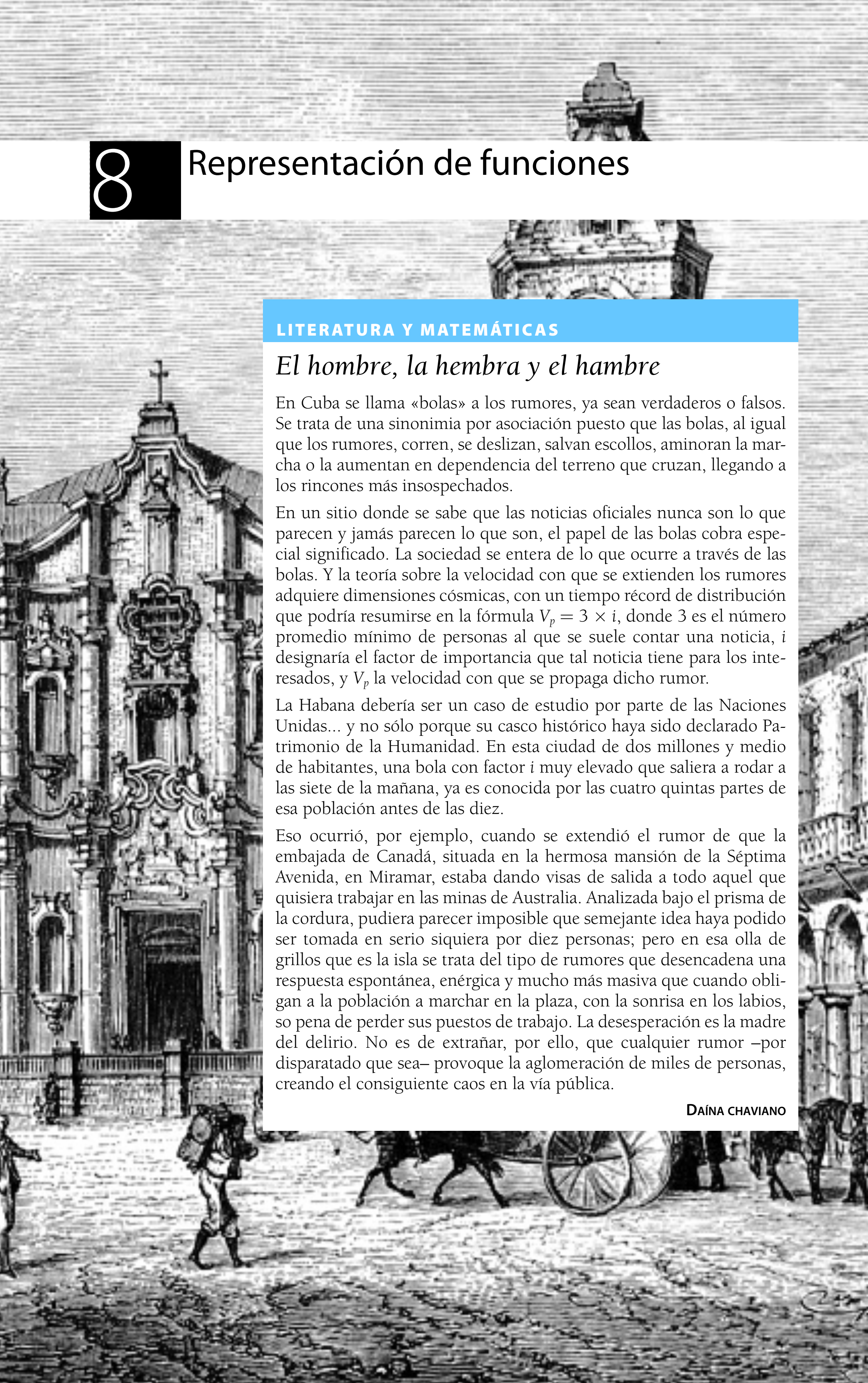
8 Representación de funciones



LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El hombre, la hembra y el hambre

En Cuba se llama «bolas» a los rumores, ya sean verdaderos o falsos. Se trata de una sinonimia por asociación puesto que las bolas, al igual que los rumores, corren, se deslizan, salvan escollos, aminoran la marcha o la aumentan en dependencia del terreno que cruzan, llegando a los rincones más insospechados.

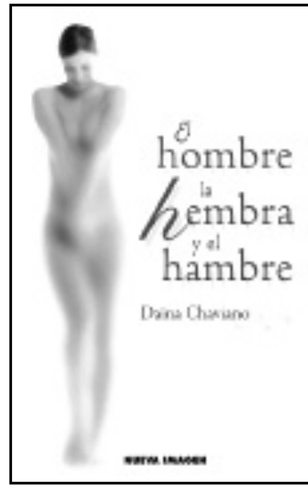
En un sitio donde se sabe que las noticias oficiales nunca son lo que parecen y jamás parecen lo que son, el papel de las bolas cobra especial significado. La sociedad se entera de lo que ocurre a través de las bolas. Y la teoría sobre la velocidad con que se extienden los rumores adquiere dimensiones cósmicas, con un tiempo récord de distribución que podría resumirse en la fórmula $V_p = 3 \times i$, donde 3 es el número promedio mínimo de personas al que se suele contar una noticia, i designaría el factor de importancia que tal noticia tiene para los interesados, y V_p la velocidad con que se propaga dicho rumor.

La Habana debería ser un caso de estudio por parte de las Naciones Unidas... y no sólo porque su casco histórico haya sido declarado Patrimonio de la Humanidad. En esta ciudad de dos millones y medio de habitantes, una bola con factor i muy elevado que saliera a rodar a las siete de la mañana, ya es conocida por las cuatro quintas partes de esa población antes de las diez.

Eso ocurrió, por ejemplo, cuando se extendió el rumor de que la embajada de Canadá, situada en la hermosa mansión de la Séptima Avenida, en Miramar, estaba dando visas de salida a todo aquel que quisiera trabajar en las minas de Australia. Analizada bajo el prisma de la cordura, pudiera parecer imposible que semejante idea haya podido ser tomada en serio siquiera por diez personas; pero en esa olla de grillos que es la isla se trata del tipo de rumores que desencadena una respuesta espontánea, enérgica y mucho más masiva que cuando obligan a la población a marchar en la plaza, con la sonrisa en los labios, so pena de perder sus puestos de trabajo. La desesperación es la madre del delirio. No es de extrañar, por ello, que cualquier rumor –por disparatado que sea– provoque la aglomeración de miles de personas, creando el consiguiente caos en la vía pública.

DAÍNA CHAVIANO

El hombre, la hembra y el hambre
Daína Chaviano



En esta novela no aparecen más referencias a las matemáticas que la de este párrafo. Pero hay un ejemplo paradigmático en una novela de Jardiel Poncela titulada *Amor se escribe sin hache*. Ahí encontramos una escena donde este lenguaje le sirve al autor para describir el disparatado comportamiento de su protagonista y su estrafalario carácter. Sylvia y Zambombo llegan a una isla después de naufragar el barco donde viajaban. Una vez encendida una hoguera admirable, Zambombo determinó construir una cabaña.

–¡Sí, sí! –palmoteó Sylvia–. Una cabaña... y tu amor... ¡Ah! ¡Qué dichosa soy!

Zamb se dirigió a la entrada del bosque y transportó a la playa unos cuantos árboles que yacían en el suelo derribados, tal vez, por alguna tormenta. Calculó la resistencia de los árboles midiendo su diámetro y su longitud y escribió en su cuadernito:

$$A + B = (A + B) - (A + B) \times (A + B) + (A + B)$$

Elevó al cuadrado el primer término, y con gran sorpresa suya, que no creía saber tantas matemáticas, obtuvo:

$$(A + B)^2 = (A + B) - (A + B) \times (A + B) + (A + B)$$

Y sustituyendo esto por las cifras averiguadas, logró: $73^2 = (10 + 10)$

La resistencia de los troncos del árbol era de 730 kilogramos.

Puso los troncos apoyados entre sí, formando dos vertientes, en número de quince. De manera que cuando Zamb y Sylvia se metieron debajo, los kilos de árbol que se les cayeron encima, al desplomarse la cabaña, fueron: 730×15, o sea: 10.950.

Ambos se desmayaron a consecuencia del traumatismo. Al volver en sí, era de noche.*

* Puede calcularse que, por cada 100 kilos que le caen en la cabeza a un ser humano, permanece desmayado un minuto. Como en 10.950 kilos hay, aproximadamente, 109 veces 100 kilos, resulta que Zambombo y Sylvia estuvieron desmayados durante 109 minutos, o sea, dos horas menos once minutos. No nos explicamos, por lo tanto, por qué al volver en sí era ya de noche.

Jardiel Poncela utiliza aquí el lenguaje algebraico como un recurso humorístico, una aplicación *novedosa*, porque en matemáticas y en las otras ciencias, se emplea para expresar propiedades o resolver problemas.

Supón que cada persona que oye un rumor lo difunde a 9 personas en una hora. Escribe la fórmula de la función que expresa el número de personas que conocen el rumor con relación al tiempo transcurrido. Represéntala gráficamente y calcula las horas necesarias para que toda La Habana se entere del suceso.

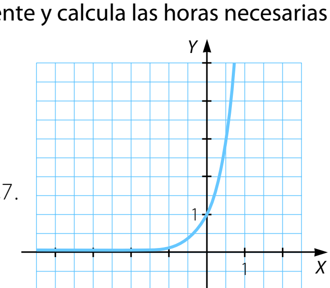
$f(t) = 9^t$ con $t \in \mathbb{R}^+$ el número de horas.

$f'(x) = 9^t \cdot \ln 9 > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

No tiene máximos ni mínimos.

$9^t = 2.500.000 \rightarrow t = \log_9 2.500.000 = \dfrac{\ln 2.500.000}{\ln 9} = 6{,}7.$

En menos de 7 horas, los habitantes de La Habana conocerán el suceso.



Representación de funciones

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 2x + 7)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + 3x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^5 + x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 8^{\frac{x^3 - x}{x+1}}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 1)^{\frac{x^2-1}{x}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 2x + 7) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + 3x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x} = 1$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^5 + x^2} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 8^{\frac{x^3 - x}{x+1}} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 1)^{\frac{x^2-1}{x}} = +\infty$

002 Estudia la continuidad y clasifica los puntos de discontinuidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - x + 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Si $x < 2$: $\dfrac{x^2}{x-1} \to$ Función racional, no definida en $x = 1$.
- Si $x \geq 2$: $x^2 - x + 7 \to$ Función polinómica, definida en $\mathbb{R}$.

Así, $f(x)$ está definida y es continua en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$. Estudiamos la continuidad en $x = 1$ y en $x = 2$:

- Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto infinito}$$

- Si $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{4}{1} = 4 \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} (x^2 - x + 7) = 4 - 2 + 7 = 9 \end{array}\right\} \to \text{Discontinuidad de salto finito}$$

ACTIVIDADES

001 Determina el dominio y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

b) $f(x) = sen\ x$

a) $f(x)$ está definida si $x^2 - 16 \geq 0 \to (x - 4)(x + 4) \geq 0$
$\to x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \to \text{Dom } f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{x^2 - 16} = 0 \to x^2 = 16 \to x = \pm 4 \to (-4, 0), (4, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene ya que $x = 0$ no está en el dominio.

b) Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:
  $\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} \rightarrow (0 + k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$
- Corte con el eje Y:
  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

002 Halla el dominio y los puntos de corte con los ejes.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 81}{x - 7}$

b) $f(x) = \log(x + 8)$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{7\}$

- Cortes con el eje X:
  $\dfrac{x^2 - 81}{x - 7} = 0 \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = \pm 9 \rightarrow (-9, 0), (9, 0)$
- Corte con el eje Y:
  $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{-81}{-7} = \dfrac{81}{7} \rightarrow \left(0, \dfrac{81}{7}\right)$

b) $f(x)$ está definida cuando $x + 8 > 0 \rightarrow x > -8 \rightarrow$ Dom $f = (-8, +\infty)$

- Cortes con el eje X:
  $\log(x + 8) = 0 \rightarrow x + 8 = 10^0 = 1 \rightarrow x = -7 \rightarrow (-7, 0)$
- Corte con el eje Y:
  $x = 0 \rightarrow y = \log 8 \rightarrow (0, \log 8)$

003 Estudia la simetría de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 25}$

b) $f(x) = -x^2 - 27$

a) $f(-x) = \sqrt{2(-x)^2 - 25} = \sqrt{2x^2 - 25} = f(x) \rightarrow f(x)$ es simétrica respecto al eje Y.

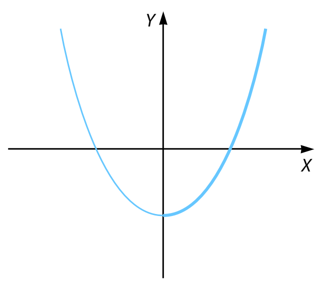
b) $f(-x) = -(-x)^2 - 27 = -x^2 - 27 = f(x) \rightarrow f(x)$ es simétrica respecto al eje Y.

004 Dibuja la gráfica de una función que sea:

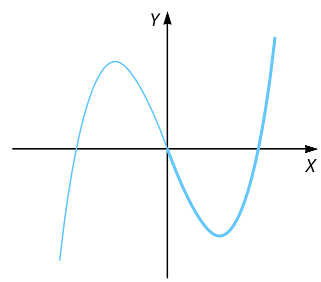
a) Par.

b) Impar.

a)



b)



005 **Determina el período de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = cos\ x$ b) $f(x) = sen\ 2x$

a)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π
$f(x)$	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1	0	−1

La función se repite con período 2π: $cos\ x = cos\ (x + 2k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

b)

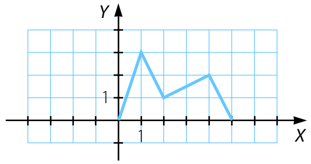
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$f(x)$	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1	0

La función se repite con período π: $sen\ 2x = sen\ (2x + k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

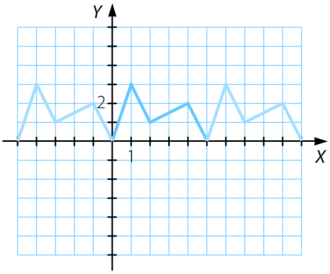
006 **La función que a cada número le asocia su parte decimal, ¿es periódica? Si es así, ¿cuál es el período?**

Una función que a cada número le asocia su parte decimal es periódica de período 1.

007 **Representa una función periódica a partir de esta.**



¿Cuál es el período?



El período de esta función es 5.

008 **Escribe una función que tenga como asíntotas verticales las rectas cuyas ecuaciones son:**

a) $x = 4$ y $x = -2$ b) $x = 1$ y $x = 0$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $f(x) = \dfrac{5}{(x-4)(x+2)}$ b) $f(x) = \dfrac{6x+3}{x(x-1)}$

009 **Halla las asíntotas verticales de las funciones.**

a) $f(x) = \log(x^2 - 16)$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) $x^2 - 16 \geq 0 \rightarrow (x-4)(x+4) \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

Así, tenemos que: $\text{Dom } f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -4^-} \log(x^2 - 16) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -4$

$\lim\limits_{x \to 4^+} \log(x^2 - 16) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 4$

b) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x-1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1$

010 **Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas horizontales.**

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{e^x + 1} = \dfrac{0}{0+1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

011 **Determina la situación de la gráfica respecto de las asíntotas horizontales de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

- Si $x \rightarrow +\infty \rightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} - 1 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.
- Si $x \rightarrow -\infty \rightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} - 1 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

- Si $x \rightarrow +\infty \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} - 0 > 0 \rightarrow f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \rightarrow -\infty \rightarrow \dfrac{x}{x^2 - 1} - 0 < 0 \rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

012 **Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas oblicuas.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{-x^2+3}{x+2}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x(x-1)} = 1 \neq 0 \to m = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-x^2+x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1 \to n = 1$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = mx + n \to y = x + 1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2+3}{x(x+2)} = -1 \neq 0 \to m = -1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{-x^2+3}{x+2} + x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2+3+x^2+2x}{x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+2x}{x+2} = 2 \to n = 2$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = mx + n \to y = -x + 2$

013 **Determina la situación de la gráfica respecto de las asíntotas oblicuas de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2}{x(x-1)} = 1 \neq 0 \to m = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) = 1 \to n = 1$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = mx + n \to y = x + 1$

$f(x) - (mx+n) = \dfrac{x^2+2}{x-1} - x - 1 = \dfrac{3}{x-1}$

- Si $x \to +\infty \to \dfrac{3}{x-1} > 0 \to f(x)$ está por encima de la asíntota.
- Si $x \to -\infty \to \dfrac{3}{x-1} < 0 \to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x} = 1 \neq 0 \to m = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}+x} = 0$

$\to$ Asíntota oblicua: $y = x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x}=-1\neq0\to m=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}-x}=\\ \qquad=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}=0\end{array}\right\}$$

$\to$ Asíntota oblicua: $y=-x$

- Si $x\to+\infty\to\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}>0\to f(x)$ está por encima de la asíntota $y=x$.
- Si $x\to-\infty\to\dfrac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}>0\to f(x)$ está por encima de la asíntota $y=-x$.

014 **Estudia si estas funciones presentan ramas parabólicas.**

a) $f(x)=x^4-x^3+4$ b) $g(x)=x\ln x$

a) Función polinómica $\to$ Dom $f=\mathbb{R}\to$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-x^3+4)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-x^3+4)=+\infty\end{array}\right\}\to\text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-x^3+4}{x}=-\infty\end{array}\right\}\to\text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Por tanto, la función tiene ramas parabólicas cuando $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$.

b) Dom $g=(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0\to$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty\to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Por tanto, la función tiene una rama parabólica cuando $x\to+\infty$.

015 **Determina las ramas infinitas de $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.**

Dom $f=\mathbb{R}\to$ No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0\end{array}\right\}\to\text{Asíntota horizontal: }y=0$$

Como la función tiene asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$, no tiene asíntotas oblicuas y tampoco ramas parabólicas.

