

## LITERATURA Y MATEMÁTICAS

*El jugador*

[Un joven, el narrador de esta historia, y una señora mayor, apostando al cero en la ruleta de un casino, acaban de ganar una buena cantidad de dinero.]

—¡Hagan juego, señores! ¡Hagan juego! ¡No va más! —decía el *croupier*, dispuesto a hacer girar la ruleta.

—¡Dios mío! ¡Es demasiado tarde! ¡Ya van a tirar!... ¡Juega, juega, pues! —decía, inquieta, la abuela—. ¡No te entretengas, atolondrado!

Estaba nerviosa y me daba con el codo con todas sus fuerzas.

—¿A qué número juego, abuelita?

—Al cero. ¡Otra vez al cero! ¡Pon lo más posible! ¿Cuántos tenemos? ¿Setecientos federicos? Pon veinte de una sola vez.

—¡Reflexione, abuela! A veces está doscientas veces sin salir. Corre usted el riesgo de perder todo su dinero.

—No digas tonterías. ¡Juega! Oye cómo golpean con la raqueta. Sé lo que hago —dijo, presa de una agitación febril.

—El reglamento no permite poner en el cero más de doce federicos a la vez, abuela, y ya los he puesto. [...]

—Hecho el juego —anunció el *croupier*.

El disco giró y salió el 30. ¡Habíamos perdido!

—¡Sigue poniendo! —dijo la abuela.

Me encogí de hombros y sin replicar puse doce federicos. El platillo giró largo tiempo. La abuela observaba temblando. [...]

—¡Cero! —cantó el *croupier*.

—¡Lo ves! —gritó triunfalmente la abuela.

Comprendí en aquel momento que yo también era un jugador. Mis manos y mis piernas temblaban. Era realmente extraordinario que en un intervalo de diez jugadas el cero hubiese salido tres veces, pero sin embargo había sucedido así. Yo mismo había visto, ayer, que el cero había salido tres veces seguidas y un jugador, que anotaba cuidadosamente en un cuadernito todas las jugadas, me hizo notar que, antes de ayer, el mismo cero no se había dado más que una vez en veinticuatro horas.

FIÓDOR DOSTOIEVSKI

## El jugador

Fiódor Dostoievski

Se trata de una de las grandes novelas de la literatura universal y de las primeras donde se exponen los desastres que los juegos del azar pueden causar en las personas, algo que el autor sufrió en su propia carne.

En el siguiente párrafo se describe, por ejemplo, cómo algunos jugadores emplean métodos estadísticos para hacer sus jugadas.

Me abrí paso hacia el centro y me coloqué al lado mismo del *croupier*; luego empecé a probar tímidamente, apostando dos o tres monedas. Mientras tanto, observaba y tomaba nota; me pareció que el cálculo, propiamente significaba muy poco y no tiene en modo alguno la importancia que muchos jugadores le atribuyen. Éstos tienen ante sí unos papeles cuadriculados, observan las jugadas, cuentan, deducen las posibilidades, calculan y, por último, apuestan y pierden exactamente igual que nosotros, los simples mortales que jugamos sin calcular nada. En cambio, saqué una conclusión que parece ser justa: efectivamente, a lo largo de las suertes fortuitas, si no un sistema, hay, al menos, cierto orden, lo que sin duda resulta, naturalmente, muy extraño. Por ejemplo, suele ocurrir que después de los doce números centrales salen los doce últimos; dos veces, supongamos, salen estos últimos y luego se pasa a los doce primeros. De los doce primeros se pasa de nuevo a los doce del centro; salen éstos tres veces seguidas, cuatro, y de nuevo se pasa a los doce últimos, de los que, también después de dos veces, se pasa a los primeros; la bola cae una vez en éstos y de nuevo pasa por otras tres veces a los medios, siguiendo así durante hora y media o dos horas. Resulta muy divertido. Alguna tarde o alguna mañana ocurre, por ejemplo, que el rojo y el negro se suceden casi sin orden alguno a cada momento, de tal modo que no se da más de dos o tres veces seguidas un color u otro. Pero a la mañana o a la tarde siguiente le da por salir al rojo solamente, alcanzando, por ejemplo, hasta más de veintidós veces seguidas, y así sigue durante cierto tiempo, pongamos durante toda una mañana.

La novela no contiene más alusiones explícitas a las matemáticas, pero su lectura, además de las «lecciones morales» que conlleva, puede ser utilizada para diseñar algunas actividades didácticas relacionadas con la probabilidad como, por ejemplo, la propuesta en el libro del alumno.



En la ruleta están el cero y todos los números del 1 al 36. Calcula la probabilidad de que salga el cero y la probabilidad de que salga tres veces seguidas.

$$P(\text{Salir } 0) = \frac{1}{37}$$

$$P(\text{Tres veces seguidas el } 0) = \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} = \left(\frac{1}{37}\right)^3$$

# Probabilidad

## ANTES DE COMENZAR... RECUERDA

001 Calcula el resultado de estas operaciones.

a)  $10 \cdot 9!$

c)  $4! + 5!$

b)  $10! - 9!$

d)  $10! \cdot 9!$

a)  $10 \cdot 9! = 10! = 3.628.800$

b)  $10! - 9! = 10 \cdot 9! - 9! = 9! \cdot (10 - 1) = 9! \cdot 9 = 362.880 \cdot 9 = 3.265.920$

c)  $4! + 5! = 4! + 5 \cdot 4! = 4! \cdot (1 + 5) = 4! \cdot 6 = 24 \cdot 6 = 144$

d)  $10! \cdot 9! = 10 \cdot 9! \cdot 9! = 10 \cdot (9!)^2 = 10 \cdot 131.681.894.400 = 1.316.818.944.000$

002 Haz estas operaciones.

a)  $\binom{7}{4} + \binom{7}{5}$

b)  $\binom{10}{6} + \binom{9}{6}$

a)  $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$

b)  $\binom{10}{6} + \binom{9}{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} + \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 7 = 210 + 84 = 294$

003 Describe tres experimentos aleatorios y otros tres deterministas.

Respuesta abierta, por ejemplo:

• Deterministas:

– Medir la temperatura a la que se congela el agua destilada a 1.000 m de altura sobre el nivel del mar.

– Pesar un decímetro cúbico de mercurio.

– Medir el lado de un cuadrado de 10 m<sup>2</sup> de área.

• Aleatorios:

– Lanzar una moneda y observar el resultado.

– Elegir al azar una carta de una baraja.

– Predecir el resultado de un partido de fútbol.

## ACTIVIDADES

001 Todos los números de teléfono de la provincia de Toledo comienzan por 925. ¿Cuántos números de teléfono puede haber en toda la provincia?

Faltan por conocer los últimos 6 dígitos del número de teléfono.

$$925 \_ \_ \_ \_ \_ \_$$

$$VR_{10,6} = 10^6 = 1.000.000$$

Puede haber 1.000.000 de números de teléfono distintos.

002 ¿Cuántos números de cuatro cifras que comiencen por 1, y que no tengan ninguna cifra repetida, se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6?

Los números que se pueden formar tienen el siguiente patrón:

1 \_ \_ \_

En los huecos se pueden poner las cifras 2, 3, 4, 5 y 6 sin repetirse.

$$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Se pueden formar 60 números.

003 ¿De cuántas maneras posibles se pueden sentar 5 personas en un coche de 5 plazas? ¿Y si son 4 personas?

$$5 \text{ personas: } P_5 = 5! = 120$$

$$4 \text{ personas: } V_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

En ambos casos hay 120 maneras posibles.

004 Una recta pasa por dos puntos. ¿Cuántas rectas puede haber si tenemos 3 puntos no alineados? ¿Y si tenemos 25 puntos no alineados?

$$\text{Por 3 puntos: } C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

Puede haber 3 rectas.

Suponemos que en los 25 puntos no hay 3 puntos alineados.

$$C_{25,2} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{23! \cdot 2!} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

Puede haber 300 rectas.

005 ¿Cuántos equipos de fútbol de 11 jugadores se pueden formar con 18 personas?

Influye el orden, pues no es lo mismo jugar en una posición que en otra.

No se trabaja con todos los elementos, ya que disponemos de 18 jugadores para formar equipos de 11 jugadores.

No se pueden repetir los elementos, porque los 11 jugadores son distintos.

$$V_{18,11} = \binom{18}{11} = \frac{18!}{7!} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 1.270.312.243.200$$

Se pueden formar 1.270.312.243.200 equipos.

006 ¿De cuántas maneras se pueden colocar 8 libros distintos en una estantería?

Sí influye el orden.

Sí se trabaja con todos los elementos.

$$P_8 = 8! = 40.320$$

Se pueden colocar de 40.320 maneras distintas.

# Probabilidad

- 007 En un torneo de ajedrez con 16 participantes se van a celebrar partidas, de manera que cada jugador juegue una partida con cada uno de los demás participantes. ¿Cuántas partidas se jugarán en total?

No influye el orden.

$$C_{16,2} = \binom{16}{2} = \frac{16!}{14! \cdot 2!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$$

Se jugarán 120 partidas distintas.

- 008 Determina el espacio muestral del experimento de sacar una carta de una baraja española.

El espacio muestral está formado por cada una de las 40 cartas que componen la baraja española.

$E = \{\text{as oros, 2 oros, 3 oros, 4 oros, 5 oros, 6 oros, 7 oros, sota oros, caballo oros, rey oros, as copas, 2 copas, 3 copas, 4 copas, 5 copas, 6 copas, 7 copas, sota copas, caballo copas, rey copas, as bastos, 2 bastos, 3 bastos, 4 bastos, 5 bastos, 6 bastos, 7 bastos, sota bastos, caballo bastos, rey bastos, as espadas, 2 espadas, 3 espadas, 4 espadas, 5 espadas, 6 espadas, 7 espadas, sota espadas, caballo espadas, rey espadas}\}$

- 009 En el experimento anterior, encuentra dos sucesos compatibles, dos incompatibles, un suceso seguro y otro imposible.

Respuesta abierta, por ejemplo:

Sucesos compatibles: «Sacar oros» y «Sacar figura».

Sucesos incompatibles: «Sacar oros» y «Sacar copas».

Suceso seguro: «Sacar oros, copas, bastos o espadas».

Suceso imposible: «Sacar el 8 de copas».

- 010 En una urna tenemos 3 bolas blancas, numeradas del 1 al 3, y 2 bolas negras con los números 4 y 5, respectivamente.

Si sacamos una bola de la urna y observamos su color y su número, calcula el espacio muestral.

$$E = \{1 \text{ blanca, } 2 \text{ blanca, } 3 \text{ blanca, } 4 \text{ negra, } 5 \text{ negra}\}$$

- 011 En el experimento de sacar una carta de una baraja española, consideramos los sucesos  $A = \text{«Sacar una figura»}$  y  $B = \text{«Sacar oros»}$ . Obtén los sucesos.

a)  $A \cup B$       b)  $A \cap B$       c)  $\bar{A}$       d)  $\bar{B}$

a)  $A \cup B = \{\text{as oros, 2 oros, 3 oros, 4 oros, 5 oros, 6 oros, 7 oros, sota oros, caballo oros, rey oros, sota copas, caballo copas, rey copas, sota bastos, caballo bastos, rey bastos, sota espadas, caballo espadas, rey espadas}\}$

b)  $A \cap B = \{\text{sota oros, caballo oros, rey oros}\}$

- c)  $\bar{A} = \{\text{as oros, 2 oros, 3 oros, 4 oros, 5 oros, 6 oros, 7 oros, as copas, 2 copas, 3 copas, 4 copas, 5 copas, 6 copas, 7 copas, as bastos, 2 bastos, 3 bastos, 4 bastos, 5 bastos, 6 bastos, 7 bastos, as espadas, 2 espadas, 3 espadas, 4 espadas, 5 espadas, 6 espadas, 7 espadas}\}$
- d)  $\bar{B} = \{\text{as copas, 2 copas, 3 copas, 4 copas, 5 copas, 6 copas, 7 copas, sota copas, caballo copas, rey copas, as bastos, 2 bastos, 3 bastos, 4 bastos, 5 bastos, 6 bastos, 7 bastos, sota bastos, caballo bastos, rey bastos, as espadas, 2 espadas, 3 espadas, 4 espadas, 5 espadas, 6 espadas, 7 espadas, sota espadas, caballo espadas, rey espadas}\}$

012 En la extracción de una bola de una bolsa que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10, consideramos los sucesos  $A = \text{«Número par»}$  y  $B = \text{«Múltiplo de 3»}$ . Calcula.

