, la teoría de la divisibilidad: números primos y compuestos, divisores, múltiplos, etc.

Los *Elementos* de Euclides han sido estudiados y admirados en todas las épocas.

© Grupo Anaya, S.A. Material fotocopiable autorizado.

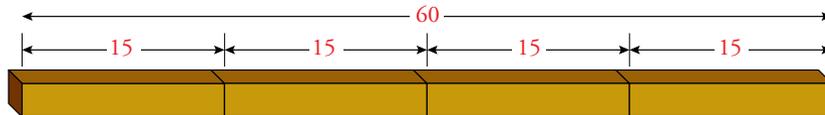
Nombre y apellidos: ..... Fecha: .....

# 1 La relación de divisibilidad

Dos números están emparentados por la **relación de divisibilidad** cuando uno contiene al otro una cantidad exacta de veces; es decir, cuando su **cociente es exacto**.

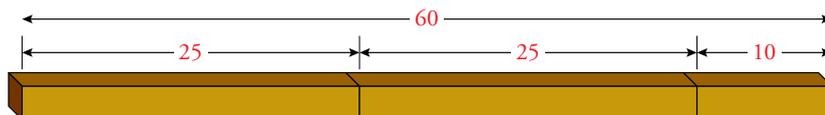
## Ejemplos

- Un listón de 60 cm se puede partir, exactamente, en trozos de 15 cm.



$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 15} \\ 00 \quad 4 \end{array} \rightarrow \text{La división es exacta.} \rightarrow 60 \text{ es divisible entre } 15.$$

- Sin embargo, un listón de 60 cm no se puede partir, exactamente, en trozos de 25 cm.

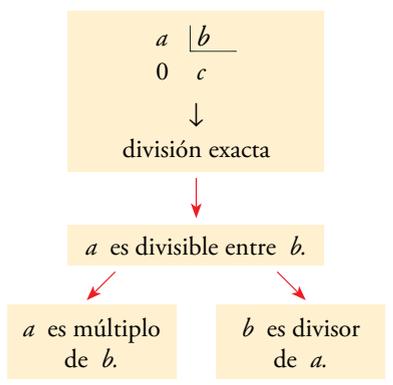


$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 25} \\ 10 \quad 2 \end{array} \rightarrow \text{La división no es exacta.} \rightarrow 60 \text{ no es divisible entre } 25.$$

### En la web

Practica la relación de divisibilidad.

## Relación de divisibilidad



## Ser múltiplo de..., ser divisor de...

Cuando dos números están emparejados por la relación de divisibilidad, decimos que:

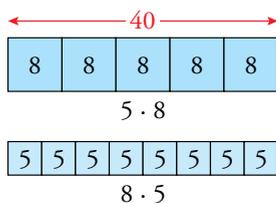
- El mayor es **múltiplo** del menor.
- El menor es **divisor** del mayor.

### Ejemplo

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 8} \\ 0 \quad 5 \end{array} \rightarrow 40 = 8 \cdot 5 \rightarrow \begin{cases} 40 \text{ es múltiplo de } 8. \\ 8 \text{ es divisor de } 40. \end{cases}$$

división exacta

- **a es múltiplo de b** o lo que es igual
  - **b es divisor de a**
- si la división  $a : b$  es exacta.



## Los divisores van por parejas

Cada divisor de un número lleva otro divisor emparejado.

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 8} \\ 0 \quad 5 \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{r} 40 \overline{) 5} \\ 0 \quad 8 \end{array}$$

8 es divisor de 40.      5 es divisor de 40.

**Piensa y practica**

- Piensa y contesta, justificando tus respuestas.
  - ¿Se puede dividir una clase de 30 alumnos en equipos de 7, sin que sobre ninguno?
  - Marta da pasos de 60 cm. ¿Puede recorrer 100 metros en un número exacto de pasos?
  - ¿Puede vaciarse una tina de aceite, de 1 500 litros, en un número exacto de garrafas de 5 litros?
  - ¿Tiene algún mes un número exacto de semanas?
- Observa estas divisiones y completa en tu cuaderno:

$\begin{array}{r} 36 \overline{)9} \\ 0 \quad 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \overline{)6} \\ 3 \quad 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 55 \overline{)5} \\ 05 \quad 11 \\ 0 \end{array}$
$\begin{array}{r} 126 \overline{)12} \\ 006 \quad 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 225 \overline{)15} \\ 75 \quad 15 \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 575 \overline{)23} \\ 115 \quad 25 \\ 00 \end{array}$

- 36 es divisible por ...
- 15 no es divisible por ...
- ...

- Di si los números de cada pareja están emparentados por la relación de divisibilidad:
  - 224 y 16
  - 420 y 35
  - 613 y 13
  - 513 y 19
  - 688 y 44
  - 2 070 y 46

- Copia estos números y une con flechas los que están emparentados por la relación de divisibilidad:

$12 \xrightarrow{\text{rojo}} 108$      $75$      $20$      $13$   
 $57$      $3$      $100$      $99$      $260$

- ¿Verdadero o falso?
  - 15 está contenido exactamente 4 veces en 60.
  - 75 está contenido exactamente 3 veces en 225.
  - 42 es divisible entre 7.
  - 54 es divisible entre 8.
  - 65 contiene a 13 un número exacto de veces.
- Busca todos los números que están contenidos en 24 una cantidad exacta de veces.
- Explica con claridad.
  - ¿Por qué 522 es múltiplo de 29?
  - ¿Por qué 17 es divisor de 544?

