

## LITERATURA Y MATEMÁTICAS

*La cometa dorada*

[El joven Vili, uno de los protagonistas de esta novela, que se desarrolla en una ciudad de Hungría, en los años veinte del siglo xx, una tarde abre en su habitación el libro de Física y observa durante un rato esta fórmula:]

$$g = S \sqrt{1 + \frac{4\pi rR}{T^2 g} \cos^2 \varphi - 2 \frac{4\pi R}{r^2 g} \cos^2 \varphi}$$

Se le fueron las ganas de vivir.

«¿Qué sentido tiene esto? –se preguntó confuso–. ¿Quién inventa estas cosas para amargarle la vida a los alumnos?» Sintió rabia. Se le hizo un nudo en la garganta. Los estúpidos números se arrastraban frente a él como gusanos, mientras que las letras lo hacían como larvas.

Bostezó. [...]

Un profesor particular iba todas las tardes a fin de «ablandarle» la cabeza para que le entraran las dos asignaturas más difíciles: Matemáticas y Física. Mientras esperaba a que llegara para enseñarle todas esas «burradas», se entretenía, más bien torpemente, con el libro de ejercicios de Matemáticas.

Podía pasar horas leyéndolos, pero en vano: «Un señor compró cinco metros de paño...», «Hace ocho años un padre era cien veces más viejo que su hijo; ocho años más tarde sólo le faltaban cuatro años para ser tres veces mayor que el mismo hijo...», «Un hombre rico que contrata a dos jornaleros...». Fijándose sólo en lo anecdótico y sin preocuparse de lo que había que resolver, fantaseaba divertidas situaciones con los personajes de los problemas. Se dejaba envolver como en un lento sueño, imaginándose los pormenores: el color del paño, quiénes eran el padre y su hijo, si ese señor tendría barba, si sabría el chaval montar en bicicleta y dónde viviría el rico... Pero, cuando llegaba el momento inevitable de vérselas con los números, desbaratado su juego, se justificaba argumentando: «Pero, vamos a ver, ¿quién necesita ese paño? Yo, seguro que no. Está más que claro que el padre, el hijo y el rico, todos, son unos burros y no sirven para nada».

## La cometa dorada

Dezső Kosztolányi

A Vili, el joven protagonista de esta novela, que se desarrolla en una ciudad de Hungría, en los años veinte del siglo xx, no le gustan las Matemáticas ni la Física. Su profesor de Matemáticas y Física, Antal Novák, está preocupado porque Vili no ha aprendido nada de lo que ha explicado durante el curso. En la última clase trata de repasar antes del examen final y le pide que hable de cualquier tema. Vili elige el tema de las variaciones.

–Tracemos una recta –dijo Vili señalando la pizarra con la idea de aprovechar el paseo hasta la tarima para mover los músculos.

–Como quiera –repuso Novák, sorprendido–. Trace esa recta. Pero no aquí, sino mentalmente.

–Que sea  $AB$ .

–O  $CD$  –propuso contrariado Novák; ya veía que el muchacho no tenía la menor idea de lo que estaba hablando.

Vili le seguía la corriente aferrándose a sus palabras como a un salvavidas.

–Pues que sea  $CD$  –repitió.

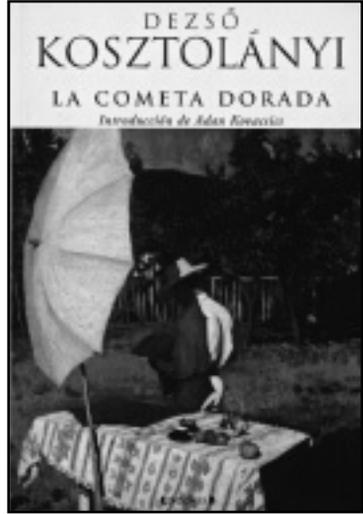
–O  $XY$  –sugirió el profesor, complicándolo todavía más.

–O  $XY$  –cedió Vili.

–Pero ¿qué es lo que pretende con esa recta? –exclamó por fin Novák–. ¿Para qué va a utilizar la recta en las variaciones? Definitivamente, no lo entiendo. [...]

El profesor propuso otro ejercicio: trazar una perpendicular a un plano oblicuo. Vili repetía como un loro, pero cuando Novák lo interrogaba, se quedaba mudo, desamparado, sin saber qué decir.