- a)  $A \cup B$       b)  $A \cap B$       c)  $\overline{A \cup B}$       d)  $\overline{A \cap B}$
- a)  $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$   
 b)  $A \cap B = \{6\}$   
 c)  $\overline{A \cup B} = \{1, 5, 7\}$   
 d)  $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$

013 Se ha lanzado una moneda al aire 75 veces y se han obtenido 23 caras. ¿Podríamos decir que la moneda está trucada?

La frecuencia relativa del suceso «Salir cara» es  $\frac{23}{75} = 0,31$ ; que está muy lejos de la probabilidad teórica de salir cara en una moneda equilibrada, que es  $\frac{1}{2} = 0,5$ . Podemos deducir entonces que la moneda está trucada.

014 Una máquina fabrica piezas para motores de coche. Explica cómo calcularías la probabilidad de que, escogida una de las piezas al azar, sea defectuosa.

Observamos cuántas piezas defectuosas hay en un número grande de piezas fabricadas, por ejemplo 1.000, y el cociente se puede considerar como la probabilidad de que la pieza sea defectuosa.

015 Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado obtengamos un número entre 2 y 5.

$$P(\text{Obtener un número entre 2 y 5}) = \frac{2}{6} = 0,33$$

016 Halla la probabilidad de acertar 5 números de la Lotería Primitiva.

$$\text{Casos posibles: } C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{44! \cdot 6!} = 13.983.816$$

$$\text{Casos favorables: } C_{6,5} = \binom{6}{5} = 6$$

$$P(\text{Acertar 5 números}) = \frac{6}{13.983.816} = 0,000000429$$

# Probabilidad

017 Se lanzan dos dados y se suma la puntuación obtenida. Calcula la probabilidad de que:

- a) La suma no sea 8.                      b) La suma sea mayor que 9 y menor que 11.

Se realiza una tabla con los posibles resultados.

Resultado dado 1 \ Resultado dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a)  $P(\text{Suma} \neq 8) = \frac{31}{36} = 0,86$

b)  $P(9 < \text{Suma} < 11) = P(\text{Suma} = 10) = \frac{3}{36} = 0,083$

018 Se lanzan dos monedas y se observan los resultados. Halla la probabilidad de que:

- a) Salga, al menos, una cara.                      b) Salga una cara o dos cruces.

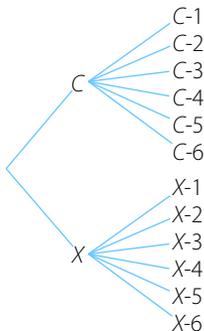
Los posibles resultados del experimento están en la siguiente tabla:

Resultado moneda 1 \ Resultado moneda 2	C	X
C	CC	XC
X	CX	XX

a)  $P(\text{Al menos una cara}) = 1 - P(\text{Ninguna cara}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$

b)  $P(\text{Una cara o dos cruces}) = P(\text{Una cara}) + P(\text{Dos cruces}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$

019 Lanzamos una moneda y un dado. Determina el espacio muestral mediante un diagrama de árbol.



- 020 Extraemos 2 bolas de una urna que contiene 5 bolas numeradas. Halla el espacio muestral.

$$E = \{1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5, 4-5\}$$

- 021 De los 22 alumnos de una clase, 14 son chicos, y de ellos, hay 6 que llevan gafas; sin embargo, solo hay 2 chicas que tienen gafas. Calcula la probabilidad de que, elegido un alumno al azar, sea chica y no lleve gafas.

Construimos una tabla de contingencia.

	Lleva gafas	No lleva gafas	Total
Chicos	6	8	14
Chicas	2	6	8
Total	8	14	22

$$P(\text{Chica y no lleva gafas}) = \frac{6}{22} = 0,27$$

- 022 De las 32 personas que viajan en un autobús, 18 van a trabajar, y de estas, 10 son hombres. De las que no van a trabajar, 5 son mujeres. Si se elige una persona al azar y es hombre, calcula la probabilidad de que no vaya a trabajar.

Consideramos los siguientes sucesos:

$$T = \text{«Personas que van a trabajar»} \quad H = \text{«Ser hombre»} \quad M = \text{«Ser mujer»}$$

Construimos una tabla de contingencia.

	H	M	Total
T	10	8	18
$\bar{T}$	9	5	14
Total	19	13	32

$$P(\bar{T}/H) = \frac{\text{n.º de hombres que no van a trabajar}}{\text{n.º total de hombres}} = \frac{9}{19} = 0,473$$

- 023 En una urna tenemos 2 bolas blancas y 2 azules. Si la primera bola que extraemos no se vuelve a introducir en la urna, halla la probabilidad de obtener una bola azul y, después, una bola blanca.

$$P(1.ª \text{ bola azul} \cap 2.ª \text{ bola blanca}) = P(1.ª \text{ bola azul}) \cdot P(2.ª \text{ bola blanca} / 1.ª \text{ bola azul}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{12} = 0,33$$

- 024 En una ciudad, el 55% de los habitantes consume pan integral, el 30% consume pan blanco y el 20% consume ambos.

- Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que coma pan blanco?
- Sabiendo que un habitante consume pan blanco, ¿cuál es la probabilidad de que no coma pan integral?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa ciudad no consuma ninguno de los dos tipos de pan?

# Probabilidad

Consideramos los siguientes sucesos:

$A = \text{«Comer pan integral»}$        $B = \text{«Comer pan blanco»}$

Sus probabilidades son:

$$P(A) = 0,55 \quad P(B) = 0,3 \quad P(A \cap B) = 0,2$$

$$a) P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,55} = 0,36$$

$$b) P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3 - 0,2}{0,3} = 0,33$$

$$c) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Se calcula la probabilidad de la unión.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,55 + 0,3 - 0,2 = 0,65$$

Luego se tiene que:  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,65 = 0,35$

025

Se sabe que en un centro de enseñanza el 30% de los alumnos aprueban la asignatura  $A$ , el 40% la asignatura  $B$  y el 5% aprueban ambas.

Calcula la probabilidad de que un alumno:

- Habiendo aprobado la asignatura  $A$ , apruebe la  $B$ .
- Habiendo aprobado la asignatura  $B$ , apruebe la  $A$ .
- No habiendo aprobado la asignatura  $A$ , apruebe la  $B$ .
- No habiendo aprobado la asignatura  $B$ , apruebe la  $A$ .
- No habiendo aprobado la asignatura  $A$ , no apruebe la  $B$ .

Consideramos los siguientes sucesos:

$A = \text{«Aprueba la asignatura } A\text{»}$        $B = \text{«Aprueba la asignatura } B\text{»}$

Sus probabilidades son:

$$P(A) = 0,3 \quad P(B) = 0,4 \quad P(A \cap B) = 0,05$$

$$a) P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,05}{0,3} = 0,167$$

$$b) P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,05}{0,4} = 0,125$$

$$c) P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - 0,3} = \frac{0,4 - 0,05}{0,7} = 0,5$$

$$d) P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - 0,4} = \frac{0,3 - 0,05}{0,6} = 0,417$$

$$e) P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{A})}$$

Se calcula la probabilidad de la unión.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,05 = 0,65$$

Ahora se tiene que:  $P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - 0,65}{1 - 0,3} = \frac{0,35}{0,7} = 0,5$

- 026 Extraemos dos bolas de una urna en la que hay 5 bolas rojas, 2 azules y 3 blancas. Calcula la probabilidad de que la segunda bola sea roja si la primera lo es, y no la hemos devuelto a la urna. ¿Cuál sería la probabilidad si devolviéramos la primera bola antes de sacar la segunda?

$R$  = «Obtener bola roja»

$A$  = «Obtener bola azul»

$B$  = «Obtener bola blanca»

- Sin devolver la bola los sucesos no son independientes.

$$P(R_1/R_2) = \frac{\text{n.º de bolas rojas en la 2.ª extracción}}{\text{n.º total de bolas en la 2.ª extracción}} = \frac{4}{9} = 0,44$$

- Devolviendo la bola los sucesos son independientes.

$$P(R_2/R_1) = \frac{P(R_2 \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{P(R_2) \cdot P(R_1)}{P(R_1)} = P(R_2) = \frac{5}{10} = 0,5$$

- 027 De una baraja española se extraen dos cartas. Calcula la probabilidad de que la primera sea un as y la segunda sea deoros si:

- Se sacan las dos cartas a la vez.
- Se reemplaza la primera carta antes de sacar la segunda.

$A$  = «Primera carta sea un as»

$O$  = «Segunda carta sea deoros»

- Si se sacan a la vez los sucesos no son independientes.

$$\begin{aligned} P(A \cap O) &= P(\text{As deoros}) \cdot P(O/\text{As deoros}) + \\ &\quad + P(\text{As no deoros}) \cdot P(O/\text{As no deoros}) = \\ &= \frac{1}{40} \cdot \frac{9}{39} + \frac{3}{40} \cdot \frac{10}{39} = \frac{1}{40} = 0,025 \end{aligned}$$

- Si se devuelve la primera carta, los sucesos son independientes.

$$P(A \cap O) = P(A) \cdot P(O) = \frac{4}{40} \cdot \frac{10}{40} = 0,025$$

- 028 El porcentaje de tornillos defectuosos y del total de producción, que fabrican tres máquinas, viene recogido en la siguiente tabla.

	$M_1$	$M_2$	$M_3$
Producción	40%	25%	35%
Defectuosos	2%	5%	3%

Halla la probabilidad de que un tornillo sea defectuoso.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(M_1) \cdot P(D/M_1) + P(M_2) \cdot P(D/M_2) + P(M_3) \cdot P(D/M_3) = \\ &= 0,4 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,03 = 0,031 \end{aligned}$$

# Probabilidad

- 029 Disponemos de dos urnas, que contienen bolas de colores. La primera urna,  $U_1$ , contiene 2 bolas blancas y 12 negras, y la segunda urna,  $U_2$ , tiene 3 bolas blancas y 10 negras.

Si escogemos una urna al azar y sacamos una bola:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que resulte de color negro?  
b) ¿Y de que sea de color blanco?

$$a) P(N) = P(U_1) \cdot P(N/U_1) + P(U_2) \cdot P(N/U_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{13} = \frac{74}{91}$$

$$b) P(B) = P(U_1) \cdot P(B/U_1) + P(U_2) \cdot P(B/U_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{13} = \frac{17}{91}$$

- 030 El porcentaje de tornillos defectuosos y del total de producción, que fabrican tres máquinas, es:

	$M_1$	$M_2$	$M_3$
Producción	40%	25%	35%
Defectuosos	2%	5%	3%

Si el tornillo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la máquina 1?