- Calcula y responde, justificando tu respuesta.
  - ¿Es 35 divisor de 728?
  - ¿Es 1 800 múltiplo de 90?
- Busca:
  - Tres números que sean divisores de 40.
  - Tres números que sean múltiplos de 7.
  - Tres números que sean divisores de 770.
  - Tres números que sean múltiplos de 50.

- Busca entre estos números:

$5 \quad 10 \quad 15 \quad 20 \quad 30$   
 $35 \quad 45 \quad 60 \quad 75 \quad 90$

- Todos los que sean divisores de 90.
- Todos los que sean múltiplos de 3.

- Considera estos números:

$8 \quad 10 \quad 20 \quad 24 \quad 30$   
 $45 \quad 60 \quad 75 \quad 95 \quad 120$

- ¿Cuáles son múltiplos de 4?
- ¿Cuáles son múltiplos de 10?
- ¿Cuáles son múltiplos de 15?

- Observa el ejemplo, copia en tu cuaderno y completa.

$$\left. \begin{array}{l} 20 : 5 = 4 \\ 20 : 4 = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 20 \text{ es múltiplo de } 4 \text{ y de } 5. \\ 4 \text{ y } 5 \text{ son divisores de } 20. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 12 : 4 = 3 \\ 12 : 3 = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12 \text{ es ... de } 3 \text{ y de } 4. \\ 3 \text{ y } 4 \text{ son ... de } 12. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 30 : 5 = 6 \\ 30 : 6 = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 56 : 7 = 8 \\ 56 : 8 = 7 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

- ¿Verdadero o falso?
  - Si  $m$  es divisible entre  $n$ ,  $n$  es divisible entre  $m$ .
  - Si  $a$  es distinto de  $b$  y divisible entre  $b$ ,  $a$  es mayor que  $b$ .
  - Si  $u$  es múltiplo de  $v$ ,  $v$  es divisor de  $u$ .
  - Si  $b$  cabe una cantidad exacta de veces en  $a$ ,  $b$  es múltiplo de  $a$ .
  - Si  $m \cdot n = k$ ,  $m$  y  $n$  son divisores de  $k$ .



- Encuentra múltiplos de un número.
- Encuentra divisores de un número.

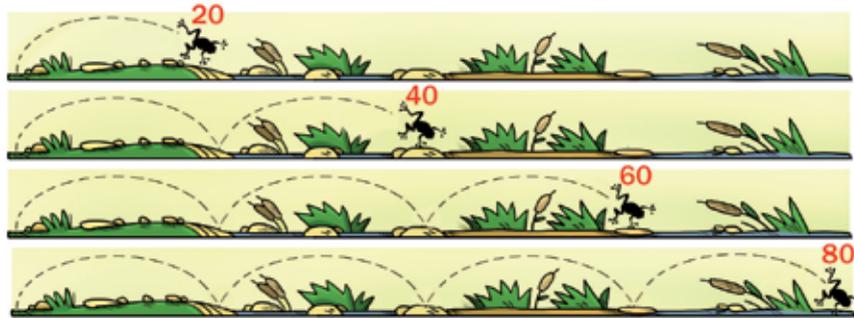
Nombre y apellidos: ..... Fecha: .....

# 2 Múltiplos de un número

Los múltiplos de un número son otros números, de igual o mayor tamaño, que lo contienen una cantidad exacta de veces. Por ejemplo, observa la longitud recorrida por la rana en sucesivos saltos de 20 centímetros:

## Múltiplos de 20

$$\begin{aligned} 20 \cdot 1 &= 20 \\ 20 \cdot 2 &= 40 \\ 20 \cdot 3 &= 60 \\ 20 \cdot 4 &= 80 \\ &\downarrow \\ 20 \cdot k \end{aligned}$$



Los números 20, 40, 60, 80, ... contienen a 20 una cantidad exacta de veces; es decir, todos ellos son múltiplos de 20.

Observa, también, que se obtienen multiplicando 20 por un número natural, y que la serie puede continuar indefinidamente.

$$\begin{array}{cccc} 20 \cdot 5 & 20 \cdot 6 & 20 \cdot 7 & 20 \cdot 8 \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 100 & 120 & 140 & 160 \dots \end{array}$$

## Notación

Cuando nos referimos a un múltiplo de un número, podemos escribirlo con un punto encima, así:

$$\begin{aligned} \dot{7} &\rightarrow \text{múltiplo de } 7 \\ \dot{a} &\rightarrow \text{múltiplo de } a \\ 18 = \dot{3} &\rightarrow 18 \text{ es múltiplo de } 3. \end{aligned}$$

- Los múltiplos de un número natural,  $a$ , se obtienen al multiplicar  $a$  por cualquier otro número natural  $k$ .  $a \cdot k \rightarrow$  **múltiplo de  $a$**
- Todo número natural,  $a$ , es múltiplo de sí mismo y de la unidad.  $\rightarrow a \cdot 1 = a$
- Un número distinto de cero tiene infinitos múltiplos.