016 **Estudia el crecimiento y decrecimiento de estas funciones, y calcula los máximos y mínimos.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{-x^2+3}{x+2}$

a) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = 0 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Máximo $x = 2 \rightarrow f(x) = 4 \rightarrow (2, 4)$ Mínimo

b) $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow -x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

- En $(-3, -2) \cup (-2, -1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -1 \rightarrow f(x) = 2 \rightarrow (-1, 2)$ Máximo
$x = -3 \rightarrow f(x) = 6 \rightarrow (-3, 6)$ Mínimo

017 **Estudia el crecimiento y decrecimiento de las funciones, y halla los máximos y mínimos.**

a) $f(x) = x^2 - 3x + 15$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

- En $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$x = \dfrac{3}{2} \rightarrow f(x) = \dfrac{51}{4} \rightarrow \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{51}{4}\right)$ Mínimo

b) $x^2 + 5 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$x = 0 \rightarrow f(x) = \sqrt{5} \rightarrow \left(0, \sqrt{5}\right)$ Mínimo

018 **Estudia la concavidad y convexidad de estas funciones, y calcula los puntos de inflexión.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{-x^2+3}{x+2}$

a) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{No presenta puntos de inflexión.}$$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

b) $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(x+2)^3} \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{No presenta puntos de inflexión.}$$

- En $(-\infty, -2) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(-2, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

019 **Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, y comprueba el resultado gráficamente.**

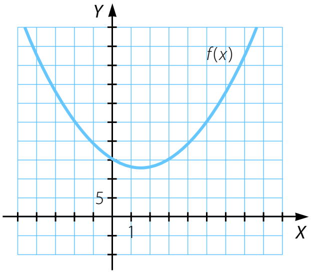
a) $f(x) = x^2 - 3x + 15$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 3$

$f''(x) = 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

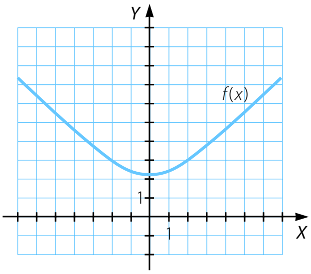
Por tanto, es $f(x)$ cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.



b) $x^2 + 5 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5} = \frac{5}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$



Así, $f(x)$ es cóncava en todo su dominio y no presenta puntos de inflexión.

020 Representa las siguientes funciones polinómicas.

a) $f(x) = x^4 - 12x$ b) $g(x) = -2x^3 + 6x$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \to x^4 - 12x = 0 \to x(x^3 - 12) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{12} \end{cases} \to (0, 0), \left(\sqrt[3]{12}, 0\right)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \to f(0) = 0 \to (0, 0)$

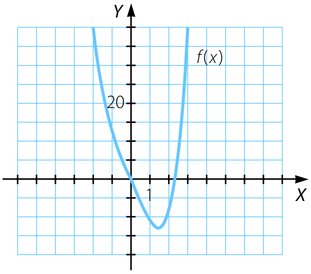
Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 12x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^4 - 12x) = +\infty$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12 = 0 \to x = \sqrt[3]{3}$$

- En $\left(-\infty, \sqrt[3]{3}\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $\left(\sqrt[3]{3}, +\infty\right) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

$$x = \sqrt[3]{3} \to f\left(\sqrt[3]{3}\right) = 3\sqrt[3]{3} - 12\sqrt[3]{3} = -9\sqrt[3]{3}$$
$$\to \left(\sqrt[3]{3}, -9\sqrt[3]{3}\right) \text{ Mínimo}$$



$$f''(x) = 12x^2 = 0 \to x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

No presenta puntos de inflexión.

b) Dom $g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$g(x) = 0 \to -2x^3 + 6x = 0 \to x(-2x^2 + 6) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$
$$\to \left(-\sqrt{3}, 0\right), (0, 0), \left(0, \sqrt{3}\right)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \to g(0) = 0 \to (0, 0)$

Como g es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

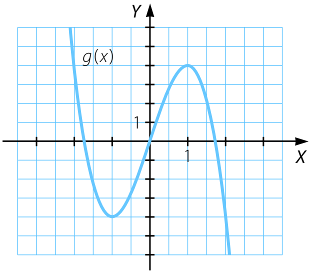
$$\lim_{x \to -\infty} (-2x^3 + 6x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} (-2x^3 + 6x) = -\infty$$

$$g'(x) = -6x^2 + 6 = 0 \to x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to g'(x) < 0 \to g(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \to g'(x) > 0 \to g(x)$ creciente

$$x = -1 \to g(-1) = -2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1) = -4$$
$$\to (-1, -4) \text{ Mínimo}$$

$$x = 1 \to g(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1 = 4$$
$$\to (1, 4) \text{ Máximo}$$



$$g''(x) = -12x = 0 \to x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \to g''(x) > 0 \to g(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \to g''(x) < 0 \to g(x)$ convexa

$x = 0 \to g(0) = 0 \to (0, 0)$ Punto de inflexión

021 Representa estas funciones polinómicas.

a) $f(x) = 6x^5 - 12x^3 - 4x$

b) $g(x) = -x^3 + x$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow 6x^5 - 12x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(6x^4 - 12x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1,51 \end{cases}$$

- Corte con el eje Y:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (6x^5 - 12x^3 - 4x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (6x^5 - 12x^3 - 4x) = +\infty$$

$f'(x) = 30x^4 - 36x^2 - 4$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1,14$

- En $(-\infty; -1,14) \cup (1,14; +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-1,14; 1,14) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -1,14 \rightarrow f(-1,14) = 10,79 \rightarrow (-1,14; 10,79)$ Máximo

$x = 1,14 \rightarrow f(1,14) = -10,79 \rightarrow (1,14; -10,79)$ Mínimo

$f''(x) = 120x^3 - 72x$

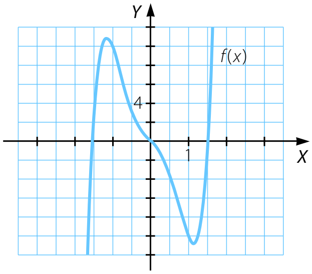
$$f''(x) = 0 \rightarrow x(120x^2 - 72) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 0,77 \end{cases}$$

- En $(-\infty; -0,77) \cup (0; 0,77) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-0,77; 0) \cup (0,77; +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = -0,77 \rightarrow f(-0,77) = 6,93 \rightarrow (-0,77; 6,93)$ Punto de inflexión

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Punto de inflexión

$x = 0,77 \rightarrow f(0,77) = -6,93 \rightarrow (0,77; -6,93)$ Punto de inflexión



b) Dom $g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$$g(x) = -x^3 + x = 0 \rightarrow x(-x^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (0, 0), (1, 0)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como g es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + x) = -\infty$$

$$g'(x) = -3x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- En $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

- En $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

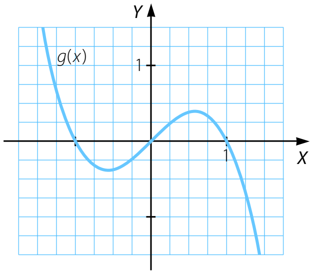
$$x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow g\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \text{ Mínimo}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow g\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \text{ Máximo}$$

$$g''(x) = -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa

$x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Punto de inflexión



022 **Representa las siguientes funciones racionales.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + x}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 5}{x} = 0 \rightarrow x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \rightarrow \left(-\sqrt{5}, 0\right), \left(\sqrt{5}, 0\right)$$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5}{x} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5}{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5}{x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

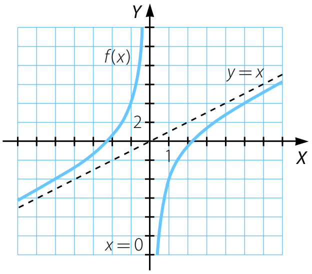
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5}{x^2} = 1 \neq 0 \rightarrow m = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 5}{x} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-5}{x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = x$$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2} > 0 \rightarrow f(x) \text{ creciente}$$

No presenta máximos ni mínimos.

$$f''(x) = \frac{-10}{x^3} \neq 0 \rightarrow f(x) \text{ no presenta puntos de inflexión.}$$



- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

b) $x^3 + x = 0 \rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Dom $g = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

$$g(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x^3 + x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{No tiene porque } g(x) \text{ no está definida para } x = 0.$$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $g(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^3 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3 + x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^3 + x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$g'(x) = \frac{-x^4 + x^2}{(x^3 + x)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

$x = -1 \rightarrow g(-1) = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ Mínimo

$x = 1 \rightarrow g(1) = \frac{1}{2} \rightarrow \left(1, \frac{1}{2}\right)$ Máximo

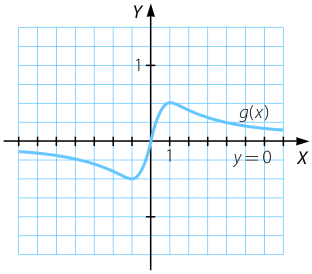
$$g''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow 2x^3 - 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava

$x = -\sqrt{3} \rightarrow g\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ Punto de inflexión

$x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Punto de inflexión

$x = \sqrt{3} \rightarrow g\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ Punto de inflexión



023 **Representa estas funciones racionales.**

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{x^4 - 3x}{x}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3-3}{x} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3} \rightarrow \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3-3}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3-3}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3-3}{x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3-3}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3-3}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2} = 0 \to 2x^3 + 3 = 0 \to x = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}} = -1{,}14$$

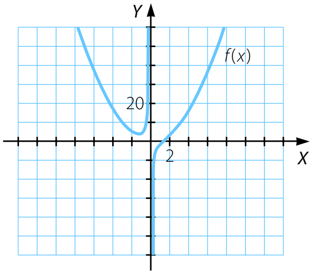
- En $\left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{-3}{2}}\right) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente
- En $\left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}, 0\right) \cup (0, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

$$x = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}} \to f\left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}\right) = \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4} = 3{,}93 \to \left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}, \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4}\right) \text{ Mínimo}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6}{x^3} = 0 \to 2x^3 - 6 = 0 \to x = \sqrt[3]{3} \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$$

- En $(-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[3]{3}, +\infty\right) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava
- En $\left(0, \sqrt[3]{3}\right) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa

$x = \sqrt[3]{3} \to f(\sqrt[3]{3}) = 0 \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$ Punto de inflexión



b) Dom $g = \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

$$g(x) = 0 \to \frac{x^4 - 3x}{x} = 0 \to x^4 - 3x = 0 \to x(x^3 - 3) = 0$$
$$\to x = \sqrt[3]{3} \to \left(\sqrt[3]{3}, 0\right)$$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $g(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 3x}{x} = \lim_{x \to 0} x^3 - 3 = -3 \to \text{No tiene asíntotas verticales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = -\infty$$

$g'(x) = 3x^2 = 0 \to x = 0$

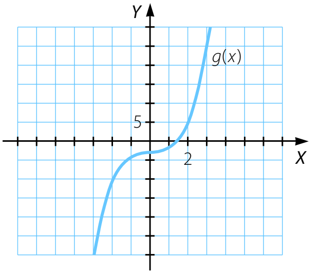
- En $(-\infty, 0) \to g'(x) > 0 \to g(x)$ creciente
- En $(0, +\infty) \to g'(x) > 0 \to g(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$g''(x) = 6x = 0 \to x = 0$

- En $(-\infty, 0) \to g''(x) < 0 \to g(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \to g''(x) > 0 \to g(x)$ cóncava

No presenta puntos de inflexión, ya que en $x = 0$ no está definida la función.



024 **Representa las siguientes funciones con radicales.**

a) $f(x) = \sqrt{x - 3}$ **b)** $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$

a) $x - 3 \geq 0 \to x \geq 3 \to \text{Dom } f = [3, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \to x - 3 = 0 \to x = 3 \to (3, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

No tiene asíntotas verticales porque en el extremo del dominio la función está definida.

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - 3} = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x - 3}}{x} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

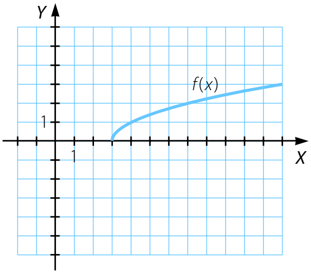
Tiene una rama parabólica: $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - 3} = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 3}} > 0, \forall x \in (3, +\infty) \to f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = \frac{-1}{4(x - 3)\sqrt{x - 3}} < 0, \forall x \in (3, +\infty) \to f(x)$ convexa

No presenta puntos de inflexión.



b) $x^2 - 7x \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [7, +\infty) \rightarrow \text{Dom } g = (-\infty, 0] \cup [7, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $g(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 7x} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (7, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 7x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 7x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 7x - x^2}{\sqrt{x^2 - 7x} + x} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-7x}{\sqrt{x^2 - 7x} + x} = \dfrac{-7}{2} \rightarrow n = \dfrac{-7}{2} \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = mx + n \rightarrow y = x - \frac{7}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x}}{x} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(g(x) + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 7x} + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 7x - x^2}{\sqrt{x^2 - 7x} - x} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-7x}{\sqrt{x^2 - 7x} - x} = \dfrac{7}{2} \rightarrow n = \dfrac{7}{2} \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = mx + n \rightarrow y = -x + \frac{7}{2}$$

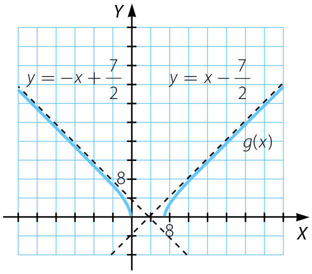
No tiene ramas parabólicas.

$$g'(x) = \frac{2x - 7}{2\sqrt{x^2 - 7x}} = 0 \rightarrow x = \frac{7}{2} \notin \text{Dom } g \rightarrow \text{No presenta máximos ni mínimos.}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(7, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

$$g''(x) = \frac{-49}{4(x^2 - 7x)\sqrt{x^2 - 7x}} < 0,\ \forall x \in (-\infty,\ 0) \cup (7,\ +\infty) \rightarrow g(x) \text{ convexa}$$

No presenta puntos de inflexión.



025 Representa estas funciones con radicales.

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$

b) $g(x) = x + \sqrt{x}$

a) $x^3 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2(x-1) \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow \text{Dom } f = [1, +\infty)$

- Cortes con el eje X:
$$f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x^3 - x^2} = 0 \rightarrow x^2(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (1, 0)$$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - x^2} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x^2}}{x} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene una rama parabólica:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - x^2} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2}} = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(3x-2) = 0$$

$$\rightarrow x = 0,\ x = \frac{2}{3} \notin \text{Dom } f \rightarrow \text{No presenta máximos ni mínimos.}$$

$f'(x) > 0,\ \forall x \in (1, +\infty) \rightarrow f(x)$ creciente

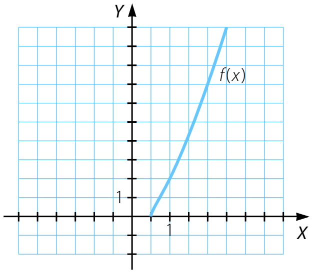
$$f''(x) = \frac{3x^4 - 4x^3}{4(x^3 - x^2)\sqrt{x^3 - x^2}} = \frac{3x^2 - 4x}{4(x-1)\sqrt{x^3 - x^2}} = 0$$

$$\rightarrow x(3x-4) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \frac{4}{3}$$

- En $\left(1, \frac{4}{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

- En $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = \frac{4}{3} \rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \rightarrow \left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$ Punto de inflexión



b) Dom $g = [0, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $g(x) = 0 \rightarrow x + \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

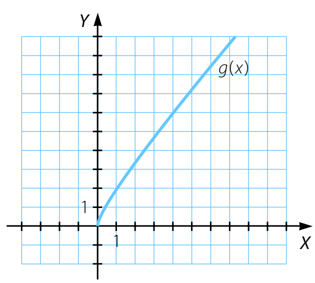
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$

$g'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$g''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \in (0, +\infty) \rightarrow g(x)$ convexa



026 **Representa las siguientes funciones exponenciales.**

a) $f(x) = e^{-x} + 7$ **b) $g(x) = 5 + e^x$**

a) Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 8 \rightarrow (0, 8)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} + 7) = 7 \rightarrow$ Asíntota horizontal

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + 7) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + 7}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

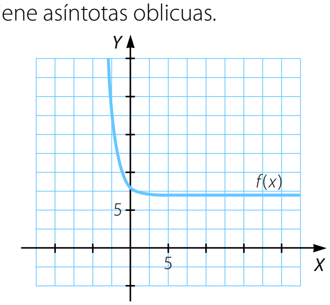
$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + 7) = +\infty$

$f'(x) = -e^{-x} < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = e^{-x} > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

No presenta puntos de inflexión.



b) Dom $g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$

No tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (5 + e^x) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5 + e^x) = 5 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 5$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5 + e^x}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

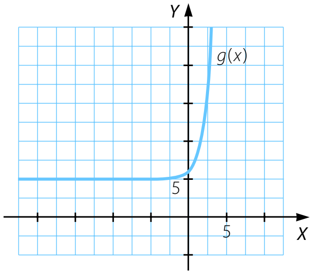
Tiene una rama parabólica:

$\lim\limits_{x \to +\infty} (5 + e^x) = +\infty$

$g'(x) = e^x > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$g''(x) = e^x > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava y no presenta puntos de inflexión.



027 **Representa estas funciones exponenciales.**

a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ **b)** $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

a) Dom $f = [0, +\infty)$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty$

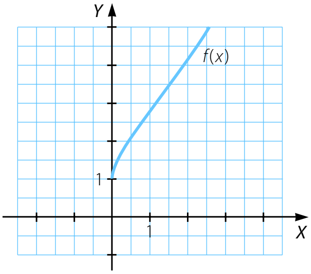
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$$f''(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{4x}-\frac{e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}=0\rightarrow \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}=0\rightarrow e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)=0\rightarrow x=1$$

- En $(0, 1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = 1 \rightarrow f(1) = e \rightarrow (1, e)$ Punto de inflexión



b) Dom $g = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$g'(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente

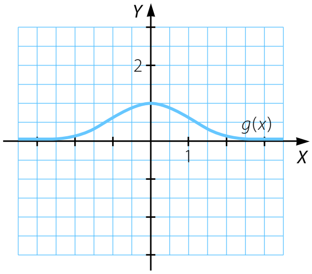
$x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow (0, 1)$ Máximo

$g''(x) = -e^{\frac{-x^2}{2}} - xe^{\frac{-x^2}{2}}(-x) = e^{\frac{-x^2}{2}}(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = \pm 1$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ cóncava
- En $(-1, 1) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ convexa

$x = -1 \rightarrow f(1) = e^{\frac{-1}{2}} \rightarrow \left(-1, e^{\frac{-1}{2}}\right)$ Punto de inflexión

$x = 1 \rightarrow f(1) = e^{\frac{-1}{2}} \rightarrow \left(1, e^{\frac{-1}{2}}\right)$ Punto de inflexión



028 Representa las siguientes funciones logarítmicas.

a) $f(x) = \ln(x+4)$ b) $g(x) = \ln(x^2-4)$

a) $x+4>0 \rightarrow x>-4 \rightarrow \text{Dom } f = (-4, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\ln(x+4) = 0 \rightarrow x+4 = e^0 = 1 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \ln 4 \rightarrow (0, \ln 4)$

$\lim\limits_{x \to -4^+} \ln(x+4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+4) = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

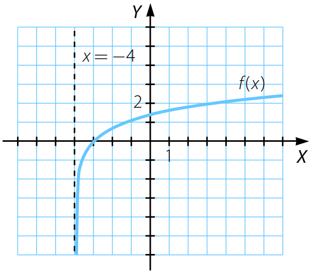
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+4)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+4) = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+4} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x+4)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ convexa



b) $x^2 - 4 > 0 \rightarrow (x-2)(x+2) > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$\rightarrow \text{Dom } g = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\ln(x^2-4) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = e^0 = 1 \rightarrow x^2 = 1 + 4$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{5} \rightarrow \left(-\sqrt{5}, 0\right), \left(\sqrt{5}, 0\right)$

- Corte con el eje Y: no tiene porque $g(x)$ no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} \ln(x^2-4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x^2-4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 2$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2-4) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2-4) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2-4)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(x^2-4)}{x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