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1) \cdot P(D/M_1)}{P(M_1) \cdot P(D/M_1) + P(M_2) \cdot P(D/M_2) + P(M_3) \cdot P(D/M_3)} = \frac{0,4 \cdot 0,02}{0,031} = 0,258$$

- 031 Disponemos de dos urnas, que contienen bolas de colores. La primera urna,  $U_1$ , contiene 2 bolas blancas y 12 negras, y la segunda urna,  $U_2$ , tiene 3 bolas blancas y 10 negras.

Si la bola extraída es de color negro, calcula la probabilidad de que:

- a) Sea de la primera urna.  
b) Sea de la segunda urna.

$$a) P(U_1/N) = \frac{P(U_1) \cdot P(N/U_1)}{P(U_1) \cdot P(N/U_1) + P(U_2) \cdot P(N/U_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{14}}{\frac{74}{91}} = \frac{273}{518}$$

$$b) P(U_2/N) = \frac{P(U_2) \cdot P(N/U_2)}{P(U_1) \cdot P(N/U_1) + P(U_2) \cdot P(N/U_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{13}}{\frac{74}{91}} = \frac{455}{962}$$

- 032 ¿En cuántos puntos se cortan, como máximo, 5 líneas rectas?

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Se cortan como máximo en 10 puntos.

033 Con las letras de la palabra MURCIÉLAGO, ¿cuántas palabras se pueden formar con 6 letras?

- a) Si se pueden repetir.                      b) Si no se pueden repetir.

$$a) VR_{10,6} = 10^6 = 1.000.000$$

$$b) V_{10,6} = \frac{10!}{4!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151.200$$

034 ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1 y 2, que no empiecen por 2?

Como no empiezan por 2, tienen que empezar por 1 y nos quedan 4 huecos por rellenar.

$$VR_{2,4} = 2^4 = 16$$

Podemos formar 16 números.

035 Calcula cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con 3 letras de tu nombre, si:

- a) Se pueden repetir.                      b) No se pueden repetir.

Respuesta abierta. Cuenta el número de letras diferentes que tiene tu nombre,  $n$ .

- a) Si se pueden repetir las letras.

$$VR_{n,3} = n^3$$

- b) Si no se pueden repetir las letras, hay que suponer que el número de letras diferentes que tiene tu nombre es mayor o igual que 3.

$$V_{n,3} = \frac{n!}{(n-3)!}$$

Por ejemplo, si tu nombre fuera PILAR:  $n = 5$

$$a) VR_{5,3} = 5^3 = 125$$

$$b) V_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

036 La escala musical se compone de 7 notas: do, re, mi, fa, sol, la y si. ¿Cuántas melodías diferentes podemos componer con 150 notas?

El número de melodías es:  $VR_{7,150} = 7^{150}$

037 En código Morse se escribe cada letra del alfabeto mediante series de puntos (.) y rayas (-):

A se escribe utilizando 2 símbolos  $\rightarrow . -$

B se escribe utilizando 4 símbolos  $\rightarrow - . . .$

¿Cuántas series diferentes hay si utilizamos como máximo 4 símbolos?

$$VR_{2,1} + VR_{2,2} + VR_{2,3} + VR_{2,4} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$$

Se pueden construir 30 series diferentes.

# Probabilidad

- 038 Calcula el número de pulseras diferentes de 20 bolas de colores que podemos elaborar si tenemos bolas de 5 colores.

$$VR_{5,20} = 5^{20} = 95.367.431.640.625$$

Se pueden formar 95.367.431.640.625 pulseras diferentes.

- 039 Un alumno tiene 8 asignaturas en un curso. La nota de cada asignatura puede ser suspenso, aprobado, notable o sobresaliente. ¿Cuántos boletines de notas distintos puede obtener?

$$VR_{4,8} = 4^8 = 65.536$$

Puede obtener 65.536 boletines de notas distintos.

- 040 Un grupo de 12 personas quiere hacer una excursión en coche. Si en cada coche viajan 5 personas:

- a) ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar?  
b) ¿En cuántos de estos grupos estarán Carlos y María, que son dos de las 12 personas que van a la excursión?

$$a) C_{12,5} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 792$$

$$b) C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$

- 041 Describe el espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en lanzar 2 dados y anotar la resta de los números de las caras superiores.

Se realiza una tabla con los posibles resultados.

Resultado dado 1 \ Resultado dado 2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

- 042 En una urna tenemos 8 bolas rojas, 4 amarillas y 1 verde. Si extraemos una bola al azar y anotamos su color, ¿cuál es el espacio muestral?

$$E = \{\text{roja, amarilla, verde}\}$$

- 043 Jaime lanza 2 dados y, después, suma la puntuación obtenida. Describe el espacio muestral de este experimento. Haz lo mismo si, tras sumar los puntos, hallamos el resto al dividir entre 3.

Se realiza una tabla con los posibles resultados de la suma.

Resultado dado 1 \ Resultado dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Si hallamos el resto al dividir entre 3, el espacio muestral es  $E = \{0, 1, 2\}$ .

044 Se lanza un dado con 12 caras numeradas del 1 al 12, y se consideran los sucesos:



$A = \text{«Salir número par»}$

$B = \text{«Salir número impar»}$

$C = \text{«Salir múltiplo de 3»}$

$D = \text{«Salir múltiplo de 5»}$

$F = \text{«Salir número mayor que 5»}$

$G = \text{«Salir número menor que 4»}$

- Escribe estos sucesos.
- Señala los pares de sucesos que son incompatibles.
- ¿Hay tres sucesos que sean incompatibles?
  - $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$   
 $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$   
 $C = \{3, 6, 9, 12\}$   
 $D = \{5, 10\}$   
 $F = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$   
 $G = \{1, 2, 3\}$
  - Son incompatibles  $A$  y  $B$ ,  $C$  y  $D$ ,  $D$  y  $G$ ,  $F$  y  $G$ .
  - Tres sucesos son incompatibles cuando no pueden suceder de forma simultánea; en este caso, por ejemplo, son sucesos incompatibles  $A$ ,  $F$  y  $G$ , pues  $A \cap F \cap G = \emptyset$ , aunque la intersección, dos a dos, de ellos no es el conjunto vacío.

045 Considera el lanzamiento de 4 monedas. Describe el espacio muestral y escribe los sucesos elementales de los siguientes sucesos:

$A = \text{«Obtener al menos una cara»}$

$B = \text{«Obtener una sola cara»}$

Con estos datos, determina:

a)  $A \cup B$

b)  $A \cap B$

c)  $A$

d)  $B$

# Probabilidad

$$E = \{\text{CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC, XXCC, CXXX, XCXX, XXCX, XXXC, XXXX}\}$$

$$A = \{\text{CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC, XXCC, CXXX, XCXX, XXCX, XXXC}\}$$

$$B = \{\text{CXXX, XCXX, XXCX, XXXC}\}$$

a)  $A \cup B = \{\text{CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC, XXCC, CXXX, XCXX, XXCX, XXXC}\}$

b)  $A \cap B = \{\text{CXXX, XCXX, XXCX, XXXC}\}$

c)  $A = \{\text{CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC, XXCC, CXXX, XCXX, XXCX, XXXC}\}$

d)  $B = \{\text{CXXX, XCXX, XXCX, XXXC}\}$

046

Consideramos las 28 fichas del dominó. Si cogemos una ficha y sumamos los puntos, escribe:

a)  $A = \text{«Obtener múltiplo de 5»}$

c)  $A \cup B \text{ y } A \cap B$

b)  $B = \text{«Obtener número par»}$

d)  $A \cup A \text{ y } B \cap B$

Se realiza una tabla con los posibles resultados de la suma.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1		2	3	4	5	6	7
2			4	5	6	7	8
3				6	7	8	9
4					8	9	10
5						10	11
6							12

a)  $A = \{0-5, 1-4, 2-3, 4-6, 5-5\}$

b)  $B = \{0-2, 0-4, 0-6, 1-1, 1-3, 1-5, 2-2, 2-4, 2-6, 3-3, 3-5, 4-4, 4-6, 5-5, 6-6\}$

c)  $A \cup B = \{0-2, 0-4, 0-5, 0-6, 1-1, 1-3, 1-4, 1-5, 2-2, 2-3, 2-4, 2-6, 3-3, 3-5, 4-4, 4-6, 5-5, 6-6\}$

$A \cap B = \{4-6, 5-5\}$

d)  $A \cup A = A$

$B \cap B = B$

047

De una baraja española se extrae una carta. Calcula la probabilidad de estos sucesos.

a)  $A = \text{«Obtener oros»}$

b)  $B = \text{«Obtener el rey de oros»}$

c)  $C = \text{«Obtener espadas o copas»}$

a)  $P(A) = \frac{10}{40} = 0,25$

b)  $P(B) = \frac{1}{40} = 0,025$

c)  $P(C) = \frac{20}{40} = 0,5$

- 048 Se lanza un dado y se suman los puntos de todas las caras menos de la cara de arriba. Obtén la probabilidad de obtener un número que sea múltiplo de 3.

El espacio muestral es  $E = \{20, 19, 18, 17, 16, 15\}$

$$P(\text{Múltiplo de 3}) = \frac{2}{6} = 0,33$$

- 049 De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta al azar, se pide calcular la probabilidad de que la carta extraída no sea un rey.

(Aragón. Septiembre 2001. Opción A. Cuestión 3)

$$P(\text{No sea rey}) = \frac{36}{40} = 0,9$$

- 050 Se elige un número natural entre el 1 y el 20 de manera que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 2 o por 3? ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y no por 6?

(Madrid. Septiembre 2003. Opción B. Ejercicio 3)

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

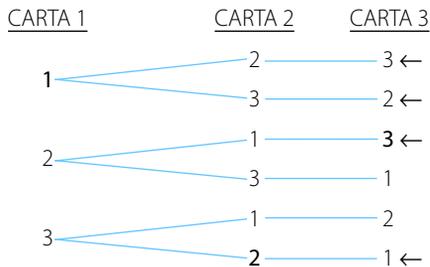
$$P(\text{Divisible por 2 o divisible por 3}) = \frac{13}{20} = 0,65$$

$$P(\text{Divisible por 3 y no divisible por 6}) = \frac{3}{20} = 0,15$$

- 051 Un cartero reparte al azar 3 cartas entre 3 destinatarios. Calcula la probabilidad de que al menos una de las 3 cartas llegue a su destino correcto.

(Castilla y León. Junio 2008. Bloque B. Pregunta 4)

Se construye un diagrama de árbol con las diferentes posibilidades: la carta llega a su destino correcto cuando su número coincide con el número del destinatario.



$$P(\text{Al menos una carta llegue al destino correcto}) = \frac{4}{6} = 0,67$$

# Probabilidad

052 Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regalan un peluche, si al tirar un dardo se acierta en un blanco. Si solo se permite tirar tres dardos y la probabilidad de acertar es 0,3:

- ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche?
- ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer intento? ¿Y de llevarse exactamente en el segundo?

(Madrid. Septiembre 2002. Opción A. Ejercicio 3)

Se considera el siguiente suceso:

$A_i$  = «Acertar en la diana en el disparo  $i$ -ésimo»

- $P(\text{Llevarse el peluche}) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = 0,3 + 0,7 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,657$
- $P(\text{Llevarse en el tercer intento}) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,147$   
 $P(\text{Llevarse en el segundo intento}) = P(\bar{A}_1 \cap A_2) = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21$

053 En una rifa con 500 papeletas, 75 tienen un premio de 100 €, 150 tienen un premio de 25 € y 275 un premio de 10 €. Elegida una papeleta al azar, calcular la probabilidad de que:

- Se obtenga un premio de 25 €.
- Se obtenga un premio menor de 100 €.