## Piensa y practica

- Escribe.
  - Tres múltiplos de 5.
  - Tres múltiplos de 12.
  - Tres múltiplos de 19.
  - Tres múltiplos de 30.
- Añade cuatro términos a cada una de estas series:
  - Múltiplos de 6  $\rightarrow 6, 12, 18, 24, \dots$
  - Múltiplos de 15  $\rightarrow 15, 30, 45, 60, \dots$
  - Múltiplos de 53  $\rightarrow 53, 106, 159, 212, \dots$
- Busca, entre estos números, los que sean múltiplos de 6:
 

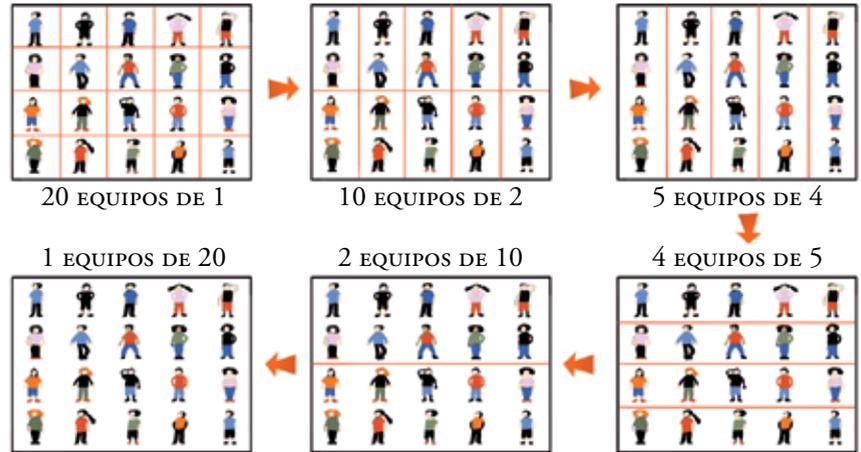
10 12 16 30 42 54 60 76 90 148 174
- Escribe los diez primeros múltiplos de 25.
- Escribe los veinte primeros múltiplos de 5.  
Fíjate en la última cifra. ¿Qué observas?  
¿Cómo sabes, de un vistazo, si un número es múltiplo de 5?

### Divisores de 20

$$\begin{aligned} 20 : 1 &= 20 \\ 20 : 2 &= 10 \\ 20 : 4 &= 5 \\ 20 : 5 &= 4 \\ 20 : 10 &= 2 \\ 20 : 20 &= 1 \end{aligned}$$

Los divisores de un número son otros números, de igual o menor tamaño, que están contenidos en él una cantidad exacta de veces.

Observa, por ejemplo, las distintas formas de dividir un grupo de 20 chicos y chicas en equipos iguales:



Cada uno de los números 1, 2, 4, 5, 10 y 20 está contenido en 20 una cantidad exacta de veces. Por tanto, todos ellos son divisores de 20.

Como puedes comprobar, forman parejas cuyo producto es 20:

$$1 \cdot 20 = 20 \quad 2 \cdot 10 = 20 \quad 4 \cdot 5 = 20$$

### Divisores de 30

Búsqueda de los divisores de 30:

$$\begin{aligned} 30 : 1 &= 30 \rightarrow \text{SÍ} \\ 30 : 2 &= 15 \rightarrow \text{SÍ} \\ 30 : 3 &= 10 \rightarrow \text{SÍ} \\ 30 : 4 & \rightarrow \text{NO} \\ 30 : 5 &= 6 \rightarrow \text{SÍ} \end{aligned}$$

Los divisores de 30 son:

1	2	3	5
↑	↑	↑	↑
30	15	10	6

• Para obtener todos los divisores de un número,  $a$ , buscamos las divisiones exactas:

$$\left. \begin{aligned} a : b = c \\ a : c = b \end{aligned} \right\} \rightarrow a = b \cdot c \rightarrow \text{Entonces } b \text{ y } c \text{ son } \mathbf{\textit{divisores}} \text{ de } a.$$

- Todo número es divisor de sí mismo.  $\rightarrow a : a = 1$
- El 1 es divisor de cualquier número.  $\rightarrow a : 1 = a$

### Piensa y practica

- Encuentra todos los divisores de cada uno de los números siguientes:
 

a) 8	b) 12
c) 15	d) 28
e) 36	f) 55
g) 60	h) 80
- Encuentra todos los divisores de:
 

a) 7	b) 13	c) 17	d) 29
------	-------	-------	-------

 ¿Qué observas?
- ¿De cuántas formas diferentes se pueden repartir en equipos iguales los 24 alumnos y alumnas de una clase? ¿Cuántos equipos salen en cada caso? (Por ejemplo, 3 equipos de 8 alumnos).