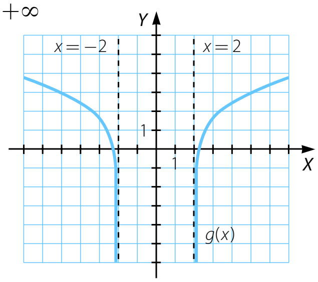
Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2-4) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2-4) = +\infty$

$g'(x) = \dfrac{2x}{x^2-4} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, -2) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creciente

$g''(x) = \dfrac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2} < 0 \rightarrow g(x)$ convexa



029 **Representa esta función logarítmica: $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$**

$x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $\ln(x^2 - x + 1) = 0 \rightarrow x^2 - x + 1 = e^0 = 1 \rightarrow x^2 - x = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (1, 0)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \ln 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{x} = 0 \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

- En $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

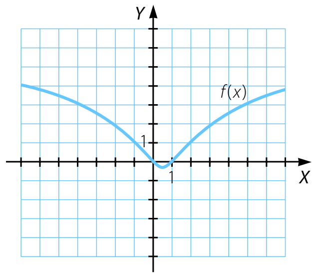
$$x = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \ln\frac{3}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \ln\frac{3}{4}\right) \text{ Mínimo}$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2} = -0{,}37;\ x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2} = 1{,}37$$

- En $\left(-\infty, \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}\right) \cup \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2} \rightarrow f\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}\right) = 0{,}41 \rightarrow (-0{,}37;\ 0{,}41) \text{ Punto de inflexión}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2} \rightarrow f\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}\right) = 0{,}41 \rightarrow (1{,}37;\ 0{,}41) \text{ Punto de inflexión}$$



030 Representa la función: $f(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$f(x) = e^{\sqrt{-x}} \rightarrow$ Está definida para $x \leq 0 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = e^{\sqrt{0}} = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\sqrt{-x}} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{\sqrt{-x}}}{x} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene dos ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\sqrt{-x}} = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} \cdot e^{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

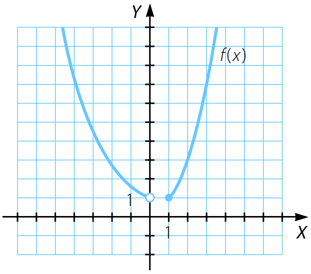
- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{-x}} - \dfrac{e^{\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(-1, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

$x = -1 \rightarrow f(-1) = e \rightarrow (-1, e)$ Punto de inflexión



031 Representa la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ \ln(x^2 - 4) & \text{resto} \end{cases}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Cortes con el eje X:

  $f(x) = 0 \rightarrow (0, 0), \left(-\sqrt{5}, 0\right), \left(\sqrt{5}, 0\right)$

- Corte con el eje Y:

  $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x^2 - 4)}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

- Tiene ramas parabólicas:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$

- Crecimiento:

  $$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ \dfrac{2x}{x^2 - 4} & \text{resto} \end{cases}$$

  $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

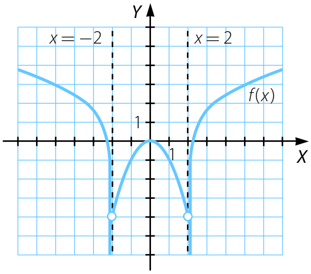
- En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Máximo

- Concavidad:

  $$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ \dfrac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} & \text{resto} \end{cases}$$

- En $(-2, 2) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\mathbb{R} - (-2, 2) \rightarrow f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ convexa



032 Representa las siguientes funciones con valor absoluto.

a) $f(x) = 4x + |-x^2 - 18x|$ b) $g(x) = |x^3 + 2x^2 - 6x|$

a) $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 18x & \text{si } -x^2 - 18x \geq 0 \\ 4x + x^2 + 18x & \text{si } -x^2 - 18x < 0 \end{cases}$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 14x & \text{si } x \in [-18, 0] \\ x^2 + 22x & \text{si } x \in (-\infty, -18) \cup (0, +\infty) \end{cases}$

Se trata de representar dos parábolas en sus respectivos intervalos.

Puntos de intersección:

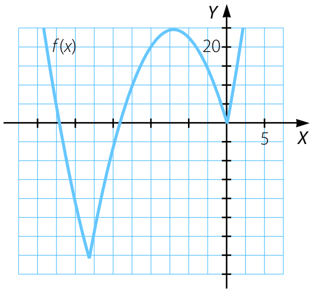
$-x^2 - 14x = x^2 + 22x \rightarrow 2x^2 + 36x = 0 \rightarrow x(2x + 36) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -18 \end{cases}$

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$x = -18 \rightarrow y = -72 \rightarrow (-18, -72)$

Vértice de $f(x) = -x^2 - 14x \rightarrow (-7, 49)$

Vértice de $f(x) = x^2 + 22x \rightarrow (-11, -121)$



b) Estudiamos primero la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x$ y tras representarla, dibujamos las partes negativas como positivas haciendo una simetría respecto del eje X.

Dominio $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

$x^3 + 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \pm \sqrt{7} \end{cases}$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{22}}{3} \rightarrow \begin{cases} x = -2{,}23 \\ x = 0{,}9 \end{cases}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-2 - \sqrt{22}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{-2 + \sqrt{22}}{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-2 - \sqrt{22}}{3}, \dfrac{-2 + \sqrt{22}}{3}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -2{,}23 \to f(-2{,}23) = 12{,}24 \to (-2{,}23;\ 12{,}24)$ Máximo

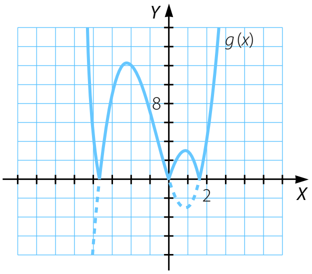
$x = 0{,}9 \to f(0{,}9) = -3{,}05 \to (0{,}9;\ -3{,}05)$ Mínimo

$f''(x) = 6x + 4 = 0 \to x = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} = -0{,}67$

- En $\left(-\infty, \frac{-2}{3}\right) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa
- En $\left(\frac{-2}{3}, +\infty\right) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

$x = \frac{-2}{3} \to f\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{124}{27} = 4{,}59$

$\to \left(\frac{-2}{3}, \frac{124}{27}\right)$ Punto de inflexión



033 **Representa esta función:** $f(x) = \begin{cases} |-x^2 - 3x| & \text{si } x \le 0 \\ -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Representamos $f(x) = -x^2 - 3x$ en el intervalo $(-\infty, 0]$.

  Se trata de una parábola de vértice $\left(\frac{-3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

  Cortes en el eje X: $-x^2 - 3x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases} \to (0, 0), (-3, 0)$

  Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

  En $(-\infty, -3)$ la función es negativa, por lo que para conseguir el valor absoluto, dibujamos la simétrica respecto al eje X.

- Representamos $f(x) = -e^x$ en el intervalo $(0, +\infty)$.

  No corta al eje X.

  Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = -e^0 = -1 \to (0, -1)$

  No tiene asíntotas verticales.

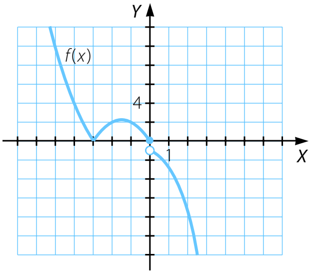
  $\lim_{x \to +\infty} - e^x = -\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

  $\lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x}{x} = -\infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

  Tiene una rama parabólica: $\lim_{x \to +\infty} -e^x = -\infty$

  $f'(x) = -e^x < 0 \to f(x)$ decreciente

  $f''(x) = -e^x < 0 \to f(x)$ convexa



034 **Halla el dominio de las siguientes funciones polinómicas.**

a) $y = 1 - 2x$ b) $y = x^2 - 2x - 3$ c) $y = x^3 + 4x$ d) $y = (x^2 - 4)^2$

El dominio de cualquier función polinómica es $\mathbb{R}$.

035 **Calcula el dominio de estas funciones racionales.**

a) $y = \dfrac{x-2}{x-3}$ b) $y = \dfrac{3x}{x^2-9}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

c) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}$

036 **Determina el dominio de las siguientes funciones con radicales.**

a) $y = \sqrt{3-x} + 3$ c) $y = \sqrt{x^2+25}$

b) $y = \sqrt{16-x^2}$ d) $y = \sqrt{x^2-2x-3}$

a) $3 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, 3]$

b) $16 - x^2 \geq 0 \rightarrow (4-x)(4+x) \geq 0 \rightarrow x \in [-4, 4] \rightarrow \text{Dominio} = [-4, 4]$

c) $x^2 + 25 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R}$

d) $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \rightarrow (x-3)(x+1) \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

$\rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

037 **Halla el dominio de estas funciones exponenciales y logarítmicas.**

a) $y = x^2e^x$ b) $y = 4^{-\frac{1}{x^2}}$ c) $y = \ln(x^2+4)$ d) $y = \dfrac{x}{\log_3 x}$

a) $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

b) $x \neq 0 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $x^2 + 4 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R}$

d) $\log_3 x = 0 \rightarrow x = 3^0 = 1$. Como $x > 0 \rightarrow \text{Dominio} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

038 **Determina el dominio de las siguientes funciones.**

a) $y = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$ c) $y = \sqrt{-x^2-2x+3}$ e) $y = 2^{-x^2+7}$

b) $y = \sqrt[3]{x^2+4x-1}$ d) $y = \ln(5x + x^2)$ f) $y = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$

a) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

c) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0 \rightarrow -(x+3)(x-1) \geq 0 \rightarrow x \in [-3, 1] \rightarrow \text{Dominio} = [-3, 1]$

d) $5x + x^2 > 0 \rightarrow x(5+x) > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$

$\rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$

e) $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

f) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1\}$

039 **Encuentra el dominio de estas funciones.**

a) $y = \dfrac{sen\ x}{x - \pi}$ b) $y = tg\ \dfrac{x}{x-1}$ c) $y = arc\ cos\ (x^2 - 3)$ d) $y = x - sen\ x$

a) Dominio $= \mathbb{R} - \{\pi\}$

b) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow 2x = \pi x - \pi \rightarrow x = \dfrac{\pi}{\pi - 2} \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2-\pi} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Además, $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$.

Dominio $= \mathbb{R} - \left\{1, \dfrac{\pi}{2-\pi} + k\pi\right\}$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $y = arc\ cos\ x$ está definida en:

$[-1, 1] \rightarrow -1 \leq x^2 - 3 \leq 1 \rightarrow 2 \leq x^2 \leq 4$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right) \\ x^2 - 4 \leq 0 \rightarrow x \in [-2, 2] \end{cases}$$

La zona común de ambos intervalos es $\left[-2, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, 2\right]$ que es el dominio de la función.

d) Dominio $= \mathbb{R}$

040 **Calcula los puntos en que las gráficas de las siguientes funciones cortan a los ejes de coordenadas.**

a) $y = -x^2 - x + 12$ c) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ e) $y = \dfrac{3x^2}{x^2 - 1}$

b) $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$ d) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

a) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \rightarrow -x^2 - x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow (-4, 0), (3, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 12 \rightarrow (0, 12)$

b) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (1, 0), (4, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

c) • Cortes con el eje X:

$y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (1, 0), \left(-\sqrt{7}, 0\right), \left(\sqrt{7}, 0\right)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0, 7)$

d) • Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

e) • Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{3x^2}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

041 **Halla los puntos de corte con los ejes de las gráficas de estas funciones.**

a) $y = \dfrac{2x-1}{x-x^2}$ b) $y = \dfrac{x^2-9}{e^{x^2}}$ c) $y = \dfrac{\ln x}{x^2-4}$ d) $y = x + e^{-x}$

a) • Cortes con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow \frac{2x-1}{x-x^2} = 0 \rightarrow 2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

• Corte con el eje Y: no tiene porque la función no está definida para $x = 0$.

b) • Cortes con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow \frac{x^2-9}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow (-3, 0), (3, 0)$$

• Corte con el eje Y: si $x = 0 \rightarrow y = -9 \rightarrow (0, -9)$

c) • Cortes con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow \frac{\ln x}{x^2-4} = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = e^0 = 1 \rightarrow (1, 0)$$

• Corte con el eje Y: no tiene porque la función no está definida para $x = 0$.

d) • Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow x + e^{-x} = 0$ para resolver esta ecuación estudiamos y'.

$y' = 1 - e^{-x} = 0 \rightarrow e^{-x} = 1 \rightarrow -x = \ln 1 = 0 \rightarrow x = 0$

En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

Así, en $x = 0$ alcanza el único mínimo, $(0, 1)$, por lo que no puede haber puntos de corte con el eje X.

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

042 **Razone a qué es igual el dominio de la función: $f(x) = \dfrac{2x-2}{x+1}$**

(Aragón. Septiembre 2008. Cuestión B1)

$x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

043 **¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-4}$?**

(La Rioja. Junio 2005. Parte A. Cuestión 3)

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq \pm 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Dom } f = (0, +\infty) - \{+2\}$$

044 **Dada la curva $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, calcular los puntos de corte con los ejes coordenados.**

(Murcia. Junio 2008. Bloque 2. Cuestión 2)

• Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{2x-1}{x+1} = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

• Corte con el eje Y: si $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

045 Dada la función $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x$, se pide hallar:

a) El dominio de definición.

b) Puntos de corte con los ejes.

(Cantabria. Septiembre 2008. Bloque 2. Opción A)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) • Cortes con el eje X:

$$y = 0 \rightarrow -x^3 - 2x^2 + 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (-3, 0), (0, 0), (1, 0)$$

• Corte con el eje Y: si $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

046 Analiza si estas funciones son simétricas respecto del eje de ordenadas o respecto del origen.

a) $y = x^3 + x$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 5$

c) $y = x^2 - x + 3$

d) $y = \dfrac{3x}{x^2 - 9}$

e) $y = \dfrac{\ln |x|}{x + 4}$

f) $y = (2x^2 - 1)^2$

a) $f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$
$\rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

b) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 5 = f(x)$
$\rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

c) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 3 = x^2 + x + 3 \rightarrow$ No es simétrica.

d) $f(-x) = \dfrac{3(-x)}{(-x)^2 - 9} = \dfrac{-3x}{x^2 - 9} = -\dfrac{3x}{x^2 - 9} = -f(x)$
$\rightarrow$ Simétrica respecto del origen.

e) $f(-x) = \dfrac{\ln |-x|}{-x + 4} = \dfrac{\ln |x|}{-x + 4} \rightarrow$ No es simétrica.

f) $f(-x) = \left(2(-x)^2 - 1\right)^2 = (2x^2 - 1)^2 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y.

047 Estudia si las siguientes funciones son periódicas y, en caso afirmativo, determina su período.

a) $y = \cos 3x$

b) $y = \operatorname{sen}^2 x$

c) $y = \operatorname{sen} 4x$

d) $y = 3 \cos x$

e) $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

f) $y = x^2 - \operatorname{sen}^2 x$

a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
$f(x)$	1	0	−1	0	1	0	−1	0	1

La función es periódica de período $\dfrac{2\pi}{3}$.

b)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	1	0	1	0

La función es periódica de período π.

c)

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0	1

La función es periódica de período $\frac{2\pi}{4}$.

d)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	3	0	-3	0	3

La función es periódica de período 2π.

e)

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0	1

La función es periódica de período $\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$.

f) Esta función no es periódica.

048 **Determina el dominio de estas funciones y los puntos de corte con los ejes. Razona si son pares o impares, o si no son simétricas.**

a) $y = \dfrac{x-1}{x^2}$

b) $y = x^2e^{-x}$

c) $y = \sqrt{25 - x^2}$

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = 7 - 2x^2$

f) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 7}$

a) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque la función no está definida para $x = 0$.

$f(-x) = \dfrac{-x-1}{(-x)^2} = \dfrac{-x-1}{x^2} \rightarrow$ No es simétrica.

b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{e^x} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{e^{-x}} = x^2e^x \rightarrow$ No es simétrica.

c) $25 - x^2 \geq 0 \rightarrow (5 - x)(5 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-5, 5] \rightarrow$ Dominio $= [-5, 5]$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{25 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

$f(-x) = \sqrt{25 - (-x)^2} = \sqrt{25 - x^2} = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y

d) $4 - x^2 \geq 0 \rightarrow (2 - x)(2 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-2, 2] \rightarrow$ Dominio $= [-2, 2]$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$

$f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y

e) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow 7 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \rightarrow \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right), \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0, 7)$

$f(-x) = 7 - 2(-x)^2 = 7 - 2x^2 = f(x) \rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y

f) $x^2 - 2x + 7 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 7} = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 7 = 0$
  $\rightarrow$ No tiene soluciones reales $\rightarrow$ No corta con el eje X.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{7} \rightarrow \left(0, \sqrt{7}\right)$

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 2(-x) + 7} = \sqrt{x^2 + 2x + 7} \rightarrow$ No es simétrica.

049 **Determina las ramas parabólicas de estas funciones.**

a) $f(x) = 9x + 6x^2 - x^4$ **b)** $g(x) = x^3 + 6x^2 - x + 4$ **c)** $h(x) = -x^4 - 7x^2 + x$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (9x + 6x^2 - x^4) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (9x + 6x^2 - x^4) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 6x^2 - x + 4) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 6x^2 - x + 4) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 - 7x^2 + x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 - 7x^2 + x) = -\infty$

050 **Halla las asíntotas y las ramas infinitas de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ **c)** $h(x) = \dfrac{3x^3}{x^2 - 4}$ **d)** $v(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x}$

a) $e^{2x} - 1 = 0 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = \ln 1 = 0 \rightarrow x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas, ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

b) $x+1=0 \rightarrow x=-1$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+1} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y=1$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) $x^2-4=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^3}{x^2-4} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x=-2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^3}{x^2-4} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x=2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^3}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3}{x^2-4} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3}{x(x^2-4)} = 3 \rightarrow m=3 \\ \lim\limits_{x\to \infty} \big(h(x)-mx\big) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x^3}{x^2-4} - 3x\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{12x}{x^2-4} = 0 \rightarrow n=0 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y=3x$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-9}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-9}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-9}{x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{v(x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-9}{x^2} = 1 \rightarrow m=1 \\ \lim\limits_{x\to \infty} \big(v(x)-mx\big) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-9}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-9}{x} = 0 \rightarrow n=0 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y=x$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

051 ¿Cuántas asíntotas verticales tiene la función $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-16}$?

(La Rioja. Junio 2008. Parte A. Cuestión 2)

$$\lim_{x \to -4} \frac{x+4}{x^2-16} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -4$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x+4}{x^2-16} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 4$$

052 Dada la función $f(x) = 5 - \dfrac{x}{x^2-4}$, se pide hallar:

a) Las asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

b) Las asíntotas horizontales y oblicuas.

a) $f(x) = 5 - \dfrac{x}{x^2-4} = \dfrac{5x^2-20-x}{x^2-4}$ $\qquad x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -2^+} \frac{5x^2-20-x}{x^2-4} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -2^-} \frac{5x^2-20-x}{x^2-4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{5x^2-20-x}{x^2-4} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{5x^2-20-x}{x^2-4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 2$$

b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2-20-x}{x^2-4} = 5 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 5$

No tiene asíntotas oblicuas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$.