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 2. Ejercicio B)

- $P(\text{Obtener un premio de 25 €}) = \frac{150}{500} = 0,3$
- $P(\text{Obtener un premio menor de 100 €}) = \frac{150 + 275}{500} = \frac{425}{500} = 0,85$

054 En una urna hay 100 bolas numeradas del 1 al 100. Sacamos una bola y definimos los siguientes sucesos:

$A$  = « $n$  es múltiplo de 5»

$B$  = « $n$  es múltiplo de 3»

$C$  = « $n$  es divisible por 2»

$D$  = « $n$  es divisible por 10»

$F$  = « $n$  es divisible por 1»

$G$  = « $n$  es múltiplo de 11»

- ¿Cuántos sucesos elementales componen cada suceso? ¿Cuál es su probabilidad?
- ¿Hay dos sucesos incompatibles?
- ¿Y dos sucesos compatibles?
- ¿Hay dos sucesos contrarios?
- Halla la probabilidad de  $A \cap B$  y  $B \cup C$ .

$$a) \text{ N.º de sucesos elementales de } A = 20 \rightarrow P(A) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$\text{N.º de sucesos elementales de } B = 33 \rightarrow P(B) = \frac{33}{100} = 0,33$$

$$\text{N.º de sucesos elementales de } C = 50 \rightarrow P(C) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$\text{N.º de sucesos elementales de } D = 10 \rightarrow P(D) = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$\text{N.º de sucesos elementales de } F = 100 \rightarrow P(F) = \frac{100}{100} = 1$$

$$\text{N.º de sucesos elementales de } G = 9 \rightarrow P(G) = \frac{9}{100} = 0,09$$

b) Sí, por ejemplo  $G$  y  $D$ .

c) Sí, por ejemplo el suceso  $D$  es compatible con  $A$  y con  $C$ .

d) No.

$$e) P(A \cap B) = \frac{6}{100} = 0,06$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{67}{100} = 0,67$$

055 Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que  $P(\bar{A}) = 0,60$ ;  $P(B) = 0,25$  y  $P(A \cup B) = 0,55$ . Calcule  $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ .

(Andalucía. Año 2006. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 3)

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 + 1 - P(B) - P(\overline{A \cup B}) = \\ &= 0,6 + 1 - 0,25 - (1 - P(A \cup B)) = 0,6 - 0,25 + 0,55 = 0,9 \end{aligned}$$

056 Calcula  $P(A \cup B)$  y  $P(A \cap B)$  sabiendo que  $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,4$ ;  $P(A) = 0,6$  y  $P(B) = 0,8$ .

(Castilla y León. Junio 2005. Bloque B. Pregunta 4)

Definimos las siguientes variables:

$$P(A \cup B) = x \quad P(A \cap B) = y$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{aligned} P(A \cup B) - P(A \cap B) &= 0,4 && \rightarrow x - y = 0,4 \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow x = 0,6 + 0,8 - y && \rightarrow x + y = 1,4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0,4 \\ x + y = 1,4 \end{cases} \rightarrow 2x = 1,8 \rightarrow x = 0,9$$

$$x - y = 0,4 \xrightarrow{x=0,9} 0,9 - y = 0,4 \rightarrow y = 0,5$$

Luego tenemos que  $P(A \cup B) = 0,9$  y  $P(A \cap B) = 0,5$ .

# Probabilidad

057 En un experimento aleatorio, se consideran dos sucesos  $A$  y  $B$ . La probabilidad de que no se verifique  $A$  es  $0,1$ . La probabilidad de que no se verifique  $B$  es  $0,4$ . La probabilidad de que no se verifique  $A$  ni  $B$  es  $0,04$ . Hallar la probabilidad de que:

- Se verifique el suceso  $A$  o se verifique el suceso  $B$ .
- Se verifique el suceso  $A$  y se verifique el suceso  $B$ .

*(Castilla-La Mancha. Septiembre 2000. Bloque 1. Ejercicio B)*

Tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(\bar{A}) = 0,1 \quad P(\bar{B}) = 0,4 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,04$$

a)  $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,04 = 0,96$

b) Nos piden calcular  $P(A \cap B)$ , y antes hallamos las siguientes probabilidades.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,9 \quad P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0,6$$

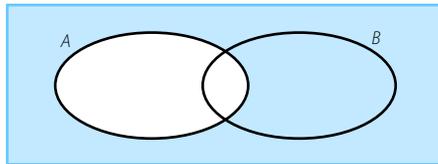
Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 0,9 + 0,6 - 0,96 = 0,54$$

058 Calcula la probabilidad del suceso  $\bar{A} \cap B$  sabiendo que la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos sucesos  $A$  o  $B$  es  $0,8$  y que  $P(A) = 0,3$ .

*(Castilla y León. Junio 2008. Bloque A. Pregunta 4)*

Representamos el suceso del que tenemos que calcular su probabilidad y se tiene que:



$$P(\bar{A} \cap B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,8 - 0,3 = 0,5$$

059 En un dado trucado se verifica que:

$$P(1) = P(2) = P(6) = r \quad P(3) = P(4) = P(5) = s$$

Sabiendo que la probabilidad de que al lanzar el dado salga una puntuación mayor que 3 es de  $\frac{3}{5}$ , encuentre los valores de  $r$  y  $s$ .

*(Murcia. Septiembre 2003. Bloque 4. Cuestión 1)*

Tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(1) = P(2) = P(6) = r \quad P(3) = P(4) = P(5) = s$$

Como la probabilidad de todo el espacio muestral es 1 y conocemos la probabilidad de obtener una puntuación mayor que 3, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \rightarrow r + r + s + s + s + r = 1 \rightarrow 3r + 3s = 1$$

$$P(4) + P(5) + P(6) = \frac{3}{5} \rightarrow s + s + r = \frac{3}{5} \rightarrow 2s + r = \frac{3}{5}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 3r + 3s = 1 \\ r + 2s = \frac{3}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r + s = \frac{1}{3} \\ r + 2s = \frac{3}{5} \end{cases} \rightarrow s = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

$$r + 2s = \frac{3}{5} \xrightarrow{s = \frac{4}{15}} r + 2 \cdot \left(\frac{4}{15}\right) = \frac{3}{5} \rightarrow r = \frac{3}{5} - \frac{8}{15} = \frac{1}{15}$$

- 060 Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda y un dado. Determina la probabilidad de los siguientes sucesos:

$A$  = «Obtener una cruz en la moneda y un 5 en el dado»

$B$  = «Obtener una cara en la moneda y un número menor que 3 en el dado»

$C$  = «Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado»

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

- 061 Se lanzan dos dados  $A$  y  $B$  con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea múltiplo de 4?

(Castilla y León. Junio 2006. Bloque A. Pregunta 4)

Se realiza una tabla con los posibles resultados de la suma.

Resultado dado A \ Resultado dado B	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(\text{Múltiplo de 4}) = \frac{9}{36} = 0,25$$

- 062 Se lanza una moneda (equilibrada) cuatro veces. Hallar la probabilidad de obtener un número impar de caras.

(País Vasco. Julio 2007. Apartado C. Ejercicio 1)

$$P(\text{Número impar de caras}) = P(1 \text{ cara}) + P(3 \text{ caras}) =$$

$$= \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{8}{16} = 0,5$$

# Probabilidad

- 063 Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas.
- Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble.
  - Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.

(Madrid. Junio 2002. Opción B. Ejercicio 3)

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{Tres veces 6 doble}) &= P(6 \text{ doble}) \cdot P(6 \text{ doble}) \cdot P(6 \text{ doble}) = \\ &= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = 0,00002 \\ \text{b) } P(\text{Tres dobles distintos del 6 doble}) &= \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{36} \cdot \frac{5}{36} = 0,00268 \end{aligned}$$

- 064 Se lanza una moneda tres veces y se consideran los sucesos:

$A$  = «Obtener al menos dos veces cara»  
 $B$  = «Obtener cara en el segundo lanzamiento»

- Describe el espacio muestral asociado al experimento. Calcule  $P(A)$  y  $P(A \cup B)$ .
- Los sucesos  $A$  y  $B$ , ¿son incompatibles?



(Andalucía. Año 2007. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 3)

$$\begin{aligned} \text{a) } E &= \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\} \\ P(A) &= \frac{4}{8} = 0,5 \\ P(A \cup B) &= \frac{5}{8} = 0,625 \\ \text{b) } \text{No, porque } A \cap B &= \{CCC, CCX, XCC\}. \end{aligned}$$

- 065 Se truca una moneda de forma que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz. Si se lanza tres veces esta moneda:

- Calcula el espacio muestral para este experimento.
- Calcula la probabilidad de obtener dos cruces y una cara.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 2. Ejercicio B)

- $E = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$
- La probabilidad de obtener una cruz es  $x$  y la de obtener una cara es el doble,  $2x$ . Como la probabilidad de obtener cara o cruz al tirar una moneda es 1:

$$x + 2x = 1 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{Luego se tiene que } P(X) = \frac{1}{3} \text{ y } P(C) = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} P(\text{Dos cruces y una cara}) &= P(CXX, XCX, XXC) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{2}{27} = \frac{2}{9} = 0,22 \end{aligned}$$

066 De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener:

- Tres reyes.
- Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera.
- Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.

(Madrid. Junio 2003. Opción B. Ejercicio 3)

$$a) P(\text{Tres reyes}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = 0,0004$$

$$b) P(1.^\circ \text{ una figura, } 2.^\circ \text{ un cinco, } 3.^\circ \text{ un seis}) = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = 0,0032$$

$$c) P(\text{Un as, un tres y un seis}) = 3! \cdot \left( \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} \right) = 0,0065$$

067 Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

(Madrid. Septiembre 2006. Opción B. Ejercicio 3)

$$\begin{aligned} P(\text{Mismo color}) &= P(\text{Dos bolas blancas}) + P(\text{Dos bolas negras}) = \\ &= \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{110}{210} = 0,52 \end{aligned}$$

068 En una bolsa de caramelos surtidos hay 10 caramelos con sabor a naranja, 5 con sabor a limón y 3 con sabor a fresa. Todos tienen el mismo tamaño y hasta extraerlos de la bolsa no se sabe de qué sabor son. Se extraen tres caramelos al azar:

- Calcular de forma razonada la probabilidad de extraer primero uno con sabor a naranja, luego uno con sabor a fresa y, por último, uno con sabor a limón.
- Calcular de forma razonada la probabilidad de que sean de tres sabores diferentes.

(C. Valenciana. Septiembre 2002. Ejercicio B. Problema 4)

$$a) P(1.^\circ \text{ sabor naranja, } 2.^\circ \text{ sabor fresa, } 3.^\circ \text{ sabor limón}) = \frac{10}{18} \cdot \frac{3}{17} \cdot \frac{5}{16} = 0,03$$

- La probabilidad de que sean de diferente sabor es la probabilidad del apartado anterior multiplicada por las distintas formas de combinar esos sabores, es decir,  $P_3 = 3! = 6$ .

$$P(\text{Sabor naranja, sabor fresa, sabor limón}) = 6 \cdot \frac{150}{4.896} = 0,18$$

069 Tres hombres A, B y C disparan a un objetivo. Las probabilidades de que cada uno de ellos alcance el objetivo son  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{3}$  respectivamente. Calcular:

- La probabilidad de que todos alcancen el objetivo.
- La probabilidad de que ninguno alcance el objetivo.
- La probabilidad de que al menos uno de ellos alcance el objetivo.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 4. Cuestión 1)

# Probabilidad

Tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad P(\bar{A}) = \frac{5}{6} \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad P(\bar{B}) = \frac{3}{4} \quad P(C) = \frac{1}{3} \quad P(\bar{C}) = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{Todos alcancen el objetivo}) &= P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{72} = 0,014 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\text{Ninguno alcance el objetivo}) &= P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{30}{72} = 0,417 \end{aligned}$$

070

De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace 2 dianas de cada 3 disparos, y el otro consigue 3 dianas de cada 4 disparos. Si los dos disparan simultáneamente, calcula:



- La probabilidad de que los dos acierten.
- La probabilidad de que uno acierte y el otro no.
- La probabilidad de que ninguno acierte.
- La probabilidad de que alguno acierte.
- Sumar las probabilidades de a), b) y c), justificando la suma obtenida.