# 4 Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son reglas prácticas que sirven para descubrir si un número es divisible por 2, 3, 5 u otros números sencillos.

## ■ CÓMO AVERIGUAR SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE 2

Observa que todos los múltiplos de 2, y solo ellos, terminan en cifra par:

2	4	6	8	10
12	14	16	18	20
22	24	26	28	30
...	...	...	...	...

Un número es múltiplo de 2 si termina en cifra par:

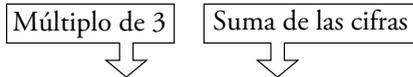
$$0 - 2 - 4 - 6 - 8$$

### Ejemplos

- 37(8) → cifra par  
378 es múltiplo de 2.
- 45(1) → cifra impar  
451 no es múltiplo de 2.

## ■ CÓMO AVERIGUAR SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE 3

Toma cualquier múltiplo de 3 y suma sus cifras. Verás que la suma es un múltiplo de 3.



$$3 \cdot 11 = 33 \rightarrow 3 + 3 = 6 \rightarrow \dot{3}$$

$$3 \cdot 24 = 72 \rightarrow 7 + 2 = 9 \rightarrow \dot{3}$$

$$3 \cdot 136 = 408 \rightarrow 4 + 0 + 8 = 12 \rightarrow \dot{3}$$

Un número es múltiplo de 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

### Ejemplos

- 359 →  $3 + 5 + 9 = 17 \neq \dot{3}$   
359 no es múltiplo de 3.
- 252 →  $2 + 5 + 2 = 9 = \dot{3}$   
252 es múltiplo de 3.

## ■ CÓMO AVERIGUAR SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE 5

Contempla, ahora, los múltiplos de 5 y fíjate en que todos, y solo ellos, terminan en 0 o en 5:

5	10
15	20
25	30
35	40
...	...

Un número es múltiplo de 5 si su última cifra es un cero o un cinco.

### Ejemplos

- 28(0) → es múltiplo de 5.
- 55(7) → no es múltiplo de 5.

### Piensa y practica

1. Copia y rodea los múltiplos de 2.

57 66 71 90 99  
111 162 228 483 805

3. Copia y rodea los múltiplos de 5.

328 155 207 735  
420 553 815

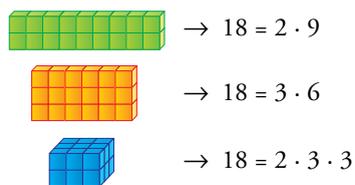
2. De los números siguientes, ¿cuáles son múltiplos de 3? Justifica tu respuesta.

173 186 390 510 555 679 754 1023

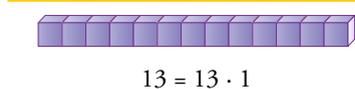
4. Escribe la sucesión de los veinte primeros múltiplos de 10. Obsérvalos. ¿Cómo sabes, de un vistazo, si un número es múltiplo de 10?

10 - 20 - 30 - 40 - ...

## Descomposiciones de 18



## El 13 no se puede descomponer



## En la web

Marca números primos en una tabla numérica.

## En la web

Clasifica en primos y compuestos.

Los divisores de un número permiten expresarlo en forma de producto.

## Ejemplo

$$18 \rightarrow \left( \begin{array}{c} \text{DIVISORES} \\ 1-2-3-6-9-18 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 18 = 2 \cdot 9 \\ 18 = 3 \cdot 6 \\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{cases}$$

Los números, como 18, que se pueden descomponer en factores más sencillos se llaman **números compuestos**.

Sin embargo, hay números que solo tienen dos divisores (el mismo número y la unidad), lo cual impide su descomposición.

## Ejemplo

$$13 \rightarrow \left( \begin{array}{c} \text{DIVISORES} \\ 1-13 \end{array} \right) \rightarrow 13 = 13 \cdot 1$$

Los números, como 13, que no se pueden descomponer en factores más sencillos se llaman **números primos**.

Un número primo solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.

En la tabla se han marcado:

- los múltiplos de 2, •, excepto el 2.
- los múltiplos de 3, •, excepto el 3.
- los múltiplos de 5, •, excepto el 5.
- ... y así, sucesivamente, con los múltiplos de 7, ⊕; de 11, \*; de 13, ▲; ...

1	②	③	4	⑤	6
⑦	8	9	10	⑪	12
⑬	14 <sub>⊕</sub>	15	16	⑰	18
⑱	20	21 <sub>⊕</sub>	22 <sub>*</sub>	⑳	24
25	26 <sub>▲</sub>	27	28 <sub>⊕</sub>	⑳	30

Los números sin marcar, rodeados con un círculo, son los primos menores que 30. Comprueba que ninguno de ellos se puede descomponer en factores.

El número 1, como solo tiene un divisor, no se considera primo. Cualquier otro número, o es primo o es compuesto.

## Piensa y practica

1. Clasifica en primos y compuestos.

5 8 11 15 21 28 31 33 45 49

2. Entre estos números hay dos primos. Búscalos.

47 57  
67  
77 87

Expresa cada uno de los compuestos como un producto de dos factores.