053 Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-4}$, $x \neq \pm 2$
Determínense las asíntotas de f.

(Madrid. Septiembre 2008. Opción B. Ejercicio 2)

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2+2}{x^2-4} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2+2}{x^2-4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+2}{x^2-4} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+2}{x^2-4} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 2$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2}{x^2-4} = 1 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 1$$

No tiene asíntotas oblicuas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$.

054 **Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $x \to \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$**
Calcula las asíntotas de $f(x)$.

Estudiamos el dominio de $f(x)$:

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 0 \to \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1+x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x \geq -1 \\ 1 < x \end{array}\right\} \to x \in [-1, 1) \\ \left.\begin{array}{l} 1+x \leq 0 \\ 1-x < 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x \leq -1 \\ 1 < x \end{array}\right\} \to \varnothing \end{array}\right\} \to \text{Dom } f = [-1, 1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = +\infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 1$$

En $x = -1$ no tiene asíntota vertical ya que la función está definida.

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas por tener su dominio restringido.

055 **Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$, calcula, cuando existan, las asíntotas verticales y las horizontales.**

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 5)

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \to \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \to \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 3$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = 0 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

056 **Sea la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{8}$, se pide:**

a) Calcular su dominio.

b) Determinar las asíntotas y los cortes con los ejes.

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 3. Cuestión 1)

a) Dominio $= \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{6}{8}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4$ es una función polinómica por lo que no tiene asíntotas.

- Cortes con el eje X:

$$y = 0 \to 6x^2 - x^4 = 0 \to x^2(6 - x^2) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$
$$\to \left(-\sqrt{6}, 0\right), (0, 0), \left(\sqrt{6}, 0\right)$$

- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

057 Considera la función definida para $x \neq -4$ por: $f(x) = \dfrac{4x^2 + 4}{x + 4}$

a) Calcula su dominio.

b) Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.

c) Estudia la posición relativa de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

a) $x + 4 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4\}$

b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{4x^2 + 4}{x + 4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 + 4}{x + 4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 + 4}{x + 4} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 + 4}{x(x + 4)} = 4 \rightarrow m = 4 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{4x^2 + 4}{x + 4} - 4x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-16x + 4}{x + 4} = -16 \rightarrow n = -16 \end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = 4x - 16$

c) • Situación de la gráfica con respecto de la asíntota vertical:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{4x^2 + 4}{x + 4} = -\infty$

Por la derecha: $\lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{4x^2 + 4}{x + 4} = +\infty$

• Situación de la gráfica con respecto a la asíntota oblicua:

$x \rightarrow +\infty \rightarrow \dfrac{4x^2 + 4}{x + 4} - (4x - 16) = \dfrac{68}{x + 4} > 0$

$\rightarrow f(x)$ está por encima de la asíntota.

$x \rightarrow -\infty \rightarrow \dfrac{4x^2 + 4}{x + 4} - (4x - 16) = \dfrac{68}{x + 4} < 0$

$\rightarrow f(x)$ está por debajo de la asíntota.

058 Halla las asíntotas y las ramas infinitas de la siguiente función, y determina la posición relativa de su gráfica respecto de cada una de ellas.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x(x-1)}=2\to m=2\\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x-1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2\to n=2\end{array}\right\}$$

$\to$ Asíntota oblicua: $y=2x+2$

No tiene ramas infinitas ya que hay asíntota oblicua.

- Situación de la gráfica con respecto de la asíntota vertical:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=-\infty$ Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=+\infty$

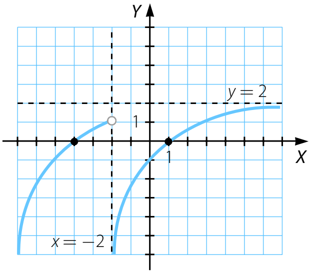
- Situación de la gráfica con respecto a la asíntota oblicua:

$x\to+\infty\to\dfrac{2x^2+1}{x-1}-(2x+2)=\dfrac{3}{x-1}>0\to f(x)$ está por encima de la asíntota.

$x\to-\infty\to\dfrac{2x^2+1}{x-1}-(2x+2)=\dfrac{3}{x-1}<0\to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

059 Dibuja la gráfica de una función que tenga las siguientes características:

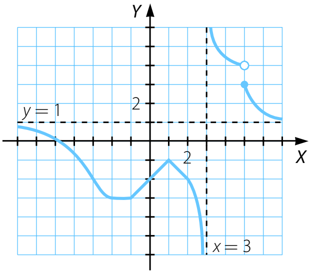
- El dominio es todos los números reales.
- Corta al eje X en los puntos $x=1$ y $x=-4$.
- Tiene como asíntota vertical la recta $x=-2$.
- La recta $y=2$ es una asíntota horizontal si $x\to+\infty$.
- Tiene una rama infinita cuando $x\to-\infty$.



060 Construye una función que verifique simultáneamente:

- Es discontinua en $x=3$ y $x=5$.
- No es derivable en $x=1$, $x=3$ y $x=5$.
- Tiene una asíntota vertical en $x=3$.
- Tiene una asíntota horizontal en $y=1$.

(Navarra. Septiembre 2006. Ejercicio 2. Opción A)



061 **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de las siguientes funciones.**

a) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$

b) $y = \dfrac{4x^2 + 1}{x}$

c) $y = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

d) $y = x^4 - 24x^3$

e) $y = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$

f) $y = \dfrac{x^4 + 2}{x}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$

- En $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(-5, 1) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -5$ presenta un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

b) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$

- En $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\dfrac{-1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \dfrac{-1}{2}$ presenta un máximo y en $x = \dfrac{1}{2}$, un mínimo.

c) Dominio $= \mathbb{R} - \{3\}$

$y' = \dfrac{-2}{(x-3)^3} \neq 0$ en todo el dominio $\rightarrow$ No tiene máximos ni mínimos.

- En $(-\infty, 3) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(3, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

d) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 72x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 18 \end{cases}$ $\qquad y'' = 12x^2 - 144x$

En $x = 18 \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Presenta un mínimo.

Por tanto, en $(-\infty, 18)$ la función es decreciente y en $(18, +\infty)$ es creciente.

e) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = \dfrac{3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3}{2} = 0 \rightarrow 3^x - \dfrac{1}{3^x} = 0 \rightarrow (3^x)^2 - 1 = 0 \rightarrow 3^x = \pm 1$

Solo es posible $3^x = 1 \rightarrow x = \log_3 1 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

f) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

$$y' = \frac{3x^4 - 2}{x^2} = 0 \rightarrow 3x^4 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(-\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ presenta un máximo y en $x = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$, un mínimo.

062 **Halla el crecimiento y decrecimiento, y los máximos y los mínimos de estas funciones.**

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \frac{\ln x}{x^2}$ **c)** $y = \frac{x+4}{x-4}$ **d)** $y = \frac{x^2}{3^x}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow x(x-2) \geq 0 \rightarrow$ Dominio $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$y' = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = 0 \rightarrow x = 1 \text{ no está en el dominio.}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

b) Dominio $= (0, +\infty)$

$$y' = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 2\ln x = 1 \rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{e}$$

- En $\left(0, \sqrt{e}\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\sqrt{e}, +\infty\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \sqrt{e}$ presenta un máximo.

c) Dominio $= \mathbb{R} - \{4\}$

$$y' = \frac{-8}{(x-4)^2} < 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \text{Función decreciente}$$

d) Dominio $= \mathbb{R}$

$$y' = \frac{2x - x^2 \ln 3}{3^x} = 0 \rightarrow x(2 - x\ln 3) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \frac{2}{\ln 3}$$

- En $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{\ln 3}, +\infty\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $\left(0, \frac{2}{\ln 3}\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = \frac{2}{\ln 3}$ presenta un máximo.

063 **Dada la función $f(x) = 2 - \dfrac{x}{x^2 - 16}$, calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.**

$$f(x) = 2 - \frac{x}{x^2 - 16} = \frac{2x^2 - 32 - x}{x^2 - 16}$$

$x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm 4 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 16}{(x^2 - 16)^2} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente en $\mathbb{R} - \{-4, 4\}$

No presenta máximos ni mínimos.

064 **En la función $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x$, determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.**

(Andalucía. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 2)

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$f'(x) = x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

- En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(-2, 2) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 2$, un mínimo.

065 **Estudia la monotonía de**

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 7}$$

¿Tiene máximos o mínimos?

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x^2 - 4x + 7)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{3} = 0{,}27 \\ x = 2 + \sqrt{3} = 3{,}73 \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, 2 - \sqrt{3}\right) \cup \left(2 + \sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 2 - \sqrt{3}$ $f(x)$ presenta un mínimo y en $x = 2 + \sqrt{3}$, un máximo.

066 **Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{x + 2}$**

Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus máximos y mínimos.

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2} = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$$

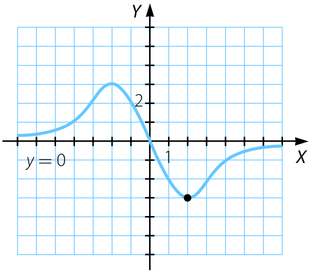
- En $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-3, -2) \cup (-2, -1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -3 \rightarrow f(-3) = -4 \rightarrow (-3, -4)$ Máximo

$x = -1 \rightarrow f(-1) = 0 \rightarrow (-1, 0)$ Mínimo

067 Dibuja la gráfica de una función que cumpla que:

- Está definida en toda la recta real.
- Es simétrica respecto del origen.
- El eje X es una asíntota horizontal.
- Tiene un mínimo en el punto $(2, -3)$.



068 Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ y determina:

a) Su dominio.
b) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.
c) Si su gráfica es simétrica respecto del origen o respecto del eje Y.
d) Las asíntotas.
e) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
f) Los máximos y mínimos.

a) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) • Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \rightarrow$ Es simétrica respecto del eje Y.

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

• En $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

• En $(0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

f) $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Máximo

No presenta mínimos.

069 Considera la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$.

a) Estudia su dominio.

b) Halla los puntos en que la gráfica corta a los ejes de coordenadas.

c) Analiza si su gráfica es simétrica respecto del origen o respecto del eje Y.

d) Calcula las asíntotas.

e) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

f) Halla los máximos y mínimos.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

b) • Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \to \dfrac{x+1}{x^2} = 0 \to x+1 = 0 \to x = -1 \to (-1, 0)$

• Corte con el eje Y: no tiene.

c) $f(-x) = \dfrac{-x+1}{(-x)^2} = \dfrac{-x+1}{x^2}$

$\to$ No es simétrica ya que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x^2} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x^2} = 0 \to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

e) $f'(x) = \dfrac{-x-2}{x^3} = 0 \to x = -2$

• En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

• En $(-2, 0) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

f) $x = -2 \to f(-2) = \dfrac{-1}{4} \to \left(-2, \dfrac{-1}{4}\right)$ Mínimo

No presenta máximos.

070 Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$, calcula, cuando existan:

a) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.

b) Los máximos relativos y los mínimos relativos.

(Baleares. Junio 2006. Opción B. Cuestión 5))

a) $x^2 - 2x - 3 = 0 \to \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \to \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$f'(x) = \dfrac{-2x+2}{(x^2-2x-3)^2} = 0 \to 2x = 2 \to x = 1$

• En $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente

• En $(1, 3) \cup (3, +\infty) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

b) En $x = 1$ se alcanza un máximo.

No hay mínimos.

071 Determina los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 6$

b) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

d) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x + 2$

$y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 1$ presenta un punto de inflexión.

b) Dominio $= \mathbb{R} - \{-2\}$

$$y' = \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$y'' = \frac{-8}{(x+2)^3} \neq 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{-2\}$$

No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -2) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-2, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

c) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 16x$

$$y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{12}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

- En $\left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ presenta puntos de inflexión.

d) Dominio $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$y' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} \neq 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-1, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

072 **Determina la concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de estas funciones.**

a) $y = x^2e^x$ b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$ c) $y = x - sen\ x$ d) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = e^x(2x + x^2)$ $y'' = e^x(2 + 4x + x^2) = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$

- En $\left(-\infty, -2-\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+\sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = -2 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.

b) Dominio $= (0, +\infty) - \{1\}$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$$

- En $(0, 1) \cup (e^2, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(1, e^2) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = e^2$ presenta un punto de inflexión.

c) Dominio $= \mathbb{R}$

$y' = 1 - cos\ x$ $y'' = sen\ x = 0 \rightarrow x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

- En $(2k', 2k' + 1)$ con $k' \in \mathbb{Z} \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(2k' + 1, 2k')$ con $k' \in \mathbb{Z} \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En los puntos $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ presenta puntos de inflexión.

d) Dominio $= \mathbb{R} - \{-4, 4\}$

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

$$y'' = \frac{-16}{(x^2 - 16)\sqrt{x^2 - 16}} < 0 \text{ en } (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \rightarrow \text{Función convexa}$$

No presenta puntos de inflexión.

073 **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los de concavidad y convexidad, los máximos y mínimos, y los puntos de inflexión de la función $y = \ln(x^2 + 1)$.**

Dominio $= \mathbb{R}$ $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(-1, 1) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = -1$ y en $x = 1$ presenta puntos de inflexión.

074 Para la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$, determine:

a) Su monotonía y sus extremos relativos.

b) Su curvatura y su punto de inflexión.

(Andalucía. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 2)

a) $f'(x) = 24x^2 - 168x + 240 = 0 \to \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$

- En $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $(2, 5) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

En $x = 2$ se alcanza un máximo y en $x = 5$, un mínimo.

b) $f''(x) = 48x - 168 = 0 \to x = \dfrac{7}{2}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{7}{2}\right) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa
- En $\left(\dfrac{7}{2}, +\infty\right) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava

En $x = \dfrac{7}{2}$ se alcanza un punto de inflexión.

075 Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$.

Dominio $= \mathbb{R}$ $\qquad y' = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \to x = \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}, +\infty\right) \to y' > 0 \to$ Función creciente
- En $\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}, \dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right) \to y' < 0 \to$ Función decreciente

En $x = \dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$ presenta un máximo y en $x = \dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$, un mínimo.

$y'' = 6x - 6 = 0 \to x = 1$

- En $(-\infty, 1) \to y'' < 0 \to$ Función convexa
- En $(1, +\infty) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

En $x = 1$ presenta un punto de inflexión.

076 Estudia en qué intervalos la función $f(x) = 3x^3 + x^2 - 1$ es creciente o decreciente y en cuáles es cóncava o convexa.

¿Presenta algún máximo o mínimo? ¿Tiene puntos de inflexión? En caso afirmativo, determina las coordenadas de cada uno de ellos.

Dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 9x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(9x + 2) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \dfrac{-2}{9}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-2}{9}\right) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\dfrac{-2}{9}, 0\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$x = -\dfrac{2}{9} \rightarrow f\left(\dfrac{-2}{9}\right) = \dfrac{-239}{243} \rightarrow \left(\dfrac{-2}{9}, \dfrac{-239}{243}\right)$ Máximo

$x = 0 \rightarrow f(0) = -1 \rightarrow (0, -1)$ Mínimo

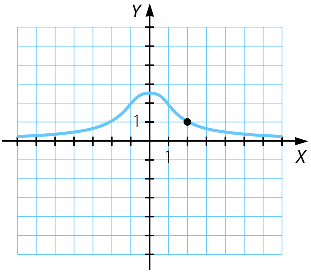
$f''(x) = 18x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2}{18} = \dfrac{-1}{9}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-1}{9}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\dfrac{-1}{9}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

$x = \dfrac{-1}{9} \rightarrow f\left(\dfrac{-1}{9}\right) = \dfrac{-241}{243} \rightarrow \left(\dfrac{-1}{9}, \dfrac{-241}{243}\right)$ Punto de inflexión

077 Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes propiedades:

- Está definida en toda la recta real.
- Es simétrica respecto del eje de ordenadas.
- El eje X es una asíntota horizontal.
- Tiene un punto de inflexión en (2, 1).



078 Estudia el crecimiento y decrecimiento, así como la concavidad y convexidad de la función f: $(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Determina los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$

- En $(0, e) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(e, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = e$ presenta un máximo.

$$f''(x) = \frac{\frac{-1}{x}x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-1 - (1 - \ln x)2}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} = 0$$

$$\rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \rightarrow x = \sqrt{e^3}$$

- En $\left(0, \sqrt{e^3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\sqrt{e^3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = \sqrt{e^3}$ presenta un punto de inflexión.

079 Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x - 1}{x + \dfrac{1}{2}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Calcule los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de $f(x)$.

(Aragón. Septiembre 2005. Opción B. Cuestión 2)

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x - 1}{x + \dfrac{1}{2}} = -2 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 - 2 = -2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ continua en } x = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - (2x - 1)}{\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 0$ se alcanza un máximo.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-4}{\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

080 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones polinómicas, analizando previamente sus características.

a) $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

c) $y = x^3 + 3x$

d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (1, 0), (4, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = +\infty$

$y' = 3x^2 - 8x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{19}}{3}$

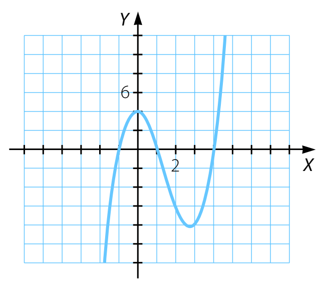
- En $\left(-\infty, \dfrac{4 - \sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4 + \sqrt{19}}{3}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\dfrac{4 - \sqrt{19}}{3}, \dfrac{4 + \sqrt{19}}{3}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \dfrac{4 - \sqrt{19}}{3}$ presenta un máximo y en $x = \dfrac{4 + \sqrt{19}}{3}$, un mínimo.

$y'' = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $\left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = \dfrac{4}{3}$ presenta un punto de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: No podemos resolver la ecuación por Ruffini, así que lo analizamos después de estudiar el crecimiento.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = +\infty$

$y' = 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x = 2$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

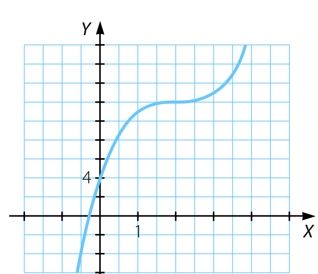
No presenta máximos ni mínimos.

$y'' = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 2$ presenta un punto de inflexión.

Por último, como en $(-\infty, 2)$ la función es creciente, la imagen de 0 es positiva y $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = -\infty$, hay un punto de corte en $(-\infty, 0)$.



c) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $x^3 + 3x = 0 \rightarrow x(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3x) = +\infty$

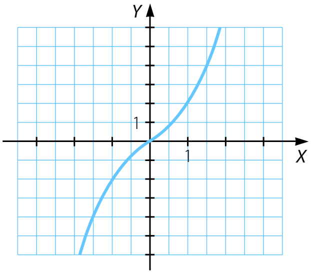
$y' = 3x^2 + 3 \neq 0 \rightarrow$ Función creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0, 7)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty$

$y' = 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

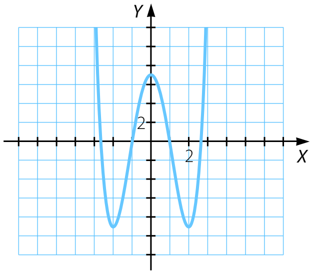
- En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = -2$ y en $x = 2$ presenta dos mínimos y en $x = 0$, un máximo.