*(C. Valenciana. Septiembre 2007. Ejercicio B. Problema 4)*

Tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(\text{Acerte el primer tirador}) = \frac{2}{3} \quad P(\text{Acerte el segundo tirador}) = \frac{3}{4}$$

$$P(\text{No acerte el primer tirador}) = \frac{1}{3} \quad P(\text{No acerte el segundo tirador}) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{Acierten los dos}) &= P(\text{Acerte el 1.º y acerte el 2.º}) = \\ &= P(\text{Acerte el 1.º}) \cdot P(\text{acerte el 2.º}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\text{Acerte uno y otro no}) &= \\ &= P(\text{Acerte el 1.º y no acerte el 2.º}) + P(\text{No acerte el 1.º y acerte el 2.º}) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12} = 0,42 \end{aligned}$$

- c)  $P(\text{Ninguno acierte}) = P(\text{No acierte el 1.º y no acierte el 2.º}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = 0,08$
- d)  $P(\text{Alguno acierte}) = 1 - P(\text{Ninguno acierte}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} = 0,92$
- e)  $P(\text{Aciercen los dos}) + P(\text{Acierte uno y otro no}) + P(\text{Ninguno acierte}) =$   
 $= 0,5 + 0,42 + 0,08 = 1$

Los sucesos descritos en los apartados a), b) y c) son tres sucesos incompatibles y cuya unión es el total; por tanto, la suma de sus probabilidades es 1.

071 La probabilidad de que un estudiante universitario termine su carrera en los años establecidos por el plan de estudios es  $\frac{3}{5}$  y la de que su hermana finalice la suya sin perder ningún año es  $\frac{2}{3}$ . Halla la probabilidad de que:

- Ambos terminen sus estudios en los años establecidos.
- Solo el varón los termine en el plazo fijado.
- Al menos uno de los dos termine en el tiempo establecido.

(Navarra. Junio 2004. Ejercicio 3. Opción A)

Definimos los siguientes sucesos:

$A = \text{«Un estudiante termine su carrera en los años establecidos»}$

$B = \text{«La hermana termine su carrera en los años establecidos»}$

- a)  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} = 0,4$
- b)  $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = 0,2$
- c)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{9 + 10 - 6}{15} = \frac{13}{15} = 0,87$

072 En una caja hay diez bombillas, dos de las cuales son defectuosas. Con el fin de detectarlas las vamos probando una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarea finalice exactamente en el tercer intento?

(País Vasco. Junio 2006. Apartado C. Ejercicio 1)

Definimos el siguiente suceso y calculamos su probabilidad y la del complementario:

$D_i = \text{«Sacar una bombilla defectuosa en el intento } i\text{-ésimo»}$

Como acabamos en el tercer intento, necesariamente en este intento escogeremos una bombilla defectuosa, luego tenemos que calcular la probabilidad de los sucesos:  $D_1 \cap \bar{D}_2 \cap D_3$  y  $\bar{D}_1 \cap D_2 \cap D_3$ .

$$\begin{aligned}
 P(\text{Finalizar en el tercer intento}) &= P(D_1 \cap \bar{D}_2 \cap D_3) + P(\bar{D}_1 \cap D_2 \cap D_3) = \\
 &= \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{32}{720} = 0,044
 \end{aligned}$$

# Probabilidad

073 Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos aleatorios tales que  $P(\bar{A}) = 0,6$ ;  $P(B) = 0,7$  y  $P(A \cup B) = 1$ .  
Calcula estas probabilidades.

- a)  $P(A \cap B)$                       c)  $P(B/A)$                       e)  $P(\bar{A}/B)$   
b)  $P(A/B)$                         d)  $P(A \cap \bar{B})$                       f)  $P(\bar{B}/A)$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) = (1 - P(\bar{A})) + P(B) - P(A \cup B) = \\ &= (1 - 0,6) + 0,7 - 1 = 0,1 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,7} = 0,14$$

$$\text{c) } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

$$\text{d) } P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$$

$$\text{e) } P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,7 - 0,1}{0,7} = \frac{0,6}{0,7} = 0,86$$

$$\text{f) } P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

074 Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos aleatorios tales que  $P(A) = 0,2$ ;  $P(B) = 0,2$  y  $P(A \cup B) = 0,4$ .  
Calcula  $P(A/B)$  y  $P(B/A)$ . Razona si los sucesos  $A$  y  $B$  son independientes.

Primero calculamos  $P(A \cap B)$ .

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,2 + 0,2 - 0,4 = 0$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{0,2} = 0 \qquad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{0,2} = 0$$

Los sucesos no son independientes, ya que  $P(A/B) \neq P(A)$  o  $P(B/A) \neq P(B)$ .

075 a) Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que  $P(A) = 0,5$ ,  
que  $P(B) = 0,4$  y que  $P(A \cup B) = 0,8$ , determine  $P(A/B)$ .

b) Sean  $C$  y  $D$  dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que  $P(C) = 0,3$ ,  
que  $P(D) = 0,8$  y que  $C$  y  $D$  son independientes, determine  $P(C \cup D)$ .

(Andalucía. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 3)

$$\text{a) } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} = \frac{0,5 + 0,4 - 0,8}{0,4} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(C \cup D) &= P(C) + P(D) - P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C) \cdot P(D) = \\ &= 0,3 + 0,8 - 0,3 \cdot 0,8 = 0,86 \end{aligned}$$

076 Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos aleatorios tales que  $P(A) = 0,6$ ;  $P(B) = 0,5$  y  $P(A/B) = 0,5$ .  
Calcula estas probabilidades.

- a)  $P(A \cap B)$                       c)  $P(B/A)$                       e)  $P(\bar{A} \cup B)$   
b)  $P(A \cup B)$                       d)  $P(A \cap \bar{B})$                       f)  $P(\bar{B}/A)$

$$a) P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

$$b) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,25 = 0,85$$

$$c) P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,25}{0,6} = 0,42$$

$$d) P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,25 = 0,35$$

$$e) P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(A \cap B) = 0,4 + 0,25 = 0,65$$

$$f) P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,35}{0,6} = 0,58$$

077 Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos aleatorios tales que  $P(A) = 0,7$ ;  $P(B) = 0,2$  y  $P(A/B) = 1$ .

a) Calcula las probabilidades siguientes:  $P(A \cap B)$ ,  $P(A \cup B)$  y  $P(B/A)$ .

b) ¿Son los sucesos  $A$  y  $B$  independientes?

(C. Valenciana. Septiembre 2008. Ejercicio B. Problema 4)

$$a) P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 1 \cdot 0,2 = 0,2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,2 - 0,2 = 0,7$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,7} = 0,29$$

b) No, porque no se cumple:  $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \rightarrow 0,2 \neq 0,7 \cdot 0,2 = 0,14 \neq 0,2$

078 Un artesano hace pulseras de cuero o de metal. El 60% de las pulseras que ha fabricado son de cuero, y de ellas, el 25% son cortas. Si el 55% de las pulseras de metal también son cortas, elegida una pulsera que es corta, ¿cuál es la probabilidad de que sea de metal?

Definimos los siguientes sucesos:

$Cu$  = «Pulsera de cuero»

$M$  = «Pulsera de metal»

$C$  = «Pulsera corta»

$$P(Cu) = 0,6 \quad P(M) = 0,4$$

$$P(C/Cu) = 0,25 \rightarrow P(C \cap Cu) = \frac{P(C \cap Cu)}{P(Cu)} \rightarrow P(C \cap Cu) = 0,25 \cdot 0,6 = 0,15$$

$$P(C/M) = 0,55 \rightarrow P(C \cap M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} \rightarrow P(C \cap M) = 0,55 \cdot 0,4 = 0,22$$

$$P(C) = 0,15 + 0,22 = 0,37 \rightarrow P(M/C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,22}{0,37} = 0,59$$

# Probabilidad

- 079 Una fábrica produce tornillos niquelados y dorados, siendo el 75 % de los tornillos que produce niquelados. El porcentaje de tornillos defectuosos producidos es del 4 % para los tornillos niquelados y del 5 % para los dorados. Se elige al azar un tornillo y resulta no ser defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niquelado?

(Murcia, Septiembre 2008, Bloque 4, Cuestión 2)

Definimos los siguientes sucesos:

$N$  = «Tornillo niquelado»

$D$  = «Tornillo dorado»

$Def$  = «Tornillo defectuoso»

$$P(N) = 0,75 \quad P(D) = 0,25$$

$$P(Def / N) = 0,04 \rightarrow P(Def \cap N) = \frac{P(Def \cap N)}{P(N)} \rightarrow P(Def \cap N) = 0,04 \cdot 0,75 = 0,03$$

$$P(Def / D) = 0,05 \rightarrow P(Def \cap D) = \frac{P(Def \cap D)}{P(D)} \rightarrow P(Def \cap D) = 0,05 \cdot 0,25 = 0,0125$$

$$P(Def) = 0,03 + 0,0125 = 0,0425$$

$$\rightarrow P(N / \overline{Def}) = \frac{P(N \cap \overline{Def})}{P(\overline{Def})} = \frac{P(N) - P(N \cap Def)}{1 - P(Def)} = \frac{0,75 - 0,03}{1 - 0,0425} = 0,752$$

- 080 De 500 habitantes 350 leen la prensa escrita habitualmente y 300 ven las noticias en televisión. Sabemos que un 35 % del total hace las dos cosas. Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar:

- Vea las noticias, sabiendo que lee la prensa.
- No vea las noticias, sabiendo que lee la prensa.

Definimos los siguientes sucesos y calculamos sus probabilidades.

$A$  = «Habitantes de la población que leen la prensa»

$$P(A) = \frac{350}{500} = 0,7$$

$T$  = «Habitantes de la población que ven las noticias en televisión»

$$P(T) = \frac{300}{500} = 0,6$$

$$P(\text{Lee la prensa sabiendo que ve la televisión}) = P(A/T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0,35}{0,6} = 0,58$$

$P(\text{No lee la prensa sabiendo que ve la televisión}) =$

$$= P(\overline{A}/T) = \frac{P(\overline{A} \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T) - P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0,6 - 0,35}{0,6} = \frac{0,25}{0,6} = 0,42$$



081 El 70% de los estudiantes aprueba una asignatura A y un 60% aprueba otra asignatura B. Sabemos, además, que un 35% del total aprueba ambas.

- Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar apruebe la asignatura B, supuesto que ha aprobado la A.
- Calcular la probabilidad de que dicho estudiante apruebe la asignatura B, supuesto que no ha aprobado la A.