Afligido por tanta incompreensión, Novák se prometió a sí mismo que, por mucho que le costara, conseguiría que aquel chico entendiese. [...] Vili miraba al profesor y pensaba: «Para éste es tan fácil». Pero en vez de visualizar la imagen del plano inclinado y la línea perpendicular, conceptos totalmente ajenos a él, sólo veía los ademanes bruscos del profesor, que gesticulaba como un saltimbanqui: sus dedos, sus anillos incluido el de cornalina, revoloteaban en el aire. Las abstracciones no eran el fuerte de Vili. Sólo le resultaba inteligible la realidad más inmediata, lo visible y palpable.



Expresa algebraicamente este problema:

«Una fábrica desea elaborar un nuevo tipo de tarta con dos productos  $A$  y  $B$ .

El primero contiene un 70% de grasas y un 15% de hidratos de carbono, mientras

que el segundo contiene un 12% de grasas y un 80% de hidratos de carbono.

La tarta debe contener, al menos, 40 g de grasas y 90 g de hidratos de carbono.

El coste del producto  $A$  es 0,05 €/g y el del producto  $B$  es 0,02 €/g. ¿Cuántos gramos de cada producto debe tener la tarta para que el coste sea mínimo?».

$x \rightarrow$  Cantidad del producto  $A$

$y \rightarrow$  Cantidad del producto  $B$

Se trata de hacer mínimo el coste que viene dado

por la función  $f(x, y) = 0,05x + 0,02y$ .

Y debe cumplir estas condiciones:

$$0,70x + 0,12y \geq 40$$

$$0,15x + 0,80y \geq 90$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

# Programación lineal

## ANTES DE COMENZAR... RECUERDA

001 Calcula tres valores de  $x$  que sean solución de estas inecuaciones.

a)  $x + 5 < -2$       b)  $\frac{x}{2} - 4 \geq 0$       c)  $-3x - 2 \leq 3$

- a) Tres soluciones son:  $x = -8, x = -9$  y  $x = -10$   
b) Tres soluciones son:  $x = 10, x = 12$  y  $x = 14$   
c) Tres soluciones son:  $x = 0, x = 1$  y  $x = 2$

002 Resuelve la inecuación  $\frac{1}{2}x - 4 \leq 3x + 1$ . Razona los pasos realizados para resolverla.

Resolviendo la ecuación asociada  $\frac{x}{2} - 4 = 3x + 1$ , obtenemos  $x = -2$ , que divide a la recta real en dos intervalos:  $(-\infty, -2)$  y  $(-2, +\infty)$ . Los puntos de  $(-2, +\infty)$ , así como el punto  $-2$ , verifican la inecuación dada, por lo que la solución es  $[-2, +\infty)$ .

003 Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

a)  $\left. \begin{array}{l} x + 3 > 5 \\ 2x - 1 > 11 \end{array} \right\}$       b)  $\left. \begin{array}{l} 15 + 7x \geq 8 \\ 3x < 14x + 6 \end{array} \right\}$

a)  $\left. \begin{array}{l} x + 3 > 5 \rightarrow x > 2 \\ 2x - 1 > 11 \rightarrow x > 6 \end{array} \right\}$

Por tanto, la solución del sistema de inecuaciones es  $(6, +\infty)$ .

b)  $\left. \begin{array}{l} 15 + 7x \geq 8 \rightarrow x \geq -1 \\ 3x < 14x + 6 \rightarrow x > \frac{-6}{11} \end{array} \right\}$

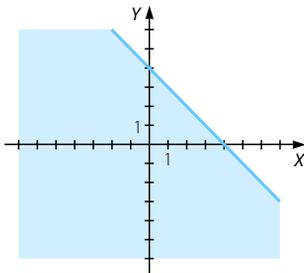
Así, la solución del sistema de inecuaciones es  $\left(\frac{-6}{11}, +\infty\right)$ .