3. Busca todos los números primos menores que 60.

• Son diecisiete en total.

4. ¿Verdadero o falso?

- a) El número uno (1) no es primo ni compuesto.
- b) No hay números primos mayores que 100.
- c) Un número, si es impar, es primo.
- d) Todos los números primos, excepto el 2, son impares.

5. Descompón el número 100.

- a) En dos factores.
- b) En tres factores.
- c) En el máximo número de factores que sea posible.

# 6 Mínimo común múltiplo de dos números

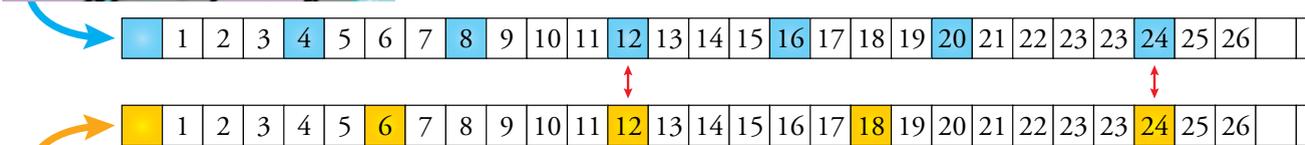
La resolución de ciertos problemas exige el manejo de los múltiplos comunes de varios números. Veamos un ejemplo:



### Ejemplo

En una compañía de taxis, tienen por norma lavar los coches cada cuatro días y revisar el nivel de aceite cada 6 días.

¿Cada cuántos días coinciden en un coche ambas tareas de mantenimiento?



Ambas coinciden en los días que son múltiplos comunes de 4 y 6, y se repiten cada 12 días.

### Cálculo del mín.c.m. (4, 6)

múltiplos de 4	→ 4 - 8 - 12 - 16 - 20 - 24
múltiplos de 6	→ 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36
múltiplos comunes	→ 12 - 24 - 36 - 48
mín.c.m. (4, 6) = 12	



El menor de estos múltiplos comunes es 12 y recibe el nombre de mínimo común múltiplo de 4 y 6.

El menor de los múltiplos comunes de dos o más números,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... se llama **mínimo común múltiplo**, y se expresa así:  
 mín.c.m. ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ...)

### Cálculo del mínimo común múltiplo (método artesanal)

Para obtener el mínimo común múltiplo de dos números:

- Escribimos los múltiplos de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el menor.

### Ejercicio resuelto

Calcular mín.c.m. (10, 15).

Múltiplos de 10 → 10 20 30 40 50 60 70 ...  
 Múltiplos de 15 → 15 30 45 60 75 90 105 ...  
 Múltiplos comunes → 30 - 60 - 90 ...

El menor de los múltiplos comunes de 10 y 15 es 30. } → mín.c.m. (10, 15) = 30

**Piensa y practica**

1. Copia, observa y completa a simple vista.

a)  $\dot{6} \rightarrow 6 \ 12 \ 18 \ 24 \ 30 \ 36 \ 42 \ 48 \ 54 \dots$   
 $\dot{8} \rightarrow 8 \ 16 \ 24 \ 32 \ 40 \ 48 \ 56 \dots$

mín.c.m. (6, 8) =

b)  $\dot{9} \rightarrow 9 \ 18 \ 27 \ 36 \ 45 \ 54 \ 63 \ 72 \dots$   
 $\dot{12} \rightarrow 12 \ 24 \ 36 \ 48 \ 60 \ 72 \ 84 \dots$

mín.c.m. (9, 12) =

c)  $\dot{15} \rightarrow 15 \ 30 \ 45 \ 60 \ 75 \ 90 \ 105 \dots$   
 $\dot{25} \rightarrow 25 \ 50 \ 75 \ 100 \ 125 \ 150 \dots$

mín.c.m. (15, 25) =

2. Calcula como en el ejercicio anterior.

- a) mín.c.m. (5, 8)
- b) mín.c.m. (8, 12)
- c) mín.c.m. (12, 24)
- d) mín.c.m. (30, 40)
- e) mín.c.m. (50, 75)
- f) mín.c.m. (200, 300)

3. Calcula mentalmente.

- a) mín.c.m. (6, 9)
- b) mín.c.m. (6, 12)
- c) mín.c.m. (5, 10)
- d) mín.c.m. (15, 20)

4. Observa, completa en tu cuaderno y calcula.

3	0	2	4	0	<input type="text"/>	5	4	<input type="text"/>
1	5	3	2	0	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	5	5	<input type="text"/>					
1			<input type="text"/>					
			1			1		

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $40 = \dots$   
 $54 = \dots$

mín.c.m. (30, 40) = ...  
 mín.c.m. (40, 54) = ...

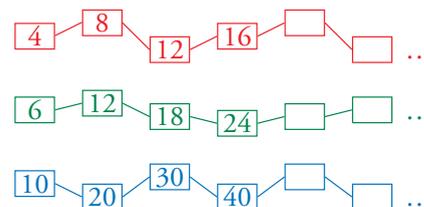
5. Calcula.