(Murcia. Septiembre 2008. Bloque 4. Cuestión 1)

Tenemos las siguientes probabilidades:

$A = \text{«Aprobar la asignatura A»}$        $B = \text{«Aprobar la asignatura B»}$

$P(A) = 0,7$        $P(B) = 0,6$        $P(A \cap B) = 0,35$

$$\text{a) } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,35}{0,7} = 0,5$$

$$\text{b) } P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,6 - 0,35}{0,3} = \frac{0,25}{0,3} = 0,83$$

082 A una excursión van 40 hombres, de los que 25 son mayores de 65 años, así como 60 mujeres, de las que 25 son menores de 65 años. Elegida una persona menor de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Se construye la siguiente tabla de contingencia:

	> 65	≤ 65	
Hombres	25	15	40
Mujeres	35	25	60
	60	40	100

Nos piden hallar esta probabilidad:

$$P(\text{Hombre} / \leq 65) = \frac{P(\text{Hombre} \cap \leq 65)}{P(\leq 65)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{15}{40} = 0,375$$

083 A una reunión asisten 100 varones, de los que 25 son rubios, así como 300 mujeres, de las que 125 son rubias. Se elige una persona al azar.

- Si tal persona es rubia ¿cuál es la probabilidad de que sea un varón?
- ¿Son independientes los sucesos «Ser rubio» y «Ser varón»?

(País Vasco. Julio 2008. Apartado C. Ejercicio 2)

Definimos los siguientes sucesos:

$V = \text{«Ser varón»}$        $M = \text{«Ser mujer»}$        $R = \text{«Ser rubio»}$

Se construye esta tabla de contingencia:

	No Rubio	Rubio	
V	75	25	100
M	175	125	300
	250	150	400

# Probabilidad

$$a) P(V/R) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{25}{400}}{\frac{150}{400}} = \frac{25}{150} = 0,17$$

b) Los sucesos «Ser rubio» y «Ser varón» son independiente si se cumple que  $P(V/R) = P(V)$ .

$$P(V/R) = 0,17 \quad P(V) = \frac{100}{400} = 0,25$$

Luego los sucesos no son independientes.

084

Se realiza una encuesta sobre la aceptación de dos productos  $A$  y  $B$  entre la población. El 45% de la población consume el producto  $A$ , el 30% consume el producto  $B$  y el 20% consume ambos productos. Seleccionado un individuo de esa población al azar, se pide:

- Si consume el producto  $A$ , calcular la probabilidad de que consuma el producto  $B$ .
- Si consume el producto  $B$ , calcular la probabilidad de que no consuma el producto  $A$ .
- Calcular la probabilidad de que no consuma ni  $A$  ni  $B$ .

(Navarra. Septiembre 2008. Ejercicio 3. Opción A)

Definimos los siguientes sucesos:

$A$  = «Consuma el producto  $A$ »       $B$  = «Consuma el producto  $B$ »

Tenemos estas probabilidades.

$$P(A) = 0,45 \quad P(B) = 0,3 \quad P(A \cap B) = 0,2$$

$$a) P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,45} = 0,44$$

$$b) P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3 - 0,2}{0,3} = 0,33$$

$$c) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \overline{P(A \cup B)} = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,45 + 0,3 - 0,2) = 0,45$$

085

Se han metido 6 bolas rojas y 4 negras en la urna 1, y 3 bolas rojas y 4 negras en la urna 2. Se saca una bola de la primera urna y se pasa a la segunda. A continuación se saca una bola de la segunda urna.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sacada sea negra?
- Si finalmente salió una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que hubiéramos pasado una bola roja?

$$a) P(N_2) = P(R_1) \cdot (N_2/R_1) + P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{11}{20}$$

$$b) P(R_1/R_2) = \frac{P(R_1) \cdot P(R_2/R_1)}{P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) + P(N_1) \cdot P(R_2/N_1)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{20}} = \frac{2}{3}$$

086

En la central telefónica de una empresa hay tres telefonistas,  $A$ ,  $B$  y  $C$ , que atienden a la misma proporción de clientes. Cuando estos solicitan hablar con el servicio técnico, los telefonistas deben derivar la llamada, de forma aleatoria, a las extensiones 1, 2, 3 o 4. Pero  $A$  solo tiene acceso a las extensiones 1, 2 y 3;  $B$  solo puede comunicar con 2, 3 y 4 y, finalmente,  $C$  solo tiene acceso a 1 y 4.

- ¿Cuál es la probabilidad de que te atienda  $C$ ?
- ¿Y de llamar al servicio técnico y que te atienda 4?
- ¿Cuál es la probabilidad de que te atienda 3, si el telefonista que te respondió fue  $A$ ?
- ¿Y la de que te pasen con el número 1, si no te atendió  $C$ ?

$$a) P(C) = \frac{1}{3}$$

$$b) P(E_4) = P(A) \cdot P(E_4/A) + P(B) \cdot P(E_4/B) + P(C) \cdot P(E_4/C) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

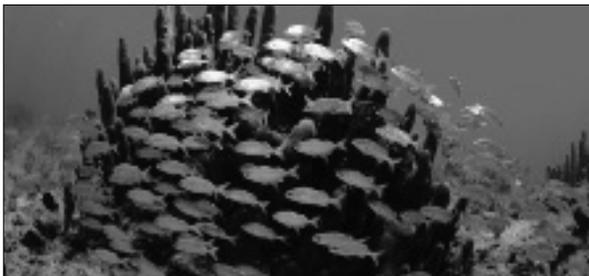
$$c) P(E_3/A) = \frac{1}{3}$$

$$d) P(E_1/\bar{C}) = P(E_1/A) + P(E_1/B) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

087

El 1% de los peces de una variedad europea presenta una malformación congénita. Ese defecto está presente en el 3% de los peces de la variedad africana. En un criadero de peces, el 80% de sus ejemplares es de procedencia europea y el resto africana.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un pez del criadero no tenga esa malformación?
- Si el criadero tiene aproximadamente dos millones de peces, ¿cuántos no tendrán esa malformación?



$$a) P(\bar{D}) = P(E) \cdot P(\bar{D}/E) + P(A) \cdot P(\bar{D}/A) = 0,8 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,03 = 0,014$$

$$b) 0,014 \cdot 2.000.000 = 28.000 \text{ ejemplares no tendrán esa malformación.}$$

# Probabilidad

088 Una empresa automovilística fabrica su modelo *Assegurat* en cuatro factorías distintas, *A*, *B*, *C* y *D*. La factoría *A* produce el 40% de los coches de este modelo con un 5% de defectuosos, la *B* produce el 30% con un 4% de defectuosos, la *C* el 20% con un 3% de defectuosos y, por último, la factoría *D* el 10% restante con un 2% de defectuosos. Si elegimos un coche del modelo *Assegurat* al azar, calcula:

- La probabilidad de que sea defectuoso.
- Si no es defectuoso, la probabilidad de que haya sido fabricado en la factoría *C*.

*(C. Valenciana. Septiembre 2008. Ejercicio A. Problema 4)*

- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Def}) = P(A) \cdot P(\text{Def}/A) + P(B) \cdot P(\text{Def}/B) + P(C) \cdot P(\text{Def}/C) + P(D) \cdot P(\text{Def}/D) = \\ = 0,4 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,03 + 0,1 \cdot 0,02 = 0,04$$

- Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\overline{\text{Def}}) = \frac{P(C) \cdot P(\overline{\text{Def}}/C)}{P(\overline{\text{Def}})} = \frac{0,2 \cdot 0,97}{1 - 0,04} = \frac{0,19}{0,96} = 0,2$$

089 En cierta población, un 20% de los trabajadores trabaja en la agricultura, un 25% en la industria y el resto en el sector servicios. Un 63% de los que trabajan en la agricultura son mayores de 45 años, siendo el porcentaje de mayores de 45 años del 38% y el 44% en los otros sectores respectivamente.

- Seleccionando un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 45 años?
- Si sabemos que un trabajador es mayor de 45 años, ¿qué probabilidad hay de que proceda de la agricultura?

*(Castilla y León. Septiembre 2008. Bloque B. Pregunta 3)*

Definimos los siguientes sucesos:

*A* = «Trabaja en la agricultura»

*B* = «Trabaja en la industria»

*C* = «Trabaja en el sector servicios»

*M* = «Mayor de 45 años»

- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\overline{M}) = P(A) \cdot P(\overline{M}/A) + P(B) \cdot P(\overline{M}/B) + P(C) \cdot P(\overline{M}/C) = \\ = 0,2 \cdot 0,37 + 0,25 \cdot 0,62 + 0,55 \cdot 0,56 = 0,54$$

- Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/M) = \frac{P(A) \cdot P(M/A)}{P(M)} = \frac{0,2 \cdot 0,63}{1 - 0,54} = \frac{0,126}{0,46} = 0,27$$

- 090 En un cine hay tres salas. En la sala A hay 240 espectadores; en la sala B, 180, y en la sala C, 80. Se sabe que la película de la sala A agrada al 40% de los espectadores, mientras que las películas de las otras salas tienen un 50% y un 90% de aceptación.

A la salida del cine elegimos un espectador al azar. Calcula la probabilidad de que:

- La película le haya gustado.
- Le haya gustado si ha estado en la sala C.
- Salga de la sala C si la película le ha gustado.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(G) &= P(A) \cdot P(G/A) + P(B) \cdot P(G/B) + P(C) \cdot P(G/C) = \\ &= \frac{240}{500} \cdot \frac{40}{100} + \frac{180}{500} \cdot \frac{50}{100} + \frac{80}{500} \cdot \frac{90}{100} = \frac{129}{250} \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(G/C) = \frac{9}{10}$$

$$\text{c) } P(C/G) = \frac{P(C) \cdot P(G/C)}{P(A) \cdot P(G/A) + P(B) \cdot P(G/B) + P(C) \cdot P(G/C)} = \frac{\frac{80}{500} \cdot \frac{90}{100}}{\frac{129}{250}} = \frac{36}{129}$$



- 091 En un montón de cartas hay 3 cartas deoros y 2 de copas, y en un segundo montón hay 2 cartas deoros, 2 de copas y 4 de espadas. Se saca una carta del primer montón y se mete en el segundo. A continuación se saca una carta del segundo montón. Calcula las probabilidades de:

- Sacar una carta deoros.
- Pasar una carta de copas y que luego salgan copas.
- Que salga una carta de copas, si se pasó una deoros.

$$\text{a) } P(O_2) = P(O_1) \cdot P(O_2/O_1) + P(C_1) \cdot P(O_2/C_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{13}{45}$$

$$\text{b) } P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2/C_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

$$\text{c) } P(C_2/O_1) = \frac{2}{9}$$

- 092 Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo.

- Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.
- Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.

(Andalucía. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 3)

Definimos los siguientes sucesos:

$S$  = «Tener estudios superiores»       $T$  = «Tener empleo»

Entonces, resulta que:       $P(S) = 0,3$        $P(T/S) = 0,95$        $P(T/\bar{S}) = 0,6$

# Probabilidad

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T) = P(S) \cdot P(T/S) + P(\bar{S}) \cdot P(T/\bar{S}) = 0,3 \cdot 0,95 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,705$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S/T) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{P(S) \cdot P(T/S)}{P(T)} = \frac{0,3 \cdot 0,95}{0,705} = 0,404$$

093

El 60% de los productos de una marca se fabrica en Portugal, el 30% en España y el resto en Andorra. El 1% de los productos fabricados en Portugal presenta algún defecto, mientras que en España y en Andorra estos porcentajes son del 0,5% y el 3%, respectivamente.

a) Determina la probabilidad de que un producto resulte defectuoso.

b) Si compramos un producto y resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de Andorra?

$$\begin{aligned} a) P(D) &= P(P) \cdot P(D/P) + P(E) \cdot P(D/E) + P(A) \cdot P(D/A) = \\ &= 0,6 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,005 + 0,1 \cdot 0,03 = 0,0105 \end{aligned}$$

$$b) P(A/D) = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(P) \cdot P(D/P) + P(E) \cdot P(D/E) + P(A) \cdot P(D/A)} = \frac{0,1 \cdot 0,03}{0,0105} = 0,28$$

094

El 60% de los habitantes adultos de un pueblo es votante del partido QW y el resto vota al partido SZ. El 35% de los votantes de QW está a favor de una propuesta, y el 90% de los votantes de SZ, también.

a) Si se realiza la votación, ¿cuál es la probabilidad de que la propuesta sea aprobada?

b) Elegimos al azar un votante de los que votaron afirmativamente.