$y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{16}{12}} = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\dfrac{4}{3}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-\sqrt{\dfrac{4}{3}}, \sqrt{\dfrac{4}{3}}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ presenta puntos de inflexión.



081 Dada la función $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Máximos y mínimos locales.

d) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio A. Problema 2)

a) Dominio $= \mathbb{R}$

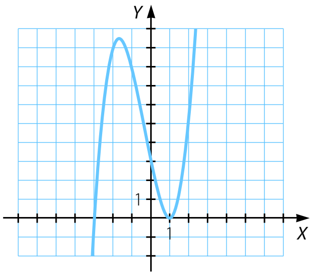
- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$

b) $y' = 3x^2 + 2x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{-5}{3} \end{cases}$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-5}{3}\right) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\dfrac{-5}{3}, 1\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

c) En $x = \dfrac{-5}{3}$ se alcanza un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

d)



082 Calcula razonadamente los valores de a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un extremo relativo en $x = 2$, un punto de inflexión en $x = 0$ y pase por el punto $(1, -5)$.

Representa gráficamente esta función.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

Tiene un extremo relativo en $x = 2$:

$f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

Tiene un punto de inflexión en $x = 0$:

$f''(0) = 0 \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow b = -12$

Pasa por el punto $(1, -5)$:

$f(1) = -5 \rightarrow 1 + a + b + c = -5 \rightarrow 1 - 12 + c = -5 \rightarrow c = 6$

Por tanto, la función es: $f(x) = x^3 - 12x + 6$

Para obtener su representación gráfica, analizamos sus características.

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X:

  $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 12x + 6 = 0$

  No podemos resolver la ecuación por Ruffini, ya que no tiene como raíz ninguno de los divisores de 6.

- Corte con el eje Y:

  $x = 0 \rightarrow f(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$

Como f es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 6) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 6) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

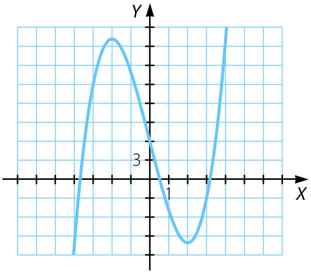
- En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(-2, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 2$, un mínimo.

$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = 0$ presenta un punto de inflexión.



083 En un modelo de coche el consumo de gasolina, para velocidades comprendidas entre 20 y 160 km/h, viene determinado por $C(x) = 8 - 0{,}045x + 0{,}00025x^2$ y viene expresado en litros consumidos cada 100 km, recorridos a una velocidad constante de x km/h.

a) ¿Cuántos litros cada 100 km consume el coche si se conduce a una velocidad de 120 km/h?

b) ¿A qué velocidad consume menos? ¿Y cuánto consume?

c) ¿A qué velocidades se ha de conducir para consumir 10 litros cada 100 km?

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 3. Ejercicio B)

a) $C(120) = 8 - 5,4 + 3,6 = 6,2$

Si conduce a una velocidad de 120 km/h, consumirá 6,2 litros cada 100 km.

b) $C'(x) = -0,045 + 0,0005x = 0 \rightarrow x = 90$

$C''(x) = 0,0005 > 0 \rightarrow$ En $x = 90$ se alcanza un mínimo por lo que a 90 km/h consume menos.

A esta velocidad consumirá: $C(90) = 8 - 4,05 + 2,025 = 5,975$ litros

c) $10 = 8 - 0,045x + 0,00025x^2 \rightarrow 0,00025x^2 - 0,045x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -36,886 \\ x = 216,89 \end{cases}$

Estas velocidades no están comprendidas en [0, 160] por lo que no es posible consumir 10 litros de gasolina conduciendo a las velocidades de definición de la función.

084 **Los beneficios mensuales de un artesano, expresados en euros, cuando fabrica y vende x objetos, se ajustan a la función $B(x) = -0,5x^2 + 50x - 800$, en que $20 \leq x \leq 60$.**

a) Halle el beneficio que obtiene de fabricar y vender 20 objetos y el de fabricar y vender 60 objetos.

b) Halle el número de objetos que debe fabricar y vender para obtener el beneficio máximo, así como dicho beneficio máximo.

c) Haga un esbozo de la gráfica de la función $B(x)$.

(Cataluña. Junio 2007. Problema 5)

a) $B(20) = -200 + 1.000 - 800 = 0$

Así, al fabricar y vender 20 objetos no hay beneficio.

$B(60) = -1.800 + 3.000 - 800 = 400$

Por tanto, al fabricar y vender 60 objetos se obtienen 400 € de beneficios.

b) $B'(x) = -x + 50 = 0 \rightarrow x = 50$

$B''(x) = -1 < 0 \rightarrow$ En $x = 50$ se alcanza un máximo.

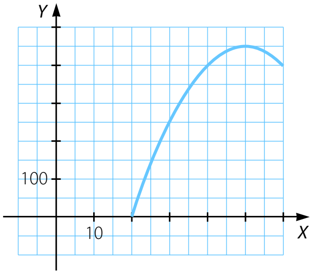
$B(50) = -1.250 + 2.500 - 800 = 450$

Así, para obtener el beneficio máximo, hay que fabricar y vender 50 objetos, siendo este beneficio de 450 €.

c) Representamos gráficamente la función en el intervalo (20, 60).

- En $(0, 50) \rightarrow B'(x) > 0 \rightarrow B(x)$ creciente
- En $(50, 60) \rightarrow B'(x) < 0 \rightarrow B(x)$ decreciente

Pasa por (20, 0) y por (60, 400) y el máximo es (50, 450).



085 Se ha comprobado que el número de pasajeros de la terminal internacional de cierto aeropuerto viene dado, como función de la hora del día, a través de la expresión: $N(t) = -5(\alpha - t)^2 + \beta, 0 \leq t \leq 24$

Sabiendo que el número máximo de pasajeros en dicha terminal se alcanza a las 12 horas, con un total de 1.200 personas, se pide:

a) Determinar α y β. Justificar la respuesta.

b) Representar la función obtenida.

(Extremadura. Junio 2006. Opción A. Problema 2)

a) Pasa por (12, 1.200) $\rightarrow N(12) = 1.200 \rightarrow -5(\alpha - 12)^2 + \beta = 1.200$

$N'(t) = 10(\alpha - t) \rightarrow N'(12) = 10(\alpha - 12) = 0 \rightarrow \alpha = 12$

Así, $\beta = 1.200$.

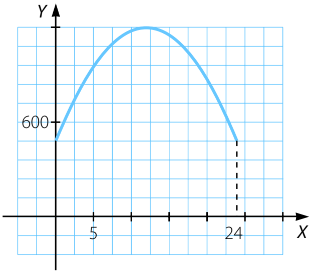
b) $N(t) = -5(12 - t)^2 + 1.200$

$N(0) = -720 + 1.200 = 480$

$N(24) = -720 + 1.200 = 480$

El máximo se alcanza en el punto (12, 1.200).

Es creciente en (0, 12) y decreciente en (12, 24).



086 Un estudio indica que, entre las 12.00 y las 19.00 horas de un día laborable típico, la velocidad, en km/h, del tráfico en cierta salida a la autopista viene dada por: $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 20$ si $0 \leq x \leq 7$

Representar gráficamente $f(x)$ estudiando: el punto de corte con el eje Y, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad y convexidad. Calcular las horas en que se presentan máximos, mínimos y puntos de inflexión para la velocidad del tráfico.

(Galicia. Junio 2007. Bloque 2. Ejercicio 2)

- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 20 \rightarrow (0, 20)$

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

Tal y como indica el enunciado, solo analizamos la función en el intervalo [0, 7].

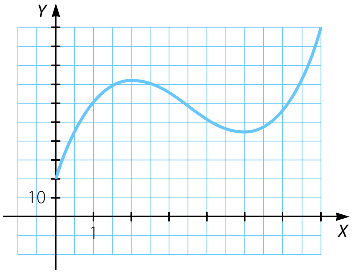
- En $(0, 2) \cup (5, 7) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $(2, 5) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$$f''(x) = 12x - 42 = 0 \rightarrow x = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$$

- En $\left(0, \frac{7}{2}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\frac{7}{2}, 7\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

A las 2 horas la velocidad es máxima y a las 5 horas la velocidad es mínima.

A las 3 horas y media la velocidad alcanza un punto de inflexión.



087 **Un dirigente de cierto partido político afirma que dimitirá si el porcentaje de votantes del partido no alcanza el 20 %. Se estima que el porcentaje de participación en la consulta será al menos el 40 % y que el porcentaje de votantes al partido dependerá del porcentaje de participación según esta función (*P* indica el porcentaje de votantes al partido y *x* el de participación):**

$$P(x) = -0{,}00025x^3 + 0{,}045x^2 - 2{,}4x + 50 \quad \text{si } 40 \leq x \leq 100$$

a) Indica cuándo crece el porcentaje de votantes al partido y cuándo decrece. Según la función, ¿es posible que el dirigente no tenga que dimitir?

b) Dibuja la gráfica de la función.

(Asturias. Septiembre 2005. Bloque 3)

a) $P'(x) = -0{,}00075x^2 + 0{,}09x - 2{,}4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = 80 \end{cases}$

$P''(x) = -0{,}00156x + 0{,}09$

$P''(40) = 0{,}0276 > 0 \rightarrow$ En $x = 40$ presenta un mínimo.

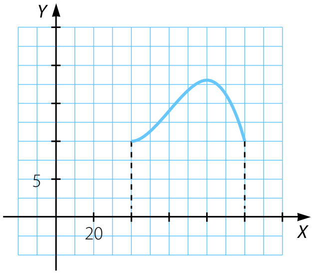
$P''(80) = -0{,}0348 < 0 \rightarrow$ En $x = 80$ presenta un máximo.

Así, en (40, 80) el porcentaje de votantes al partido crece y en (80, 100) decrece por lo que en $x = 100$ presenta otro mínimo.

El dirigente no tendrá que dimitir si el valor máximo que toma la función es mayor o igual que 20.

Como $P(80) = 18$ el dirigente sí tendrá que dimitir.

b) $P(40) = 10$ $\qquad P(100) = 10$



088 **Dibuja la gráfica de estas funciones racionales, analizando previamente sus características.**

a) $y = \dfrac{x-1}{x^2}$ b) $y = \dfrac{x-2}{x-3}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ d) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$y' = \dfrac{-x+2}{x^3} = 0 \rightarrow x = 2$

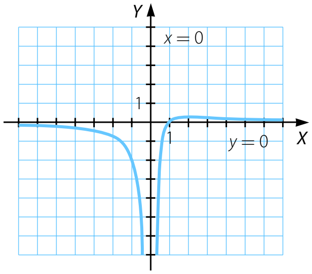
- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 2$ presenta un máximo.

$y'' = \dfrac{2x-6}{x^4} = 0 \rightarrow x = 3$

- En $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(3, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = 3$ presenta un punto de inflexión.



b) $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{3\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x-2}{x-3} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \dfrac{2}{3} \rightarrow \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-2}{x-3} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 3$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-2}{x-3} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

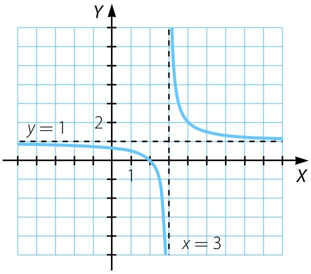
$y' = \dfrac{-1}{(x-3)^2} < 0 \rightarrow$ Función decreciente

No presenta máximos ni mínimos.

$y'' = \dfrac{2}{(x-3)^3} \neq 0$

No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, 3) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(3, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava



c) $x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow$ Dominio $= \mathbb{R} - \{-1\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{x+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x(x+1)} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow n = -1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = x - 1$

No tiene ramas parabólicas ya que tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

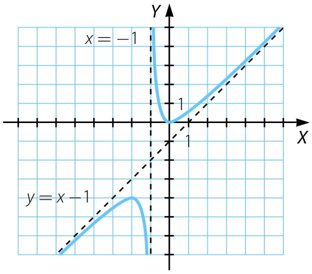
$y' = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(-2, -1) \cup (-1, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 0$, un mínimo.

$y'' = \dfrac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(-1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$y' = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

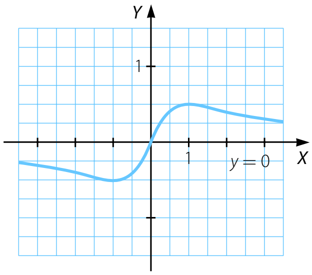
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 1$ presenta un máximo y en $x = -1$, un mínimo.

$$y'' = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow x(2x^2-6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.



089 **Representa la función: $f(x) = \dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$**

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene ya que $\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1} \neq 0$ en $\mathbb{R}$.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+x+3}{x^2+1} = 3 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 3$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

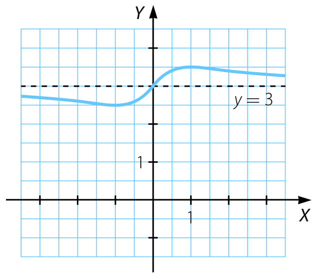
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = 1$ presenta un máximo y en $x = -1$, un mínimo.

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{3}$ presenta puntos de inflexión.



090 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

a) Calcula sus asíntotas y el dominio de definición de la función.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Representa gráficamente la función $f(x)$.

(Castilla y León. Septiembre 2006. Bloque A. Pregunta 2)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x}{x-2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 2$$

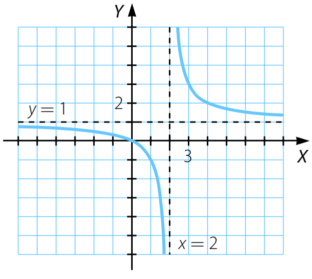
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-2} = 1 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 1$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

b) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente en $\mathbb{R} - \{2\}$

No presenta máximos ni mínimos.

c)



091 Considere la función real de variable real $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$.

a) Determine el dominio de la función y los intervalos en los que es creciente o decreciente.

b) Halle las asíntotas.

c) Dibuje un esbozo de la gráfica de la función.

(Cataluña. Año 2007. Serie 1. Problema 5)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$ y no tiene extremos relativos.

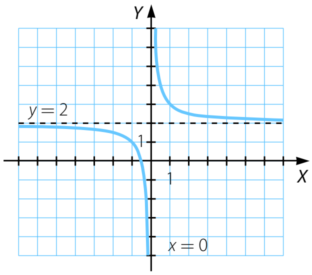
b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x+1}{x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{x} = 2 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 2$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) • Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x+1}{x} = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1}{2} \rightarrow \left(\dfrac{-1}{2}, 0\right)$

• Corte con el eje Y: no tiene.



092 Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{2(x+1)}$, determinar:

a) Los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas.

c) Hacer una representación gráfica aproximada de la curva.

(Murcia. Septiembre 2008. Bloque 2. Cuestión 2)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

• Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{2(x+1)} \neq 0 \rightarrow$ No tiene.

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \dfrac{1}{2} \rightarrow \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

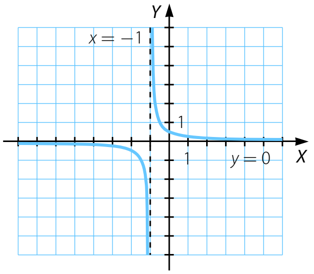
b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{2(x+1)} = 0 \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2(x+1)} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

c) $y' = \dfrac{-1}{2(x+1)^2} < 0 \rightarrow$ Función decreciente en $\mathbb{R} - \{-1\}$

No presenta máximos ni mínimos.



093 Dada la función $f(x) = \dfrac{4x^2 + x + 3}{3 + 4x^2}$:

a) **Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$, así como sus posibles máximos, mínimos y puntos de inflexión.**

b) **Representa la gráfica de la función $y = f(x)$, indicando con todo detalle cuál es su dominio y cuáles son sus asíntotas.**

(La Rioja. Junio 2007. Parte B. Problema 1)

a) $f'(x) = \dfrac{3 - 4x^2}{(3 + 4x^2)^2} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- En $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ presenta un mínimo y en $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, un máximo.

$$f''(x) = \frac{32x^3 - 72x}{(3 + 4x^2)^3} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \pm\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, \dfrac{-3}{2}\right) \cup \left(0, \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\dfrac{-3}{2}, 0\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = 0$ y $x = \pm\dfrac{3}{2}$ presenta puntos de inflexión.

b) Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene ya que $\dfrac{4x^2+x+3}{4x^2+3} \neq 0$ en $\mathbb{R}$.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 1 \to (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+x+3}{4x^2+3} = 1 \to \text{Asíntota horizontal: } y = 1$$

Posición de la curva respecto de la asíntota:

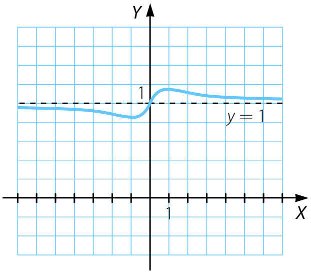
$$x \to +\infty \to \frac{4x^2+x+3}{3+4x^2} - 1 = \frac{x}{3+4x^2} > 0$$

$\to f(x)$ está por encima de la asíntota.

$$x \to -\infty \to \frac{4x^2+x+3}{3+4x^2} - 1 = \frac{x}{3+4x^2} < 0$$

$\to f(x)$ está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.



094 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.
e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

(C. Valenciana. Septiembre 2008. Ejercicio A. Problema 2)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \to \dfrac{x^3}{1-x^2} = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to f(0) = 0 \to (0, 0)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty \to$ Asíntota vertical: $x = 1$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

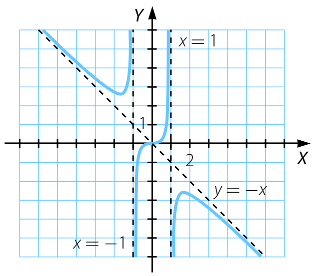
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(1-x^2)} = -1 \to m = -1 \\ \displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y = -x$$

c) $f'(x) = \dfrac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow x^2(3-x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

d) En $x = -\sqrt{3}$ presenta un mínimo y en $x = \sqrt{3}$, un máximo.

e)



095 Sea la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

a) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.

b) Represente gráficamente esta función.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 6. Opción B. Ejercicio 2)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x+1}{x+2} = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+1}{x+2} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x+2} = 1 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

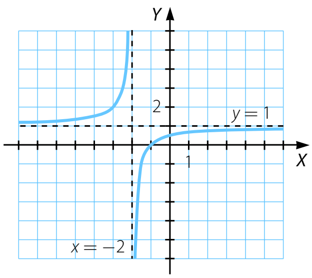
$f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

$f''(x) = \dfrac{-2}{(x+2)^3} \neq 0 \rightarrow$ No presenta puntos de inflexión.