- a) mín.c.m. (20, 24)
- b) mín.c.m. (24, 36)
- c) mín.c.m. (54, 60)
- d) mín.c.m. (56, 70)
- e) mín.c.m. (120, 144)
- f) mín.c.m. (140, 180)
- g) mín.c.m. (168, 196)
- h) mín.c.m. (180, 270)

6. ¿Verdadero o falso?

- a) El mínimo común múltiplo de dos números es igual al mayor de ellos.
- b) El mín.c.m. de dos números contiene los factores comunes a ambos y también los no comunes.
- c) mín.c.m. (1, k) = k
- d) Si a es múltiplo de b, mín.c.m. (a, b) = a.
- e) El mínimo común múltiplo de dos números primos es su producto.

7. Julio cuenta de cuatro en cuatro; Adela, de seis en seis, y Virginia, de diez en diez. ¿Cuáles son los tres primeros números en los que coinciden?



8. Victoria tiene fichas de colores que puede apilar en montones de 8 y, también, en montones de 10 sin que sobre ninguna. Explica cuántas fichas puede tener Victoria y justifica tu respuesta.

9. Una fábrica envía mercancía a Valencia cada 6 días y a Sevilla cada 8 días. Hoy han coincidido ambos envíos. ¿Cuándo volverán a coincidir?

10. Se han construido dos columnas de igual altura: la primera apilando cubos de 40 cm de arista, y la segunda, con cubos de 30 cm de arista. ¿Qué altura alcanzarán sabiendo que superan los dos metros, pero no llegan a tres?

11. El autobús de la línea roja pasa por la parada, frente a mi casa, cada 20 minutos, y el de la línea verde, cada 30 minutos. Si ambos pasan juntos a las dos de la tarde, ¿a qué hora vuelven a coincidir?



**En la web** Resuelve los problemas: "Las balizas", "Los coches".

Nombre y apellidos: ..... Fecha: .....

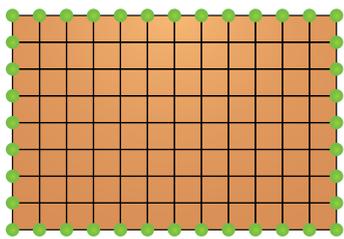
También encontrarás problemas que exigen el manejo de los divisores comunes a varios números. Veamos un ejemplo:

### Ejemplo

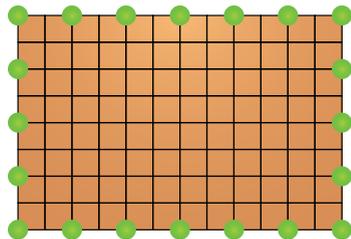
Se van a colocar maceteros, a intervalos iguales, en las esquinas y bordes de un patio interior de  $8 \times 12$  metros.

¿A qué distancia se debe colocar un macetero del siguiente?

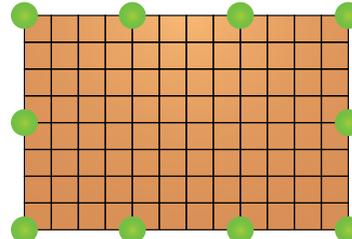
Tanteando, se encuentran tres posibles soluciones:



A 1 metro de distancia.

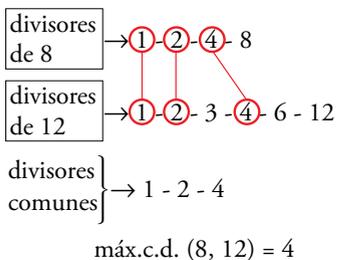


A 2 metros de distancia.



A 4 metros de distancia.

### Cálculo del máx.c.d. (8, 12)



Las soluciones coinciden con los divisores comunes de 8 y 12:

$$1 - 2 - 4$$

El mayor de estos divisores comunes es 4 y recibe el nombre de máximo común divisor de 8 y 12.

El mayor de los divisores comunes a dos o más números,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ... se llama **máximo común divisor**, y se expresa así:

$$\text{máx.c.d. } (a, b, c, \dots)$$

### Cálculo del máximo común divisor (método artesanal)

Para obtener el máximo común divisor de dos números:

- Escribimos los divisores de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el mayor.

### Ejercicio resuelto

Calcular máx.c.d. (20, 30)

Divisores de 20 → 1 - 2 - 4 - 5 - 10 - 20

Divisores de 30 → 1 - 2 - 3 - 5 - 6 - 10 - 15 - 30

Divisores comunes → 1 - 2 - 5 - 10

El mayor de los divisores comunes de 20 y 30 es 10. → máx.c.d. (20, 30) = 10

**Piensa y practica**

1. Copia en tu cuaderno, observa y completa.

a) Div. de 12 → ① ② 3 ④ 6 12

Div. de 16 → ① ② ④ 8 16

máx.c.d. (12, 16) =

b) Div. de 15 → ① 3 ⑤ 15

Div. de 20 → ① 2 4 ⑤ 10 20

máx.c.d. (15, 20) =

c) Div. de 24 → ① ② ③ 4 ⑥ 8 12 24

Div. de 30 → ① ② ③ 5 ⑥ 10 15 30

máx.c.d. (24, 30) =

2. Calcula como en el ejercicio anterior.

a) máx.c.d. (6, 8)                      b) máx.c.d. (8, 20)

c) máx.c.d. (10, 15)                  d) máx.c.d. (12, 24)

e) máx.c.d. (18, 24)                  f) máx.c.d. (40, 50)