¿Cuál es la probabilidad de que sea votante de QW?

$$a) P(A) = P(QW) \cdot P(A/QW) + P(SZ) \cdot P(A/SZ) = 0,6 \cdot 0,35 + 0,4 \cdot 0,9 = 0,57$$

$$b) P(QW/A) = \frac{P(QW) \cdot P(A/QW)}{P(QW) \cdot P(A/QW) + P(SZ) \cdot P(A/SZ)} = \frac{0,6 \cdot 0,35}{0,57} = 0,37$$

095

Una caja contiene tres monedas. Una moneda es normal, otra tiene dos caras y la tercera está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara es 1/3. Las tres monedas tienen igual probabilidad de ser elegidas.

a) Se elige al azar una moneda y se lanza al aire, ¿cuál es la probabilidad de que salga cara?

b) Si lanzamos la moneda trucada dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que salga una cara y una cruz?

*(Castilla-La Mancha. Junio 2008. Bloque 2. Ejercicio B)*

Definimos los siguientes sucesos:

$M_1$  = «Elegir la moneda normal»

$M_2$  = «Elegir la moneda que tiene dos caras»

$M_3$  = «Elegir la moneda trucada»

$C$  = «Salir cara»

$X$  = «Salir cruz»

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(M_1) \cdot P(C/M_1) + P(M_2) \cdot P(C/M_2) + P(M_3) \cdot P(C/M_3) = \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

b)  $P(C \cap X) + P(X \cap C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

096

Sonia y Manuel tiran, cada uno, un dado numerado del 1 al 6.  
¿Cuál es la probabilidad de que Sonia saque mayor puntuación que Manuel?



(La Rioja. Junio 2008. Parte A. Cuestión 4)

Los resultados posibles para Sonia y Manuel son:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

En 15 de los 36 posibles resultados Sonia saca más puntuación que Manuel, en 15 Manuel saca más que Sonia y en 6 las puntuaciones de ambos son iguales.

Así, la probabilidad de que Sonia obtenga mayor puntuación que Manuel

$$\text{es: } P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

097

Laura tiene en su monedero 6 monedas francesas, 2 italianas y 4 españolas. Vicente tiene 9 francesas y 3 italianas. Cada uno saca, al azar, una moneda de su monedero y observa la nacionalidad.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que las monedas extraídas no sean de la misma nacionalidad?  
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las monedas extraídas sea francesa?

(Andalucía. Año 2008. Modelo 1. Opción A. Ejercicio 3)

Definimos los siguientes sucesos:

$F_L$  = «Laura saca una moneda francesa»

$F_V$  = «Vicente saca una moneda francesa»

$I_L$  = «Laura saca una moneda italiana»

$I_V$  = «Vicente saca una moneda italiana»

$E_L$  = «Laura saca una moneda española»

a)  $P(\text{Las monedas no sean de la misma nacionalidad}) =$

$$= P(F_L \cap \bar{F}_V) + P(I_L \cap \bar{I}_V) + P(E_L) = \frac{6}{12} \cdot \frac{3}{12} + \frac{2}{12} \cdot \frac{9}{12} + \frac{4}{12} = \\ = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0,167$$

b)  $P(\bar{F}_L \cap \bar{F}_V) = \frac{6}{12} \cdot \frac{3}{12} = 0,125$

# Probabilidad

098 En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

- a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane.  
b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

(Madrid. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 3)

Definimos los siguientes sucesos:

$A$  = «Salir par»

$B$  = «Salir un número mayor o igual que cinco»

$C$  = «Obtener dos caras»

$D$  = «Obtener exactamente una cara»

- a) La probabilidad de ganar es:

$$P(G) = P(C \cap A) + P(D \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$$

- b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/G) = \frac{P(C) \cdot P(G/C)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7}$$

099 En una caja hay diez bolas, cinco de las cuales están marcadas con números positivos y las otras cinco con números negativos. Si se extraen, al azar y simultáneamente, dos bolas y se multiplican los números que aparecen en ellas, ¿qué es más probable, un resultado positivo o uno negativo?

(País Vasco. Junio 2008. Apartado C. Ejercicio 1)

$$\begin{aligned} P(\text{Obtener producto positivo}) &= \\ &= P(\text{Extraer dos bolas con números positivos}) + P(\text{Extraer dos bolas con números negativos}) = \\ &= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Obtener un resultado negativo}) &= \\ &= P(\text{Extraer una bola con un número positivo y otra con uno negativo}) = \\ &= \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Por tanto, es más probable un resultado negativo.

100 En un grupo de familias, un 10% ha cambiado de coche y también ha cambiado de piso. Un 50% no ha cambiado de coche y sí de piso. Entre los que han cambiado de coche, un 25% ha cambiado de piso.

- ¿Qué porcentaje de familias ha cambiado de piso?
- ¿Qué probabilidad hay de que una familia del grupo haya cambiado de coche?
- De las familias que no han cambiado de piso, ¿qué porcentaje ha cambiado de coche?

(Asturias. Junio 2008. Bloque 5)

Definimos los siguientes sucesos:

$A$  = «Haber cambiado de coche»

$B$  = «Haber cambiado de piso»

Conocemos estas probabilidades:

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\bar{A} \cap B) = 0,5 \quad P(B/A) = 0,25$$

$$a) P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(B) = 0,6$$

$$b) P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \rightarrow P(A) = 0,4$$

$$c) P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,4 - 0,1}{1 - 0,6} = 0,75$$

101 En una población, donde el 45% son hombres y el resto mujeres, se sabe que el 10% de los hombres y el 8% de las mujeres son inmigrantes.

- ¿Qué porcentaje de inmigrantes hay en esta población?
- Si se elige, al azar, un inmigrante de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

(Andalucía. Año 2008. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 3)

Se definen los siguientes sucesos:

$H$  = «Ser hombre»

$M$  = «Ser mujer»

$I$  = «Ser inmigrante»

- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(I) = P(H) \cdot P(I/H) + P(M) \cdot P(I/M) = 0,45 \cdot 0,1 + 0,65 \cdot 0,08 = 0,097$$

- Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(H/I) = \frac{P(H) \cdot P(I/H)}{P(I)} = \frac{0,45 \cdot 0,1}{0,097} = 0,46$$

102 En una mesa del comedor universitario están sentados 12 estudiantes, de los cuales 8 son de economía y 4 de ingeniería. Entre los 8 de economía, hay 4 varones y 3 entre los de ingeniería.

Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Suponiendo que el estudiante elegido ha resultado ser varón, ¿de cuál de las dos titulaciones es más probable que sea?

(Navarra. Junio 2008. Ejercicio 3. Opción A)

# Probabilidad

Definimos los siguientes sucesos:

$E$  = «Estudiar economía»

$I$  = «Estudiar ingeniería»

$H$  = «Ser hombre»

$M$  = «Ser mujer»

- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(E) \cdot P(M/E) + P(I) \cdot P(M/I) = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

- Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(E/H) = \frac{P(E) \cdot P(H/E)}{P(H)} = \frac{\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{8}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$$

$$P(I/H) = \frac{P(I) \cdot P(H/I)}{P(H)} = \frac{\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$$

Por tanto, si el estudiante es varón es más probable que estudie economía.

103

El 60% de los alumnos de cierta asignatura aprueba en junio. El 80% de los presentados en septiembre también aprueba la asignatura. Sabiendo que los alumnos que se presentaron en septiembre son todos los que no aprobaron en junio, determina:

- a) La probabilidad de que un alumno seleccionado al azar haya aprobado la asignatura.
- b) Si sabemos que un estudiante ha aprobado la asignatura, la probabilidad de que haya sido en junio.

*(C. Valenciana. Junio 2008. Ejercicio B. Problema 4)*

Definimos los siguientes sucesos:

$A$  = «Aprobar la asignatura»

$J$  = «Aprobar en junio»

$S$  = «Aprobar en septiembre»

a)  $P(A) = P(J) + P(S \cap \bar{J}) = 0,6 + 0,32 = 0,92$

b)  $P(J/A) = \frac{P(J \cap A)}{P(A)} = \frac{0,6}{0,92} = 0,65$



104 El examen de Matemáticas de un alumno consta de dos ejercicios. La probabilidad de que resuelva el primero es del 30%, la de que resuelva ambos es del 10%, y la de que no resuelva ninguno es del 35%. Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos.

- Que el alumno resuelva el segundo ejercicio.
- Que resuelva el segundo ejercicio, sabiendo que no ha resuelto el primero.

(Andalucía. Año 2008. Modelo 2. Opción A. Ejercicio 3)

Definimos los siguientes sucesos:

$A$  = «Resolver el primer ejercicio»

$B$  = «Resolver el segundo ejercicio»

Tenemos estas probabilidades:

$$P(A) = 0,3 \quad P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,35$$

$$a) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0,35 = 0,65$$

Ahora se calcula la probabilidad de resolver el segundo ejercicio.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0,65 - 0,3 + 0,1 = 0,45$$

$$b) P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,45 - 0,1}{0,7} = 0,5$$

105 Se juntan 3 clases  $A$ ,  $B$  y  $C$  con el mismo número de alumnos en el salón de actos de un instituto. Se sabe que el 10% de los alumnos en la clase  $A$  son zurdos, en la clase  $B$  el 8% son zurdos y en la clase  $C$  el 88% de los alumnos no son zurdos.

- Si elegimos al azar un alumno del salón de actos, ¿con qué probabilidad el alumno no será zurdo?
- Sabiendo que un alumno elegido al azar del salón de actos es zurdo, ¿cuál es la probabilidad de que no pertenezca a la clase  $C$ ?

(Castilla y León. Junio 2008. Bloque A. Pregunta 3)

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(\bar{Z}) &= P(A) \cdot P(\bar{Z}/A) + P(B) \cdot P(\bar{Z}/B) + P(C) \cdot P(\bar{Z}/C) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{90}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{92}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{88}{100} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{90}{100} + \frac{92}{100} + \frac{88}{100} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\bar{C}/Z) = 1 - P(C/Z) = 1 - \frac{P(C) \cdot P(Z/C)}{P(Z)} = 1 - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{12}{100}}{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{5}{2} = \frac{3}{5}$$

# Probabilidad

- 106 En una población se ha determinado que de cada 100 aficionados al fútbol, 25 son abonados del equipo A, 45 son abonados del equipo B y el resto son abonados del equipo C. Sabiendo que el 30% de los abonados de A, el 40% de los abonados de B, y el 50% de los abonados de C, tienen menos de 30 años, determinar la probabilidad de que seleccionado al azar un aficionado al fútbol en esa población sea menor de 30 años. Justificar la respuesta.

*(Extremadura. Junio 2008. Opción A. Problema 3)*

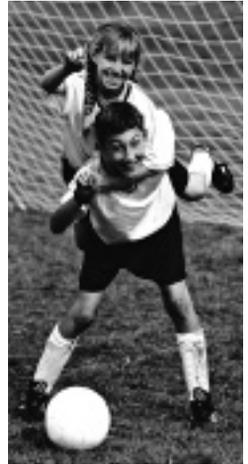
Definimos el suceso:

$M = \text{«Tener menos de 30 años»}$

$$\begin{aligned} P(M/A) &= 0,3 & P(M/B) &= 0,4 & P(M/C) &= 0,5 \\ P(A) &= 0,25 & P(B) &= 0,45 & P(C) &= 0,3 \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(M) &= P(A) \cdot P(M/A) + P(B) \cdot P(M/B) + P(C) \cdot P(M/C) = \\ &= 0,25 \cdot 0,3 + 0,45 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,405 \end{aligned}$$



- 107 En un mercado de valores cotizan un total de 60 empresas, de las que 15 son del sector bancario, 35 son industriales y 10 son del sector tecnológico. La probabilidad de que un banco de los que cotizan en el mercado se declare en quiebra es 0,01; la probabilidad de que se declare en quiebra una empresa industrial es 0,02 y de que lo haga una empresa tecnológica es 0,1.