- En $(-\infty, -2) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava
- En $(-2, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

b)



096 El grado de estrés (puntuado de 0 a 10) durante las 8 horas de trabajo de cierto agente de Bolsa viene dado a través de la función:

$$f(t) = \frac{-2t(t-10)}{5},\ 0 \le t \le 8$$

a) ¿En qué instante de su jornada de trabajo el grado de estrés es máximo? Justificar la respuesta.

b) Representar la función anterior.

(Extremadura. Septiembre 2004. Opción A. Problema 2)

a) $f(t) = \dfrac{-2}{5}(t^2 - 10t)$

$f'(t) = \dfrac{-2}{5}(2t - 10) = 0 \rightarrow t = 5$

$f''(t) = \dfrac{-4}{5} < 0 \rightarrow$ En $t = 5$ se alcanza un máximo.

El grado de estrés es máximo a las 5 horas.

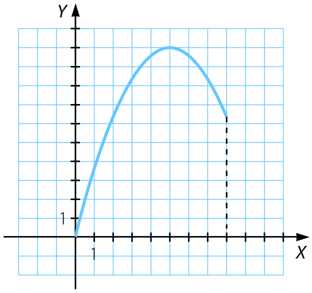
b) • Cortes con el eje X: $f(t) = 0 \rightarrow \dfrac{-2t(t-10)}{5} = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases}$

Para $t = 10$ la función no está definida.

• Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 0)$

Se trata de una función polinómica definida en el intervalo [0, 8], creciente en (0, 5) y decreciente en (5, 8).

$f(0) = 0 \qquad f(8) = \dfrac{32}{5}$



097 **Dibuja la gráfica de estas funciones con radicales, analizando previamente sus características.**

a) $y = \sqrt{2 - x}$ b) $y = 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{25}x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ d) $y = -\sqrt{x + 3}$

a) $2 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow$ Dominio $= (-\infty, 2]$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{2 - x} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{2} \rightarrow \left(0, \sqrt{2}\right)$

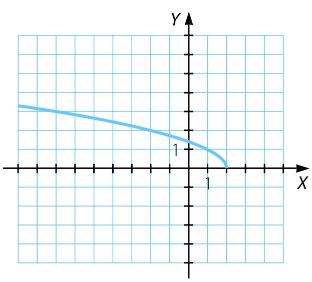
No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2 - x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2 - x}}{x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

$y' = \frac{-1}{2\sqrt{2 - x}} < 0 \rightarrow$ Función decreciente

$y'' = \frac{-1}{2(2 - x)\sqrt{2 - x}} < 0 \rightarrow$ Función convexa



b) $1 - \frac{x^2}{25} \geq 0 \rightarrow x \in [-5, 5] \rightarrow$ Dominio $= [-5, 5]$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} = 0 \rightarrow 25 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$

No tiene asíntotas.

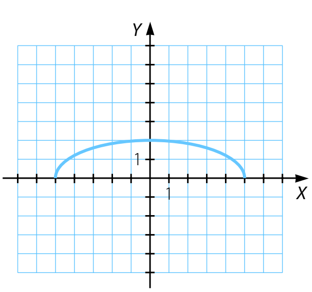
$y' = \frac{-4x}{10\sqrt{25 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-5, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0, 5) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$y'' = \frac{-100}{10(25 - x^2)\sqrt{25 - x^2}} < 0$

$\rightarrow$ Función convexa



c) $x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \rightarrow$ Dominio $= (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{x^2 - 9} = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow (-3, 0), (3, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque $f(x)$ no está definida para $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 9} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 9} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-9} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2-9} + x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\}$$
$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = x$

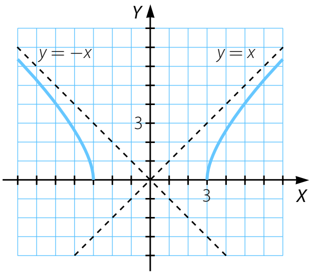
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x} = 1 \rightarrow m = -1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-9} + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2-9} - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\}$$
$\rightarrow$ Asíntota oblicua: $y = -x$

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, -3) \rightarrow y' < 0$
  $\rightarrow$ Función decreciente
- En $(3, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

$$y'' = \frac{-9}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}} < 0$$
$\rightarrow$ Función convexa

No presenta puntos de inflexión.



d) $x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow$ Dominio $= [-3, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $-\sqrt{x+3} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -\sqrt{3} \rightarrow \left(0, -\sqrt{3}\right)$

No tiene asíntotas verticales.

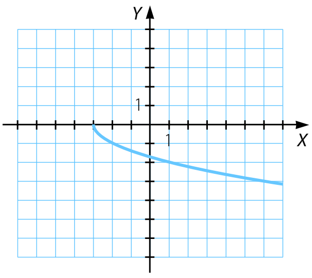
$$\lim_{x \to +\infty} -\sqrt{x+3} = -\infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{x+3}}{x} = 0$$
$\rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{x+3}} < 0 \rightarrow \text{Función decreciente}$$

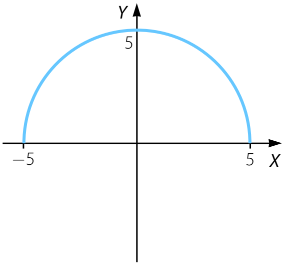
$$y'' = \frac{1}{4(x+3)\sqrt{x+3}} > 0$$
$\rightarrow$ Función cóncava

No presenta puntos de inflexión.

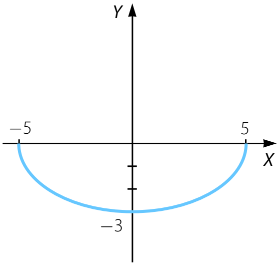


098 Escribe la función a la que corresponde cada una de las siguientes gráficas:

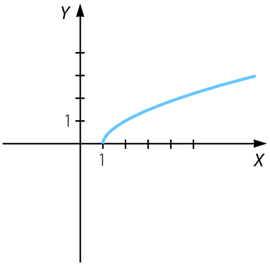
GRÁFICA 1



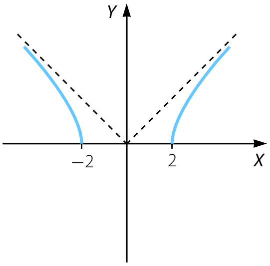
GRÁFICA 2



GRÁFICA 3



GRÁFICA 4



Gráfica 1: $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

Gráfica 2: $g(x) = -3\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$

Gráfica 3: $h(x) = \sqrt{x - 1}$

Gráfica 4: $i(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

099 **Dibuja la gráfica de estas funciones, analizando previamente sus características.**

a) $y = xe^x$

b) $y = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2}$

c) $y = 3x^2e^{-x}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{e^{x^2}}$

e) $y = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$

f) $y = e^{1-x^2}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $xe^x = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty \to$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0 \to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

$y' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$y' = 0 \to x = -1$

- En $(-\infty, -1) \to y' < 0 \to$ Función decreciente
- En $(-1, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente

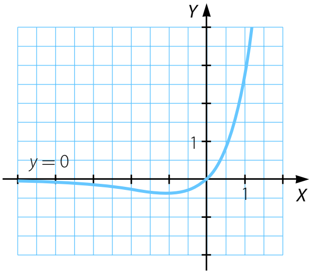
En $x = -1$ presenta un mínimo.

$y'' = e^x(1 + x) + e^x$

$y'' = 0 \to 1 + x + 1 = 0$
$\to x = -2$

- En $(-\infty, -2) \to y'' < 0 \to$ Función convexa
- En $(-2, +\infty) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

En $x = -2$ presenta un punto de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene ya que $\dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = 0 \to \dfrac{1}{e^x} + e^x \neq 0$.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = \dfrac{1 + 1}{2} = 1 \to (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + e^x}{2x} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = +\infty$$

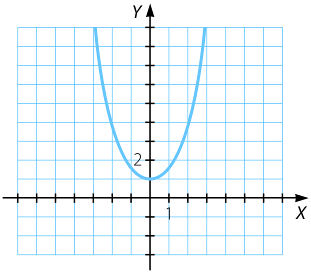
$$y' = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = 0 \rightarrow e^{x} = e^{-x} \rightarrow x = -x \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0$
  $\rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} > 0 \rightarrow \text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



c) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $3x^2e^{-x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{e^{x}} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} 3x^2e^{-x} = +\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3xe^{-x} = -\infty \rightarrow \text{No tiene asíntota oblicua.}$$

Tiene una rama parabólica: $\lim_{x \to -\infty} 3x^2e^{-x} = +\infty$

$$y' = e^{-x}(6x - 3x^2) = 0 \rightarrow x(6 - 3x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

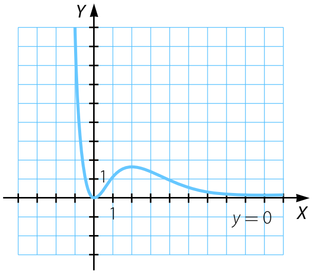
- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo y en $x = 2$, un máximo.

$$y'' = e^{-x}(3x^2 - 12x + 6) = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, 2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(2 + \sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = 2 \pm \sqrt{2}$ presenta dos puntos de inflexión.



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $\dfrac{x^2 - 1}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (-1, 0), (1, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{h \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = \frac{2x - (x^2 - 1)2x}{e^{x^2}} = \frac{4x - 2x^3}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x(4 - 2x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

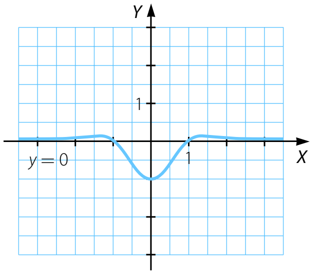
- En $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \pm\sqrt{2}$ presenta dos máximos y en $x = 0$ un mínimo.

$$y'' = \frac{4x^4 - 14x^2 + 4}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 0,56 \\ x = 3,17 \end{cases}$$

- En $(-\infty; -3,17) \cup (-0,56; 0,56) \cup (3,17; +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-3,17; -0,56) \cup (0,56; 3,17) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = -0,56$; $x = 0,56$ y $x = 3,17$ presenta puntos de inflexión.



e) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+1)^2}{xe^x} = -\infty \rightarrow$ No tiene asíntota oblicua.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty$

$$y' = \frac{2x + 2 - (x + 1)^2}{e^x} = \frac{-x^2 + 1}{e^x} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

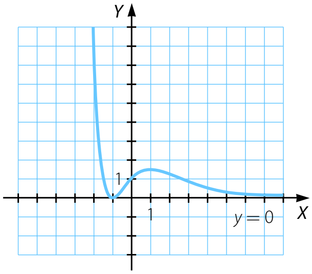
- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(-1, 1) \rightarrow y' > 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = -1$ presenta un mínimo y en $x = 1$ un máximo.

$$y'' = \frac{-2x + x^2 - 1}{e^x} = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

- En $\left(-\infty, 1 - \sqrt{2}\right) \cup \left(1 + \sqrt{2}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

En $x = 1 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.



f) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = e \rightarrow (0, e)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to \infty} e^{1-x^2} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = (-2x)e^{1-x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

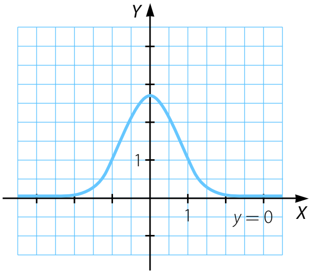
- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$$y'' = -2e^{1-x^2} - 2x(-2x)e^{1-x^2} = 0 \rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0$
  $\rightarrow$ Función cóncava
- En $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow y'' < 0$
  $\rightarrow$ Función convexa

En $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ presenta puntos de inflexión.



100 **Sea la función $f(x) = 2x^2e^x$. Calcula sus asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión. Represéntala gráficamente.**

Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $2x^2e^x = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2e^x = +\infty \to$ No tiene asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^2e^x = 0 \to$ Asíntota horizontal: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2xe^x = +\infty \to$ No tiene asíntota oblicua.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2e^x = +\infty$

$f'(x) = 2e^x(2x + x^2) = 0 \to 2x(2 + x) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

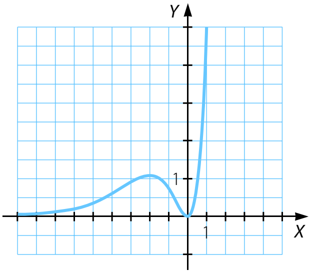
- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \to f'(x) > 0 \to f(x)$ creciente
- En $(-2, 0) \to f'(x) < 0 \to f(x)$ decreciente

En $x = -2$ presenta un máximo y en $x = 0$, un mínimo.

$f''(x) = 2e^x(x^2 + 4x + 2) = 0 \to x = -2 \pm \sqrt{2}$

- En $\left(-\infty, -2 - \sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + \sqrt{2}, +\infty\right) \to f''(x) > 0 \to f(x)$ cóncava
- En $\left(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}\right) \to f''(x) < 0 \to f(x)$ convexa

En $x = -2 \pm \sqrt{2}$ presenta puntos de inflexión.



101 **Dibuja la gráfica de estas funciones, analizando previamente sus características.**

a) $y = x \ln x$ b) $y = \log_2 (x^2 + 1)$ c) $y = \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ d) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

a) Dominio $= (0, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $x \ln x = 0 \to x = 0$, como no está en el dominio, no tiene cortes con este eje.
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \to$ No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \ln x = +\infty \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica: $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$

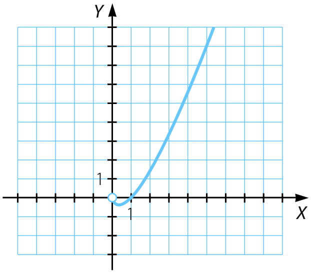
$y' = 1 + \ln x = 0 \to \ln x = -1 \to x = e^{-1} \to x = \dfrac{1}{e}$

- En $\left(0, \dfrac{1}{e}\right) \to y' < 0 \to$ Función decreciente
- En $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right) \to y' > 0 \to$ Función creciente

En $x = \dfrac{1}{e}$ presenta un mínimo.

$y'' = \dfrac{1}{x} > 0 \to$ Función cóncava

No presenta dos puntos de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $\log_2 (x^2 + 1) = 0 \to x^2 + 1 = 1 \to x^2 = 0 \to x = 0 \to (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = \log_2 1 = 0 \to (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2(x^2 + 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \log_2(x^2 + 1) = +\infty \end{array}\right\} \to$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log_2 (x^2 + 1)}{x} = 0 \to$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene ramas parabólicas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 (x^2 + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \log_2 (x^2 + 1) = +\infty$

$y' = \dfrac{2x}{\ln 2(x^2 + 1)} = 0 \to x = 0$

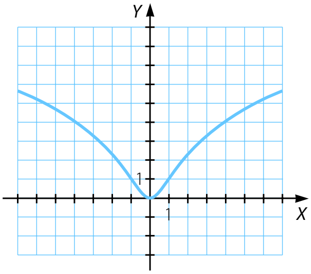
- En $(-\infty, 0) \to y' < 0 \to$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$y'' = \dfrac{2 - 2x^2}{\ln 2(x^2 + 1)^2} = 0 \to x = \pm 1$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to y'' < 0$
  $\to$ Función convexa
- En $(-1, 1) \to y'' > 0 \to$ Función cóncava

En $x = \pm 1$ presenta dos puntos de inflexión.



c) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje *X*:

$$\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}=0\rightarrow\frac{e^x+e^{-x}}{2}=e^0=1\rightarrow e^x+e^{-x}=2$$
$$\rightarrow e^{2x}-2e^x+1=0\rightarrow e^x=1\rightarrow x=\ln 1=0\rightarrow(0,\,0)$$

- Corte con el eje *Y*: $x=0\rightarrow y=\ln\frac{1+1}{2}=\ln 1=0\rightarrow(0,\,0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}=+\infty\end{array}\right\}\rightarrow\text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}\dfrac{\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{x}=1\rightarrow m=1\\ \lim\limits_{x\rightarrow+\infty}\left(\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}-x\right)=-0,69\rightarrow n=-0,69\end{array}\right\}\rightarrow\begin{array}{l}\text{Asíntota oblicua:}\\ y=x-0,69\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\dfrac{\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{x}=-1\rightarrow m=-1\\ \lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\left(\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}+x\right)=-0,69\rightarrow n=-0,69\end{array}\right\}\rightarrow\begin{array}{l}\text{Asíntota oblicua:}\\ y=-x-0,69\end{array}$$

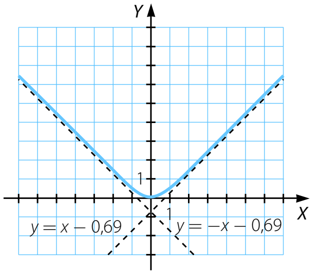
$$y'=\frac{2\left(\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\right)}{e^x+e^{-x}}=0\rightarrow e^x-\frac{1}{e^x}=0\rightarrow e^{2x}=1\rightarrow e^x=1\rightarrow x=\ln 1=0$$

- En $(-\infty,\,0)\rightarrow y'<0\rightarrow$ Función decreciente
- En $(0,\,+\infty)\rightarrow y'>0\rightarrow$ Función creciente

En $x=0$ presenta un mínimo.

$$y''=\frac{4e^{-x}e^x}{e^{-2x}+2e^{-x}e^x+e^{2x}}>0\rightarrow\text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



d) Dominio $= (0, +\infty) - \{1\}$

- Cortes con el eje X: $\dfrac{x}{\ln x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{\ln x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x \ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

Tiene una rama parabólica:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$

$y' = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$

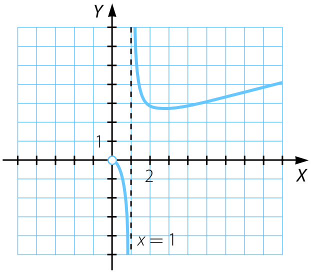
- En $(0, 1) \cup (1, e) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(e, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = e$ presenta un mínimo.

$y'' = \dfrac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$

- En $(0, 1) \cup (e^2, +\infty) \rightarrow y'' < 0$ $\rightarrow$ Función convexa
- En $(1, e^2) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = e^2$ presenta un punto de inflexión.



102 **Sea $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x^2}$ con $x \in (0, +\infty)$. Se pide:**

Calcula las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. Esboza su gráfica.

Dom $f = (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = -\infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = 1 \rightarrow$ Asíntotas horizontales: $y = 1$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 1 = 2\ln x \rightarrow x = \sqrt{e}$$

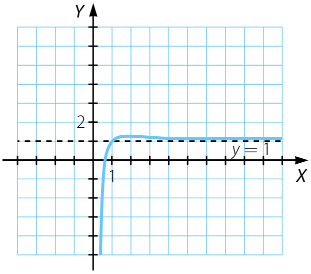
- En $\left(0, \sqrt{e}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(\sqrt{e}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = \sqrt{e}$ presenta un máximo.

$$f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4} = 0 \rightarrow x = \sqrt[6]{e^5}$$

- En $\left(0, \sqrt[6]{e^5}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $\left(\sqrt[6]{e^5}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = \sqrt[6]{e^5}$ presenta un punto de inflexión.