3. Calcula mentalmente.

a) máx.c.d. (2, 3)                      b) máx.c.d. (4, 5)

c) máx.c.d. (3, 9)                      d) máx.c.d. (6, 9)

e) máx.c.d. (30, 40)                  f) máx.c.d. (50, 75)

4. Completa en tu cuaderno y calcula.

6 0	2	9 0	2	1 0 0	2
3 0	<input type="text"/>	4 5	<input type="text"/>	5 0	<input type="text"/>
<input type="text"/>					
<input type="text"/>					
1		1		1	

$60 = 2 \cdot \dots$  } máx.c.d. (60, 90) = ...  
 $90 = 2 \cdot \dots$  } máx.c.d. (60, 100) = ...  
 $100 = 2 \cdot \dots$  } máx.c.d. (90, 100) = ...

5. Calcula.

a) máx.c.d. (20, 24)                      b) máx.c.d. (24, 36)

c) máx.c.d. (54, 60)                      d) máx.c.d. (56, 70)

e) máx.c.d. (120, 144)                  f) máx.c.d. (140, 180)

g) máx.c.d. (168, 196)                  h) máx.c.d. (180, 270)

6. ¿Verdadero o falso?

a) El máximo común divisor de dos números es igual al menor de ellos.

b) El máx.c.d. de dos números contiene solo los factores primos comunes a ambos números.

c) máx.c.d. (1, k) = k

d) El máx.c.d. de dos números primos es uno.

e) Si a es divisible entre b, máx.c.d. (a, b) = b.

7. Supón que tienes una hoja de papel de 30 cm × 21 cm, y quieres dibujar sobre ella una cuadrícula lo más grande que sea posible en la que no haya cuadros fraccionados. ¿Cuál debe ser el tamaño de los cuadros?

8. Rosa ha sacado de la hucha un montón de monedas, todas iguales, y ha comprado un lapicero de 70 céntimos. Después, ha vuelto a la tienda y ha comprado un bolígrafo de 80 céntimos. ¿Cuál puede ser el valor de cada una de esas monedas si siempre ha dado el precio exacto? (Busca todas las soluciones posibles).

9. Alberto tiene 45 fichas rojas y 36 fichas verdes, y quiere apilarlas en columnas iguales, lo más altas que sea posible, y sin mezclar colores en la misma pila. ¿Cuántas fichas pondrá en cada montón?



10. El dueño de un restaurante compra un bidón de 80 litros de aceite de oliva y otro de 60 litros de aceite de girasol, y desea envasarlos en garrafas iguales, lo más grandes que sea posible, y sin mezclar. ¿Cuál será la capacidad de las garrafas?

11. Un carpintero tiene dos listones de 180 cm y 240 cm, respectivamente, y desea cortarlos en trozos iguales, lo más largos que sea posible, y sin desperdiciar madera. ¿Cuánto debe medir cada trozo?

Nombre y apellidos: ..... Fecha: .....

# Ejercicios y problemas

## La relación de divisibilidad

1. Reflexiona, contesta "Sí" o "No" y justifícalo.
  - a) ¿Se pueden guardar 300 litros de aceite en bidones de 15 litros sin que sobre nada?
  - b) Si sacas del horno 100 magdalenas, y las empaquetas por docenas, ¿queda alguna suelta?
  - c) ¿Se puede cortar un listón de 1,80 m en un número exacto de trozos de 20 cm?
  - d) ¿Hacen 100 minutos un número exacto de cuartos de hora?
2. Razona si existe relación de divisibilidad entre:
  - a) 20 y 300
  - b) 13 y 195
  - c) 38 y 138
  - d) 15 y 75
  - e) 23 y 203
  - f) 117 y 702

## Múltiplos y divisores

3. Calcula mentalmente.
  - a) Tres números contenidos una cantidad exacta de veces en 180.
  - b) Tres números que contengan a 15 una cantidad exacta de veces.
  - c) Tres divisores de 180.
  - d) Tres múltiplos de 15.
4. Escribe.
  - a) Los múltiplos de 20 comprendidos entre 150 y 210.
  - b) Un múltiplo de 13 comprendido entre 190 y 200.
  - c) Todos los pares de números cuyo producto es 80.
5. Busca todos los divisores de:
  - a) 10
  - b) 18
  - c) 20
  - d) 24
  - e) 28
  - f) 30
  - g) 39
  - h) 45
  - i) 50
  - j) 80

6. ¿De cuántas formas diferentes se pueden envasar 60 bombones en cajas con el mismo número de unidades en cada una sin que sobre ninguno?