- a) ¿Cual es la probabilidad de que se produzca una quiebra en una empresa del citado mercado de valores?  
b) Habiéndose producido una quiebra, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una empresa tecnológica?

*(Galicia. Junio 2008. Bloque 3. Ejercicio 1)*

Definimos los siguientes sucesos:

$B = \text{«Ser una empresa del sector bancario»}$

$I = \text{«Ser una empresa industrial»}$

$T = \text{«Ser una empresa tecnológica»}$

$D = \text{«Producirse una quiebra»}$

- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(D) &= P(B) \cdot P(D/B) + P(I) \cdot P(D/I) + P(T) \cdot P(D/T) = \\ &= \frac{15}{60} \cdot 0,01 + \frac{35}{60} \cdot 0,02 + \frac{10}{60} \cdot 0,1 = \\ &= 0,25 \cdot 0,01 + 0,58 \cdot 0,02 + 0,17 \cdot 0,1 = 0,03 \end{aligned}$$

- b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/D) = \frac{P(T) \cdot P(D/T)}{P(D)} = \frac{0,17 \cdot 0,1}{0,03} = 0,57$$

108 De los trabajadores que trabajan por cuenta propia, 24 tienen estudios primarios, 30 tienen estudios secundarios y 6 tienen estudios superiores. Mientras que de los trabajadores por cuenta ajena, 6 tienen estudios primarios, 25 estudios secundarios y 9 estudios superiores. Elegido un trabajador al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea trabajador por cuenta propia y tenga estudios secundarios?
- Si resulta que es un trabajador por cuenta ajena, ¿cuál es la probabilidad de que tenga estudios superiores?

(Castilla-La Mancha. Año 2008. Reserva 2. Bloque 4. Ejercicio A)

Definimos los siguientes sucesos:

$CP$  = «Trabajadores por cuenta propia»

$CA$  = «Trabajadores por cuenta ajena»

$EP$  = «Tienen estudios primarios»

$ES$  = «Tienen estudios secundarios»

$EU$  = «Tienen estudios superiores»

$$a) P(CP \cap ES) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$b) P(EU/CA) = \frac{9}{40} = 0,225$$

## PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 En un experimento aleatorio que consiste en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos.

- Obtener tres unos.
- Obtener al menos un dos.
- Obtener tres números distintos.
- Obtener una suma de 4.

(Madrid. Junio 2005. Opción B. Ejercicio 3)

$$a) P(\text{Tres unos}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} = 0,0046$$

$$b) P(\text{Al menos un dos}) = 1 - P(\text{Ningún dos}) = 1 - \left( \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \right) = 1 - \frac{125}{216} = 0,42$$

$$c) P(\text{Tres números distintos}) = 1 - P(\text{Tres números iguales}) = \\ = 1 - 5 \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) = 1 - \frac{5}{216} = 0,88$$

$$d) P(\text{Obtener suma 4}) = P(\text{Salga un 1, un 1 y un 2}) = \frac{3}{216} = 0,0139$$

# Probabilidad

2 Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que:

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(\bar{B}) = \frac{2}{5} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$$

Calcular: a)  $P(B/A)$       b)  $P(\bar{A}/B)$

(Madrid. Septiembre 2005. Opción B. Ejercicio 3)

Tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(A) = \frac{1}{2} \rightarrow P(\bar{A}) = \frac{1}{2} \quad P(\bar{B}) = \frac{2}{5} \rightarrow P(B) = \frac{3}{5}$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4} \rightarrow P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

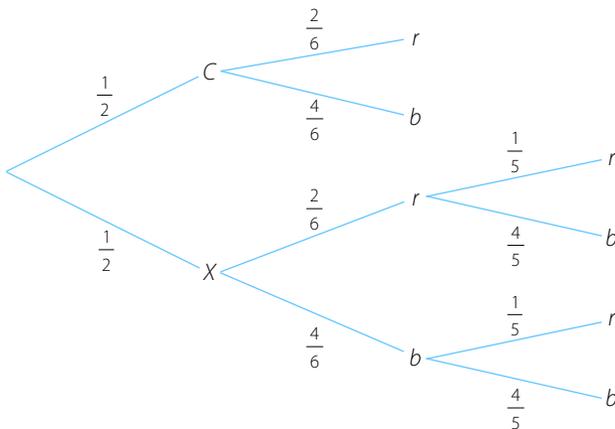
$$\text{a) } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = 0,5$$

$$\text{b) } P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{3}{5}} = \frac{35}{60}$$

3 En una urna hay 4 bolas blancas y 2 rojas. Se lanza una moneda; si sale cara se extrae una bola de la urna y, si sale cruz, se extraen, sin reemplazamiento, dos bolas de la urna. Halla la probabilidad de que se hayan extraído dos bolas rojas. Halla la probabilidad de que no se haya extraído ninguna bola roja.

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 3)

Primero planteamos el diagrama de árbol.



Para que hayan salido dos bolas rojas es obligatorio que haya salido cruz en la moneda.

$$P(2 \text{ bolas rojas}) = P(X, r, r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

En el caso de que no haya salido ninguna bola roja hay dos posibilidades: puede haber salido cara en la moneda y una sola bola blanca de la urna, o cruz en la moneda y dos bolas blancas de la urna.

$$P(\text{Ninguna roja}) = P(C, b) + P(X, b, b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{12} + \frac{12}{60} = \frac{8}{15}$$

- 4 En la urna A hay quince bolas, numeradas del 1 al 15, y en la urna B hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Si al extraer al azar una bola de cada urna la suma de los números es 12, ¿cuál es la probabilidad de que el número extraído de A fuera par?

(País Vasco. Junio 2007. Apartado C. Ejercicio 2)

Construimos una tabla de doble entrada con las posibles sumas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Como los 150 casos son equiprobables, calculamos la siguiente probabilidad condicionada:

$$P(\text{Número de A par} / \text{Suma } 12) = \frac{P(\text{Número de A par} \cap \text{Suma } 12)}{P(\text{Suma } 12)} = \frac{\frac{5}{150}}{\frac{10}{150}} = \frac{1}{2}$$

- 5 En una comunidad de vecinos, el 30% tiene vídeo y DVD, el 50% tiene vídeo y no DVD. Finalmente, de los que tienen DVD, el 75% tienen vídeo.
- ¿Qué porcentaje de vecinos tiene vídeo?
  - Entre los vecinos que tienen vídeo, ¿qué porcentaje tiene DVD?
  - ¿Qué porcentaje de vecinos tiene DVD?

(Asturias. Junio 2007. Bloque 5)

# Probabilidad

Definimos los siguientes sucesos:

$V = \text{«Vecinos que tienen vídeo»}$

$D = \text{«Vecinos que tienen DVD»}$

Los datos que tenemos son:

$$P(V \cap D) = 0,3 \quad P(V \cap \bar{D}) = 0,5 \quad P(V/D) = 0,75$$

a)  $P(V) = P(V \cap D) + P(V \cap \bar{D}) = 0,3 + 0,5 = 0,8$

b)  $P(D/V) = \frac{P(V \cap D)}{P(V)} = \frac{0,3}{0,8} = 0,375$

c)  $P(V/D) = \frac{P(V \cap D)}{P(D)} \rightarrow P(D) = \frac{P(V \cap D)}{P(V/D)} = \frac{0,3}{0,75} = 0,4$

- 6 En una determinada granja de patos en la que solo hay dos tipos, unos de pico rojo y otros de pico amarillo, se observa que el 40% son machos y con pico amarillo; el 20% de todos los patos tienen el pico rojo; el 35% de los patos que tienen el pico rojo son machos mientras que solo el 15% de los machos tienen el pico rojo. Elegido un pato al azar, calcula la probabilidad de que sea macho. Si el pato elegido ha sido hembra, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el pico rojo?

*(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 4. Ejercicio A)*

Definimos los siguientes sucesos:

$M = \text{«Pato macho»}$

$PA = \text{«Pato con el pico amarillo»}$

$H = \text{«Pato hembra»}$

$PR = \text{«Pato con el pico rojo»}$

Escribimos los datos que nos da el problema.

$$P(M \cap PA) = 0,4 \quad P(PR) = 0,2 \quad P(M/PR) = 0,35 \quad P(PR/M) = 0,15$$

Utilizando la probabilidad del suceso contrario podemos hallar la siguiente probabilidad:

$$P(PA) = 1 - P(PR) = 1 - 0,2 = 0,8$$

Primero calculamos la probabilidad de que sea macho y tenga el pico rojo.

$$P(M/PR) = \frac{P(M \cap PR)}{P(PR)} \rightarrow 0,35 = \frac{P(M \cap PR)}{0,2} \rightarrow 0,35 \cdot 0,2 = P(M \cap PR) \\ \rightarrow P(M \cap PR) = 0,07$$

Ahora podemos hallar la probabilidad de que sea macho.

$$P(M) = P(M \cap PR) + P(M \cap PA) = 0,07 + 0,4 = 0,47$$

- 7 En una prueba teórica de un examen se plantean 4 tipos de examen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Se ha comprobado que la probabilidad de aprobar es 0,4 si el examen es del tipo  $A$ ; 0,6 si es del tipo  $B$ ; 0,56 si es del tipo  $C$  y 0,75 si es del tipo  $D$ . El número de alumnos que realiza cada tipo de examen es el mismo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender el examen?

b) Si se sabe que el alumno elegido al azar ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el examen del tipo  $B$ ?

*(Navarra. Junio 2007. Ejercicio 3. Opción A)*

Definimos los siguientes sucesos:

$E_A$  = «Realizar un examen del tipo A»

$E_B$  = «Realizar un examen del tipo B»

$E_C$  = «Realizar un examen del tipo C»

$E_D$  = «Realizar un examen del tipo D»

$Ap$  = «Aprobar el examen»

$Sus$  = «Suspender el examen»

$$a) P(Sus) = \frac{1}{4} \cdot 0,6 + \frac{1}{4} \cdot 0,4 + \frac{1}{4} \cdot 0,44 + \frac{1}{4} \cdot 0,25 = 0,42$$

$$b) P(E_B / Ap) = \frac{P(E_B \cap Ap)}{P(Ap)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0,6}{1 - 0,42} = 0,26$$

- 8 Una urna A contiene 5 bolas blancas y 3 negras; otra urna B contiene 3 blancas y 4 negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola.

- a) Probabilidad de que la bola extraída sea negra.  
 b) Si la bola extraída fue blanca, probabilidad de haber sido elegida de la urna A.

(Balears. Junio 2008. Opción A. Cuestión 3)

Definimos los siguientes sucesos:

$A$  = «Elegir la urna A»

$B$  = «Elegir la urna B»

$C$  = «Extraer una bola blanca»

$N$  = «Extraer una bola negra»

- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(N) = P(A) \cdot P(N/A) + P(B) \cdot P(N/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{53}{112}$$

- b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned} P(A/C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A) \cdot P(C/A)}{P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{16} + \frac{3}{14}} = \frac{35}{59} \end{aligned}$$