103 **Estudia las características de esta función definida a trozos y dibuja su gráfica.**

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

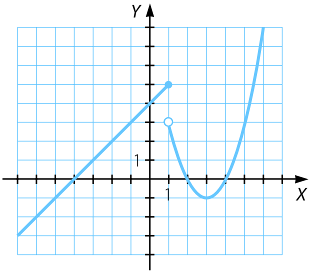
Dom $f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 6x + 8) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 4) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinuidad de salto finito en } x = 1$$

- En $(-\infty, 1] \rightarrow$ Recta que pasa por $(-4, 0)$ y $(1, 5)$.
- En $(1, +\infty) \rightarrow$ Parábola de vértice $(3, -1)$.

Cortes con eje X: $x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

En $x = 1 \rightarrow f(1) = 3$



104 Considere la función: $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Dibuje la gráfica.

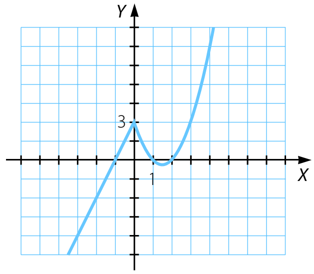
(Cataluña. Año 2006. Serie 3. Cuestión 4)

Dom $f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 3x + 2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (2x + 2) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ continua en } x = 0$$

- En $(-\infty, 0] \rightarrow$ Recta que pasa por (0, 2) y por (−1, 0).
- En $(0, +\infty) \rightarrow$ Parábola de vértice $\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$.

Cortes con eje X: $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$



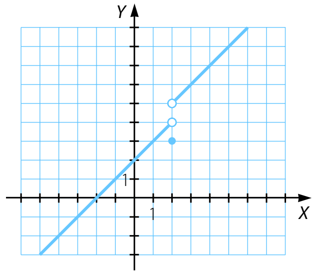
105 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 2 \\ x+3 & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ representarla gráficamente.

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 2. Cuestión 2)

Dom $f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x + 3) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 2) = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinuidad inevitable de salto finito en } x = 2$$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow$ Recta que pasa por (0, 2) y por (−2, 0).
- En $(2, +\infty) \rightarrow$ Recta que pasa por (3, 6) y por (4, 7).



106 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ representarla gráficamente.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2004. Bloque 3. Ejercicio A)

Dom $f = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 3x + 2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 2 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 4x + 5) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

- En $(-\infty, 0] \rightarrow$ Parábola de vértice $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$.

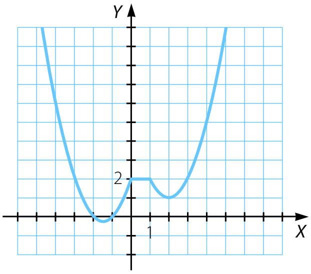
  Cortes con eje X: $x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$

  $f(0) = 2$

- En $(0, 1] \rightarrow$ Función constante igual a 2.
- En $(1, +\infty) \rightarrow$ Parábola de vértice $(2, 1)$.

  Cortes con eje X: no tiene.

  $f(1) = 2$



107 Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$, en miles de euros, varió con el tiempo t, en años, que llevaba en el mercado, según la siguiente función:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -\dfrac{5}{2}t + 25 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

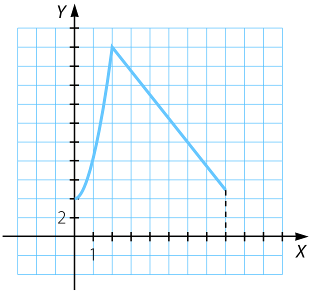
Representar gráficamente la función.

(País Vasco. Junio 2008. Apartado B. Ejercicio 1)

Dom $P = [0, 8]$

$$\left.\begin{array}{l} P(2) = 20 \\ \lim\limits_{t \to 2^-} (4t^2 + 4) = 20 \\ \lim\limits_{t \to 2^+} \left(\dfrac{-5}{2}t + 25\right) = 20 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Continua en } t = 2$$

- En $[0, 2] \rightarrow$ Parábola de vértice $(0, 4)$ que pasa por $(2, 20)$, no corta al eje X.
- En $(2, 8] \rightarrow$ Recta que une los puntos $(2, 20)$ y $(8, 5)$.



108 Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{25-x^2} & \text{si } -5\le x<4\\ x^2-2x-5 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$$

- En $(-\infty, -5)$ la función no está definida.

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=16-8-5=3\\ \lim\limits_{x\to 4^+}(x^2-2x-5)=16-8-5=3\\ \lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-16}=3\end{array}\right\}\rightarrow f(x) \text{ continua en } x=4$$

- En $[-5, 4) \rightarrow f(x)=\sqrt{25-x^2}$:

$x=-5 \rightarrow y=0 \rightarrow (-5, 0)$

$x=4 \rightarrow y=3 \rightarrow (4, 3)$

No tiene asíntotas en el intervalo en el que está definida.

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}=0 \rightarrow x=0$$

En $[-5, 0) \rightarrow y'>0 \rightarrow$ Función creciente

En $(0, 4) \rightarrow y'<0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x=0$ presenta un máximo.

$$y''=\frac{-25}{\sqrt{25-x^2}}<0 \rightarrow \text{Función convexa}$$

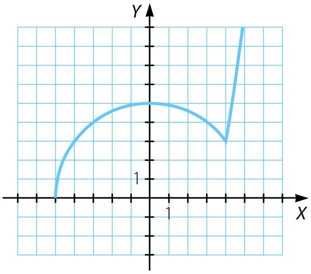
- En $[4, +\infty) \rightarrow f(x)=x^2-2x-5$

Parábola de vértice $(1, -6)$.

No tiene cortes con los ejes en el intervalo en el que está definida.

$x=4 \rightarrow y=3 \rightarrow (4, 3)$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x-5)=+\infty$$



109 El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, en los próximos ocho años viene dado por la función B definida por:

$$B(t)=\begin{cases}-t^2+7t & \text{si } 0\le t<5\\ 10 & \text{si } 5\le t\le 8\end{cases}$$

donde t indica el tiempo transcurrido en años.

a) Represente gráficamente la función B y explique cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años.

b) Calcule cuándo el beneficio esperado es de 11,25 millones de euros.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 2)

a) $B(5) = 10$

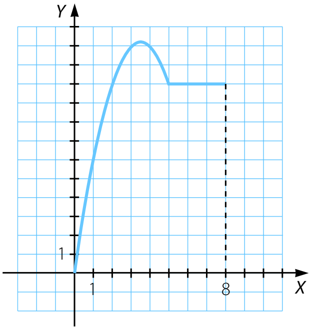
$\left.\begin{array}{l} B(5) = 10 \\ \lim\limits_{t \to 5^-} (-t^2 + 7t) = 10 \\ \lim\limits_{t \to 5^+} 10 = 10 \end{array}\right\} \to$ Continua en $t = 5$

- En [0, 5):

$B'(t) = -2t + 7 = 0 \to t = \dfrac{7}{2}$

$B''(t) = -2 < 0 \to$ En $t = \dfrac{7}{2}$ se alcanza un máximo, por lo que en $\left(0, \dfrac{7}{2}\right)$ es creciente y en $\left(\dfrac{7}{2}, 5\right)$ decreciente.

$B(0) = 0 \qquad B\left(\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{49}{4}$



- En [5, 8]: $B(t) = 10$

El beneficio esperado aumenta durante los tres primeros años y medio hasta alcanzar el valor de 12,25 millones de euros. Luego disminuye hasta el quinto año alcanzando los 10 millones de euros y a partir de ahí permanece constante hasta el octavo año.

b) $B(t) = 11{,}25 \to -t^2 + 7t = 11{,}25 \to t^2 - 7t + 11{,}25 = 0 \to \begin{cases} x = 2{,}5 \\ x = 4{,}5 \end{cases}$

El beneficio esperado es de 11,25 millones a los dos años y medio y a los cuatro años y medio.

110 **Cierto artículo se vende a un precio y otro según la cantidad comprada, de acuerdo con estos datos:**

A 10 €/kg si $0 \le x < 5$
A 9 €/kg si $5 \le x < 10$
A 7 €/kg si $10 \le x < 20$
A 5 €/kg si $20 \le x$

donde x es el peso en kg de la cantidad comprada.

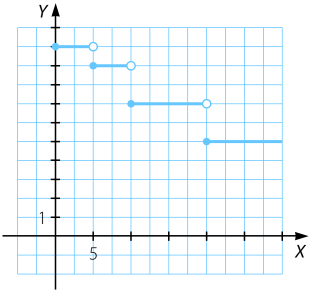
a) Escribir la función que representa el precio del artículo.

b) Hacer su representación gráfica.

(Murcia. Junio 2007. Bloque 2. Cuestión 2)

a) $P(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 9 & \text{si } 5 \le x < 10 \\ 7 & \text{si } 10 \le x < 20 \\ 5 & \text{si } 20 \le x \end{cases}$

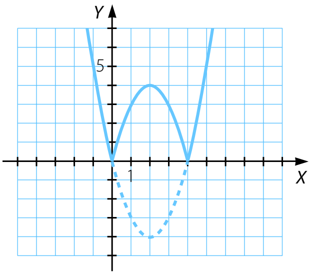
b)



111 Estudia y representa gráficamente la siguiente función: $g(x) = \left|-x^2 + 4x\right|$

La función $y = -x^2 + 4x$ tiene como gráfica una parábola de vértice (2, 4) que corta al eje Y en el punto (0, 0), y al eje X en los puntos (0, 0) y en (4, 0).

La función toma valores negativos en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ por lo que haciendo una simetría respecto del eje X se obtiene la gráfica pedida.



112 Dada la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \le -1 \\ |x-2| & \text{si } x > -1 \end{cases}$ dibuja su gráfica.

(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 3. Ejercicio A)

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} |x-2| = 3 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} -x^2 + 4 = 3 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ continua en } x = -1$$

- En $(-\infty, -1]$: $f'(x) = -2x > 0 \to f(x)$ creciente

  $$\lim_{x \to -\infty} -x^2 + 4 = -\infty$$

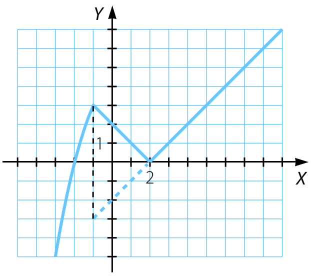
  $f(-1) = 3$ y corta al eje X en el punto $(-2, 0)$.

- En $(-1, +\infty)$: $y = x - 2$ es la recta que pasa por (3, 1) y por $(-1, -3)$.

  Corte con el eje X: $f(x) = 0 \to x = 2 \to (2, 0)$

  Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = -2 \to (0, -2)$

Por tratarse de una función con valor absoluto, en el intervalo $(-1, 2)$ hacemos una simetría de la recta respecto del eje X.



113 **Estudia las características de las siguientes funciones, y representa la gráfica de cada una de ellas con la información obtenida.**

a) $y = -x^4 + 6x^2 - 5$ c) $y = \sqrt{16 - x^2}$ e) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

b) $y = \dfrac{4x^2 + 1}{2x}$ d) $y = 8x^2 - x^4$ f) $y = \sqrt{x^3 - 4x}$

a) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow -x^4 + 6x^2 - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = -5 \rightarrow (0, -5)$

Como es una función polinómica, solo tiene ramas parabólicas.

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 6x^2 - 5) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 6x^2 - 5) = -\infty$

$f'(x) = -4x^3 + 12x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

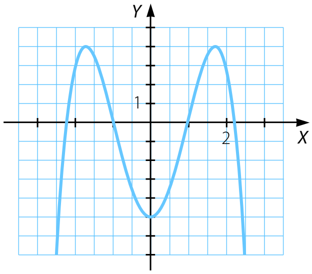
- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente

En $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$ presenta dos máximos y en $x = 0$, un mínimo.

$f''(x) = -12x^2 + 12 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-1, 1) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

En $x = -1$ y $x = 1$ presenta puntos de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{4x^2 + 1}{2x} = 0 \rightarrow 4x^2 + 1 \neq 0$
  $\rightarrow$ No tiene puntos de corte con este eje.
- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^2 + 1}{2x} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 + 1}{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 + 1}{2x} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+1}{2x^2}=2\to m=2\\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+1}{2x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x}=0\to n=0\end{array}\right\}\to \text{Asíntota oblicua: } y=2x$$

$$y'=\frac{8x^2-2}{4x^2}=\frac{4x^2-1}{2x^2}=0\to x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\to x=\pm\frac{1}{2}$$

- En $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\to y'>0\to$ Función creciente
- En $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\to y'<0\to$ Función decreciente

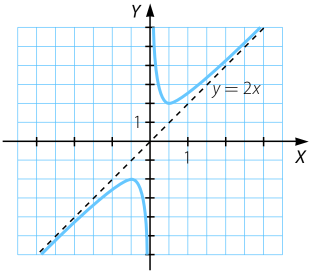
En $x=-\frac{1}{2}$ presenta un máximo

y en $x=\frac{1}{2}$, un mínimo.

$$y''=\frac{x}{x^4}=\frac{1}{x^3}$$

- En $(-\infty,0)\to y''<0\to$ Función convexa
- En $(0,+\infty)\to y''>0\to$ Función cóncava

No hay puntos de inflexión.



c) $16-x^2\geq 0\to(4-x)(4+x)\geq 0\to x\in[-4,4]\to$ Dominio $=[-4,4]$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{16-x^2}=0\to 16-x^2=0\to x=\pm 4$
- Corte con el eje Y: $x=0\to y=4\to(0,4)$

No tiene asíntotas.

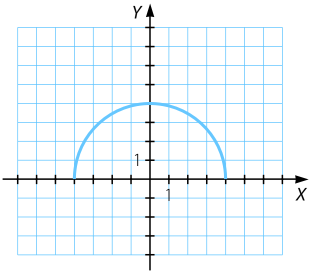
$$y'=\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}=0\to x=0$$

- En $(-4,0)\to y'>0\to$ Función creciente
- En $(0,4)\to y'<0\to$ Función decreciente

En $x=0$ presenta un máximo.

$$y''=\frac{-16}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}=\frac{16}{(x^2-16)\sqrt{16-x^2}}<0\to \text{Función convexa}$$

No presenta puntos de inflexión.



d) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $8x^2 - x^4 = 0 \rightarrow x^2(8 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{8} \end{cases}$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Solo tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

$$y' = 16x - 4x^3 = 0 \rightarrow x(16 - 4x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

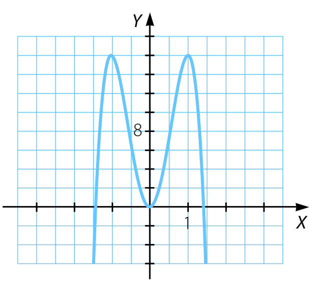
- En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -2$ y $x = 2$ presenta dos máximos y en $x = 0$, un mínimo.

$$y'' = 16 - 12x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{16}{12} = \frac{8}{6} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{6}}$$

- En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{8}{6}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{8}{6}}, +\infty\right) \rightarrow y'' < 0$
  $\rightarrow$ Función convexa
- En $\left(-\sqrt{\frac{8}{6}}, \sqrt{\frac{8}{6}}\right) \rightarrow y'' > 0$
  $\rightarrow$ Función cóncava

En $x = -\sqrt{\frac{8}{6}}$ y $x = \sqrt{\frac{8}{6}}$ presenta dos puntos de inflexión.



e) Dominio $= \mathbb{R} - \{2\}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{4} \rightarrow \left(0, \frac{1}{4}\right)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 2$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 0$$

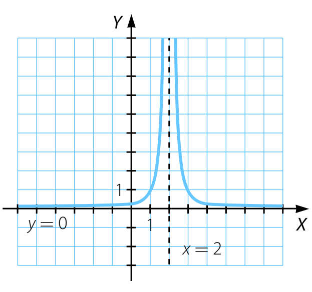
No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = \frac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(2, +\infty) \rightarrow y' < 0$
  $\rightarrow$ Función decreciente

$$y'' = \frac{6}{(x-3)^4} > 0 \rightarrow \text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



f) $x^3 - 4x \geq 0 \rightarrow x(x-2)(x+2) \geq 0 \rightarrow x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty)$

$\rightarrow$ Dominio $= [-2, 0] \cup [2, +\infty)$

- Cortes con el eje X: $\sqrt{x^3 - 4x} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm 2$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - 4x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - 4x}}{x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

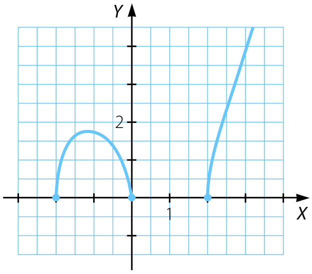
$$y' = \frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

- En $\left(-2, -\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(-\sqrt{\dfrac{4}{3}}, 0\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = -\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ presenta un máximo.

$$y'' = \frac{3x^4 - 24x^2 - 16}{4(x^3 - 4x)\sqrt{x^3 - 4x}} < 0 \rightarrow \text{Función convexa}$$

No presenta puntos de inflexión.



114 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3}{1 + x^2}$, se pide:

a) Dominio.

b) Puntos de corte con los ejes.

c) Puntos de discontinuidad, tipos de discontinuidad y asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

d) Asíntotas horizontales y oblicuas.

e) Intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos relativos.

f) Intervalos de concavidad y convexidad, y puntos de inflexión.

g) Representación gráfica, teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) • Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x^3}{1+x^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Corte con el eje *Y*: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) La función es continua en $\mathbb{R}$ y no tiene asíntotas verticales.

d) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{1+x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{1+x^2} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3}{x(1+x^2)} = 2 \rightarrow m = 2 \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^3}{1+x^2} - 2x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2x}{1+x^2} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = 2x$$

e) $f'(x) = \dfrac{2x^4 + 6x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \rightarrow x^2(2x^2 + 6) = 0 \rightarrow x = 0$

• En $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

No presenta máximos ni mínimos.

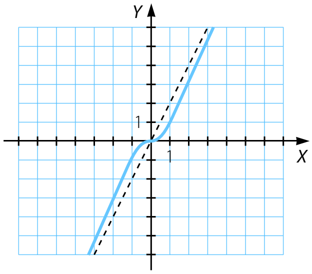
f) $f''(x) = \dfrac{-4x^3 + 12x}{(1+x^2)^3} = 0 \rightarrow x(-4x^2 + 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

• En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ cóncava

• En $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

En $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$ se alcanzan puntos de inflexión.

g)



115 En la construcción de un túnel, el porcentaje de roca fragmentada o de mala calidad viene dado por el siguiente modelo matemático:

$$R(x) = \frac{x^3}{3} - 4{,}5x^2 + 18x + 15 \qquad 0 \le x \le 7$$

R(*x*) representa dicho porcentaje cuando la distancia a la boca del túnel es *x*, en kilómetros.

Si en algún tramo de la perforación el porcentaje supera el 40 %, se deberán reforzar las medidas de sostenimiento y seguridad de la estructura. Dibuja la gráfica de la función. ¿Será necesario reforzar las medidas mencionadas?

(Asturias. Junio 2008. Bloque 3)

Se trata de una función polinómica definida en [0, 7].