7. ¿Cuáles de estas cantidades de dinero puedes obtener juntando billetes de cinco euros?:

15 €   22 €   37 €   45 €   80 €   94 €   120 €   1000 €

¿Y juntando billetes de 10 euros?

8. Escribe.
  - a) Todos los pares de números cuyo producto es 80.
  - b) Todos los divisores de 80.
9. Busca todas las formas posibles de hacer montones iguales con 72 terrones de azúcar.

## Criterios de divisibilidad

10. Escribe.
  - a) Un número de tres cifras que sea divisible por 3.
  - b) Un número de cuatro cifras que sea divisible por 5.
11. Sustituye cada letra por una cifra, para que el número resultante sea divisible entre 3.

A51   2B8   31C   52D   1E8

12. Busca, en cada caso, todos los valores posibles de  $a$  para que el número resultante sea, a la vez, múltiplo de 2 y de 3:

4 a   3 2 a   2 4 a

## Números primos y compuestos

13. Separa los números primos de los compuestos.

14	17	28	29	47	53
57	63	71	79	91	99
14. Busca el primer número, mayor que 500, que no se pueda expresar como el producto de dos factores diferentes de él mismo y de la unidad.
15. Averigua si el número 521 es primo o compuesto. Justifica tu respuesta.

## Mínimo común múltiplo y máximo común denominador

16. Calcula.
  - a) mín.c.m. (4, 8)
  - b) máx.c.d. (4, 8)
  - c) mín.c.m. (10, 20)
  - d) máx.c.d. (10, 20)
  - e) mín.c.m. (20, 30)
  - f) máx.c.d. (20, 30)
17. El mínimo común múltiplo de dos números es 15. ¿Cuáles pueden ser esos números?

## Resuelve problemas

18. Los miembros de un club social se pueden agrupar, sin que ninguno quede suelto, por parejas, por tríos y por grupos de 7.  
¿Cuántos miembros tiene el club, sabiendo que son más de 80 pero menos de 90?
19. Ramón tiene un montón de monedas de 10 céntimos, que puede agrupar en montones de 80 céntimos y también en montones de un euro.  
¿Cuánto dinero tiene, sabiendo que en total hay más de 5 € pero menos de 10 €?
20. Los trenes a Miramar salen cada 18 min, y los de Arandilla, cada 24 min. Si son las 15 h 45 min, y salen a la vez, ¿cuándo volverán a coincidir?
21. Se desea partir una cartulina de 48 cm × 60 cm en tarjetas cuadradas que tengan entre cinco y diez centímetros de lado. ¿Cuál debe ser el tamaño de las tarjetas para no desperdiciar recortes de cartulina?
22. Antonio tiene entre 40 y 50 años, justo el triple que su hijo Julio, que tiene menos de 15. ¿Cuántos años tiene cada uno?

23. Una bodega comercializa sus vinos en cajas con el mismo número de botellas.  
¿Cuántas botellas van en cada caja, si un comercio ha comprado 60 botellas de vino tinto, 57 de blanco y 45 de rosado?
24. Un vaso pesa 75 gramos, y una taza, 60 gramos.  
¿Cuántos vasos hay que colocar en uno de los platillos de una balanza, y cuántas tazas en el otro, para que la balanza quede equilibrada?
25. En un almacén de maderas se han apilado tablo-nes de pino, de un grosor de 35 mm, hasta alcanzar la misma altura que otra pila de tablo-nes de roble, de 20 mm de gruesos.  
¿Cuál será la altura de ambas pilas?  
Busca, al menos, tres soluciones.
26. Un comerciante, en un mercadillo, intercambia con un compañero un lote de camisetas que cuestan 24 € la unidad por un lote de zapatillas de 30 € la unidad.  
¿Cuántas camisetas entrega el comerciante y cuántas zapatillas recibe?

## Autoevaluación

1. Busca pares de números emparentados por la relación de divisibilidad:  
6    10    30    80
2. Contesta sí o no y justifica tu respuesta.  
a) ¿Es 60 divisible entre 15?  
b) ¿Es 5 múltiplo de 15?  
c) ¿Es 6 divisor de 30?  
d) ¿Es 162 múltiplo de 8?
3. Escribe.  
a) Los múltiplos de 6 comprendidos entre 50 y 70.  
b) Todos los divisores de 30.
4. Completa:  
a) Un número es múltiplo de 3 cuando ...  
b) Un número es divisible entre 5 cuando ...
5. Separa los primos de los compuestos:  
14 - 23 - 65 - 67 - 87 - 97 - 101 - 111
6. Calcula.  
a) mín.c.m. (10, 15)  
b) máx.c.d. (10, 15)  
c) mín.c.m. (30, 40)  
d) máx.c.d. (30, 40)
7. ¿De cuántas formas distintas se puede dividir una clase de 28 alumnos, en equipos con el mismo número de miembros, sin que sobre ninguno?
8. En un edificio de oficinas, el vigilante nocturno completa su ronda cada 30 minutos, y su compañero, que vigila el parque exterior, cada 40 minutos. Ambos inician su jornada a las diez de la noche. ¿A qué hora volverán a coincidir en el punto de partida?