$R(0) = 15 \qquad R(7) = 34{,}83$

$R'(x) = x^2 - 9x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 6 \end{cases}$

$R''(x) = 2x - 9$

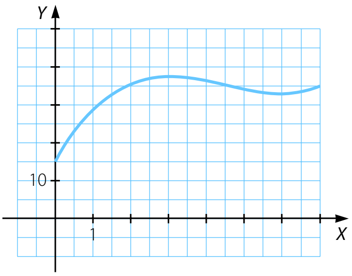
$R''(3) = -3 < 0 \rightarrow$ En $x = 3$ se alcanza un máximo.

$R''(6) = 3 > 0 \rightarrow$ En $x = 6$ se alcanza un mínimo.

- En $(0, 3) \cup (6, 7)$ la función es creciente.
- En $(3, 6)$ la función es decreciente.

$R(3) = 9 - 40{,}5 + 54 + 15 = 37{,}5$

Como no se supera el 40 % no será necesario reforzar las medidas mencionadas.



116 **Estudia y representa estas funciones.**

a) $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$ b) $y = e^{x^2 + 17x^4}$ c) $y = x + \dfrac{1}{x}$ d) $y = \ln(16 - x^2 - x^4)$

a) Dominio $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \dfrac{8}{-4} = -2 \rightarrow (0, -2)$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{8}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = 2$

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{8}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 0$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$y' = \dfrac{-16x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

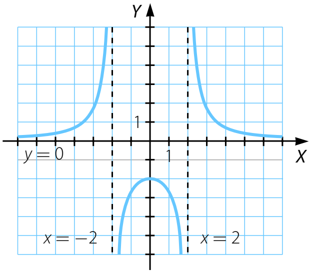
- En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $(0, 2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$y'' = \dfrac{48x^2 + 64}{(x^2 - 4)^3}$

- En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava
- En $(-2, 2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa

No presenta puntos de inflexión.



b) Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: no tiene.
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = e^0 = 1 \to (0, 1)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2+17x^4}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x^2+17x^4}}{x} = +\infty\end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas oblicuas.}$$

Tiene ramas parabólicas:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty$$

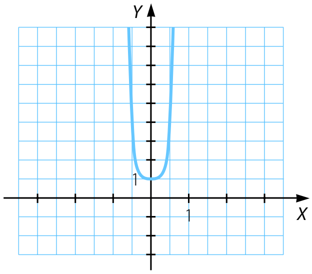
$$y' = (2x + 68x^3)e^{x^2+17x^4} = 0 \to 2x + 68x^3 = 0 \to x(2 + 68x^2) = 0 \to x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \to y' < 0 \to$ Función decreciente
- En $(0, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente

En $x = 0$ presenta un mínimo.

$$y'' = e^{x^2+17x^4}\left(2 + 204x^2 + (2x + 68x^3)^2\right) > 0 \to \text{Función cóncava}$$

No presenta puntos de inflexión.



c) Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$

- Cortes con el eje X:

$$f(x) = 0 \to x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x} \neq 0 \to \text{No tiene puntos de corte con este eje.}$$

- Corte con el eje Y: no tiene porque no está definida para $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \dfrac{1}{x}\right) = -\infty\end{array}\right\} \to \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1 \to m=1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x \to +\infty}\dfrac{1}{x}=0 \to n=0\end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y=x$$

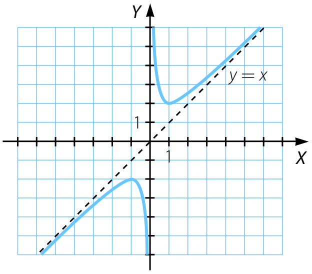
$$y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=0 \to x=\pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función creciente
- En $(-1, 0) \cup (0, 1) \to y' < 0$
  $\to$ Función decreciente

En $x = -1$ presenta un máximo y en $x = 1$, un mínimo.

$$y''=\frac{2}{x^3}$$

- En $(-\infty, 0) \to y' < 0 \to$ Función convexa
- En $(0, +\infty) \to y' > 0 \to$ Función cóncava



d) $16-x^2-x^4=0 \to \begin{cases} x^2=3,53 \\ x^2=-4,53\end{cases} \to x=\pm\sqrt{3,53}=\pm 1,88$

$16-x^2-x^4>0 \to x \in (-1,88; 1,88) \to$ Dominio $= (-1,88; 1,88)$

- Cortes con el eje X:

  $\ln(16-x^2-x^4)=0 \to 16-x^2-x^4=1 \to x^4+x^2-15=0$
  $\to \begin{cases} x^2=-4,41 \\ x^2=3,41\end{cases} \to x=\pm\sqrt{3,41} \to x=\pm 1,85$

- Corte con el eje Y: $x=0 \to y=\ln 106=2,77$

$\lim\limits_{x \to -1,88} \ln(16-x^2-x^4)=\infty \to$ Asíntota vertical: $x=-1,88$

$\lim\limits_{x \to 1,88} \ln(16-x^2-x^4)=\infty \to$ Asíntota vertical: $x=1,88$

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

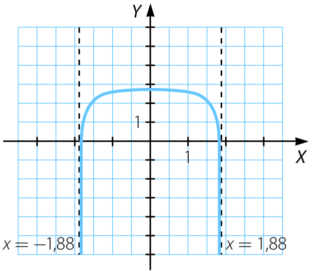
$$y'=\frac{-2x-4x^3}{16-x^2-x^4}=0 \to -2x-4x^3=0 \to x(-2-4x^2)=0 \to x=0$$

- En $(-1,88; 0) \to y' > 0 \to$ Función creciente
- En $(0; 1,88) \to y' < 0 \to$ Función decreciente

En $x = 0$ presenta un máximo.

$$y''=\frac{-4x^6-2x^4-194x^2-32}{(16-x^2-x^4)^2}<0$$
$\to$ Función convexa

No presenta puntos de inflexión.



117 En una región, un río tiene la forma de la curva $y = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ y es cortada por un camino según el eje X. Hacer un esquema de la posición del río y del camino, calculando para la curva el corte con los ejes coordenados, extremos relativos e intervalos de crecimiento.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 2. Cuestión 1)

Dominio $= \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $\frac{x^3}{4} - x^2 + x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$
- Cortes con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Es una función polinómica por lo que solo tiene ramas parabólicas.

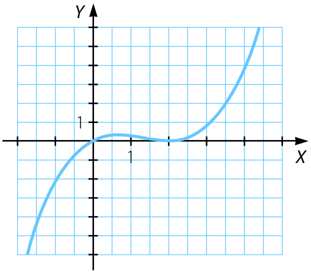
$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{4} - x^2 + x \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{4} - x^2 + x \right) = +\infty$$

$$y' = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente
- En $\left(\frac{2}{3}, 2\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente

En $x = \frac{2}{3}$ se alcanza un máximo y en $x = 2$, un mínimo.



118 Dada la función $f(x) = \frac{x - 7}{2x + 1}$, determina el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, así como los máximos, mínimos y puntos de inflexión. Con la información obtenida, esboza su gráfica.

Dom $f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x - 7}{2x + 1} = 0 \rightarrow x = 7 \rightarrow (7, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = -7 \rightarrow (0, -7)$

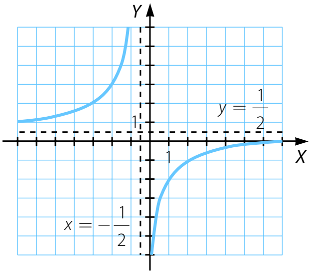
$$\lim_{x \to \frac{-1}{2}} \frac{x-7}{2x+1} = \infty \to \text{Asíntota vertical: } x = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-7}{2x+1} = \frac{1}{2} \to \text{Asíntota horizontal: } y = \frac{1}{2}$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas ya que tiene asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

$$f'(x) = \frac{15}{(2x+1)^2} > 0 \to f(x) \text{ creciente}$$

No presenta máximos ni mínimos.



119 **Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$.**

a) Halla su dominio y sus asíntotas.

b) Determina la monotonía y la curvatura, así como los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

c) Representa gráficamente la función.

a) Dom $f = \mathbb{R}$

- Cortes con el eje X: $\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = 0 \to x^3 + 2x = 0 \to x(x^2 + 2) = 0 \to x = 0$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \to y = 0 \to (0, 0)$

No tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{No hay asíntotas horizontales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x}{x(x^2 + 1)} = 1 \neq 0 \to m = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x - x^3 - x}{x^2 + 1} = \\ \displaystyle\qquad = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \to n = 0 \end{array}\right\}$$

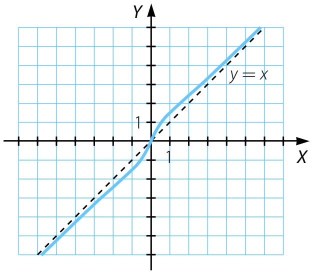
$$\to \text{Asíntota oblicua: } y = mx + n \to y = x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2+1)^2} > 0 \to f(x)$ es creciente y no tiene extremos relativos.

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \to x^2(2x-6) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$f'''(x) = \frac{-6x^4 + 36x^2 - 6}{(x^2+1)^4}$$

Como $f'''(0) \neq 0$ y $f'''\left(\pm\sqrt{3}\right) \neq 0$, en estos puntos se alcanzan puntos de inflexión.

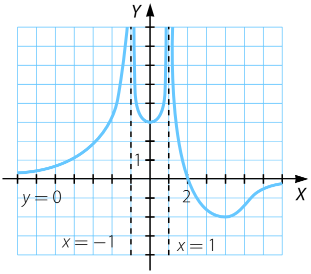


120 La función $y = f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

- Su dominio es la recta real salvo los puntos -1 y 1.
- Es continua en todo su dominio y corta al eje X en el punto $(2, 0)$.
- Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, con $f(x) < 0$ si $x > 2$ y $f(x) > 0$ si $x < 2, x \neq 1, x \neq -1$.
- Tiene una asíntota vertical en $x = 1$, con $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.
- Tiene una asíntota vertical en $x = -1$, con $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.
- Tiene un mínimo en $(4, -2)$ y en $(0, 3)$. No tiene máximos.

Representa gráficamente dicha función.

(C. Valenciana. Junio 2007. Ejercicio B. Problema 3)



PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 Se considera la función $f(x) = (x^2 + a) \cdot e^{ax}$ siendo a un parámetro real.

a) Razone a qué es igual el dominio de $f(x)$.

b) Determine el valor de a para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(0, -4)$.

c) Para $a = -2$, determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$. ¿Existen máximos y mínimos relativos de $f(x)$? En caso afirmativo, decir dónde alcanzan y su valor.

(Aragón. Junio 2006. Opción B. Cuestión 2)

a) Dom $f = \mathbb{R}$ ya que se trata del producto de una función polinómica y una exponencial.

b) $f(0) = -4 \rightarrow ae^0 = a = -4$

c) $f(x) = (x^2 - 2)e^{-2x}$

$$f'(x) = 2xe^{-2x} + (x^2 - 2)(-2)e^{-2x} = 0 \rightarrow 2x - 2x^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente
- En $(-1, 2) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente

En $x = -1$ se alcanza un mínimo cuyo valor es $f(-1) = -e^2$ y en $x = 2$ se alcanza un máximo cuyo valor es $f(2) = 2e^{-4}$.

2 Estudia y representa la función: $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

(Navarra. Junio 2007. Ejercicio 2. Opción A)

Dominio $= \mathbb{R} - \{2\}$

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = 2$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = 1 \rightarrow \text{Asíntota horizontal: } y = 1$$

No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas.

$$y' = \frac{-4x}{(x-2)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

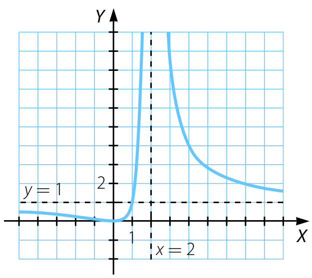
- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Función decreciente
- En $(0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Función creciente

En $x = 0$ se alcanza un mínimo.

$$y'' = \frac{8x+8}{(x-3)^4} = 0 \rightarrow x = -1$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Función convexa
- En $(0, 2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Función cóncava

En $x = -1$ se alcanza un punto de inflexión.



3 **La función $f(t) = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$ representa la concentración de oxígeno en un estanque contaminado por residuos orgánicos en un tiempo t (medido en semanas).**

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(t)$ para $t \geq 0$ así como los instantes donde la concentración de oxígeno es máxima y mínima.

b) De forma razonada, y conforme a los datos anteriores, representa gráficamente la función para $t \geq 0$, estudiando con todo detalle sus asíntotas.

(La Rioja. Junio 2008. Parte C. Problema 1)

a) Estudiamos la función para $t \geq 0$.

$$y' = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \text{ (no válida)} \end{cases}$$

- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(t) > 0 \rightarrow f(t)$ creciente
- En $(0, 1) \rightarrow f'(t) < 0 \rightarrow f(t)$ decreciente

En $t = 1$ se alcanza un mínimo.

La concentración de oxígeno es máxima cuando $t = 0$ y vale 1, y es mínima si $t = 1$ y vale $\dfrac{1}{2}$.

b) Asíntotas verticales: no tiene.

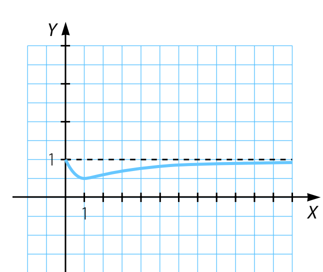
$$\lim_{x \to \infty} \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} = 1$$

$\rightarrow$ Asíntota horizontal: $y = 1$

Posición de la curva respecto de la asíntota:

$$t \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} - 1 = \frac{-t}{t^2 + 1} < 0$$

$\rightarrow f(t)$ está por debajo de la asíntota.



No tiene asíntotas oblicuas ni ramas parabólicas cuando $x \rightarrow +\infty$.

4 Una función $f(t)$, $0 \leq t \leq 10$, en la que el tiempo t está expresado en años, representa los beneficios de una empresa (en cientos de miles de euros) entre los años 1990 ($t = 0$) y 2000 ($t = 10$):

$$f(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ t^2 - 8t + 15 & \text{si } 2 \leq t < 6 \\ \dfrac{3}{4}(-t + 10) & \text{si } 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente $f(t)$, estudiando: puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) ¿En qué años tiene la empresa el máximo beneficio? ¿Cuál es dicho beneficio? ¿Durante cuánto tiempo hubo pérdidas?

(Galicia. Septiembre 2005. Bloque 2. Ejercicio 2)

a) Dom $f = [0, 10]$

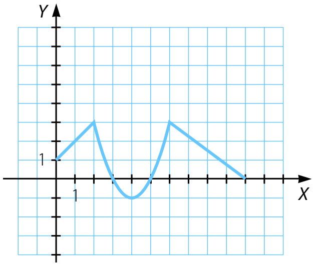
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 2^-} t + 1 = 3 \\ \lim\limits_{\to 2^+} t^2 - 8t + 15 = 3 \\ f(2) = 3 \end{array}\right\} \to \text{Continua en } t = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(6) = 3 \\ \lim\limits_{t \to 6^-} t^2 - 8t + 15 = 36 - 48 + 15 = 3 \\ \lim\limits_{t \to 6^+} \dfrac{3}{4}(-t + 10) = \dfrac{3}{4}(-6 + 10) = 3 \end{array}\right\} \to \text{Continua en } t = 6$$

Así, $f(t)$ es continua en [0, 10].

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 2 \\ 2t - 8 & \text{si } 2 < t < 6 \\ \dfrac{-3}{4} & \text{si } 6 < t < 10 \end{cases}$$

- En $(0, 2) \to f'(t) > 0 \to f(t)$ creciente
  En (0, 1) presenta un mínimo y en (2, 3), un máximo.
- En (2, 6): $f'(t) = 0 \to t = 4$
  En $(2, 4) \to f'(t) < 0 \to f(t)$ decreciente
  En $(4, 6) \to f'(t) > 0 \to f(t)$ creciente
  En los puntos (2, 3) y (6, 3) presenta dos máximos y en (4, −1), un mínimo.
  Cortes con el eje X:
  $t^2 - 8t + 15 = 0 \to \begin{cases} t = 3 \\ t = 5 \end{cases}$
- En $(6, 10) \to f'(t) = \dfrac{-3}{4} < 0$
  $\to f(t)$ decreciente
  En el punto (6, 3) presenta un máximo y en (10, 0), un mínimo.



b) El máximo beneficio se obtiene para $t = 2$ y $t = 6$, es decir en 1992 y 1996 y vale 3.000 €.
Hubo pérdidas entre el año 1993 y el año 1995.

5 El rendimiento (expresado en porcentaje) de cierto motor durante 60 minutos de funcionamiento sigue la función:

$$f(t) = \begin{cases} At^2 + Bt + C & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ 100 & \text{si } 20 < t \leq 60 \end{cases}$$

Sabiendo que inicialmente el rendimiento es del 0%, que a los 10 minutos de funcionamiento es de un 75% y que el 100% de rendimiento se alcanza a los 20 minutos de funcionamiento:

a) Determinar las constantes A, B y C. Justificar la respuesta.

b) Representar la función.

(Extremadura. Septiembre 2008. Opción B. Problema 2)

a) $f(0) = 0 \rightarrow C = 0$

$f(10) = 75 \rightarrow 100A + 10B + C = 75 \rightarrow 100A + 10B = 75$

$f(20) = 400A + 20B = 100$

$$\left.\begin{array}{l} 100A + 10B = 75 \\ 400A + 20B = 100 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-1}{4} \\ B = 10 \end{cases}$$

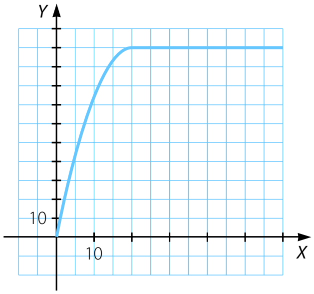
b) $f(t) = \begin{cases} \dfrac{-1}{4}t^2 + 10t & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ 100 & \text{si } 20 < t \leq 60 \end{cases}$

- En [0, 20]:

  $f'(t) = \dfrac{-1}{2}t + 10 \geq 0 \rightarrow f(t)$ creciente

  $f(0) = 0 \qquad f(10) = 75 \qquad f(20) = 100$

- En (20, 60] se trata de una función constante.



6 Se sabe que la derivada de la función $f(x)$ viene dada por $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función original $f(x)$. ¿Dónde alcanza la función $f(x)$ sus máximos y mínimos locales?

b) Obtén la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 2$ sabiendo que $f(2) = 5$.

(Castilla y León. Septiembre 2006. Bloque B. Pregunta 2)

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(1) = -6 < 0 \rightarrow$ En $x = 1$ se alcanza un máximo.

$f''(3) = 6 > 0 \rightarrow$ En $x = 3$ se alcanza un mínimo.

- En $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ la función es creciente.
- En $(1, 3)$ la función es decreciente.

b) $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$

Ecuación de la recta tangente:
$y - 5 = -3(x - 2) \rightarrow y = -3x + 6 + 5 \rightarrow y = -3x + 11$