## ACTIVIDADES

001 Dibuja la región del plano que determinan las soluciones de las siguientes inecuaciones lineales con dos incógnitas.

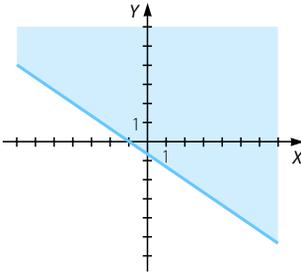
a)  $x + y < 4$       b)  $2x + 3y > -2$       c)  $x - 3y \leq 0$       d)  $-x - y \geq -2$

- a)  $x + y = 4 \rightarrow$  Recta que corta a los ejes en los puntos  $(4, 0)$  y  $(0, 4)$ .  
Los puntos de la región inferior, sin incluir la recta, satisfacen la inecuación.



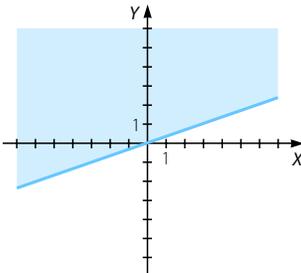
- b)  $2x + 3y = -2 \rightarrow$  Recta que corta a los ejes en los puntos  $\left(0, \frac{-2}{3}\right)$  y  $(-1, 0)$ .

Los puntos de la región superior, sin incluir la recta, satisfacen la inecuación.



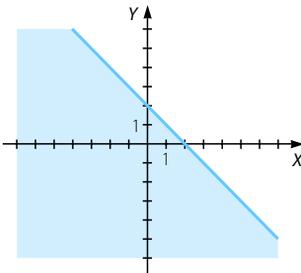
- c)  $x - 3y = 0 \rightarrow$  Recta que corta a los ejes en  $(0, 0)$  y pasa por  $(3, 1)$ .

Los puntos de la región superior, incluyendo la recta, satisfacen la inecuación.



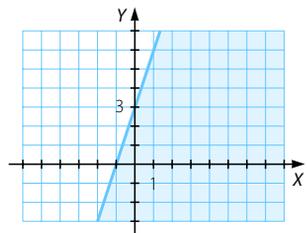
- d)  $-x - y = -2 \rightarrow$  Recta que corta a los ejes en los puntos  $(0, 2)$  y  $(2, 0)$ .

Los puntos de la región inferior, incluyendo la recta, satisfacen la inecuación.



002 Determina inecuaciones cuyas soluciones representan estas regiones del plano:

Recta que pasa por  $(0, 3)$  y  $(-1, 0) \rightarrow y = 3x + 3$   
 Como el punto  $(0, 0)$  está en la región, deducimos que  $y \leq 3x + 3$ . También vale cualquier inecuación equivalente a la dada.



# Programación lineal

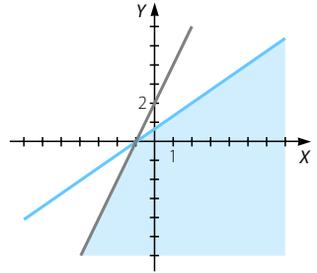
003 Resuelve estos sistemas de inecuaciones de dos inecuaciones y dos incógnitas.

$$\text{a) } \begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ 2x - 3y \geq -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -x + 2y \leq 4 \\ 2x - 4y \leq 1 \end{cases}$$

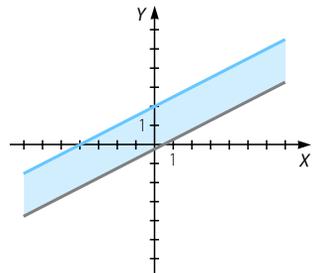
- a)  $-2x + y = 2 \rightarrow$  Recta que corta a los ejes en  $(-1, 0)$  y  $(0, 2)$ .  
 $2x - 3y = -2 \rightarrow$  Recta que corta a los ejes en  $(-1, 0)$  y  $(0, \frac{2}{3})$ .

El punto  $(0, 0)$  satisface las dos inecuaciones. La solución del sistema está formada por la región del plano limitada por las dos rectas (incluyendo sus puntos) y que contiene a este punto.



- b)  $-x + 2y = 4 \rightarrow$  Recta que corta a los ejes en los puntos  $(0, 2)$  y  $(-4, 0)$ .  
 $2x - 4y = 1 \rightarrow$  Recta que corta a los ejes en  $(0, -\frac{1}{4})$  y  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

El punto  $(0, 0)$  satisface las dos inecuaciones. La solución del sistema está formada por la región del plano limitada por las dos rectas (incluyendo sus puntos) y que contiene a este punto.

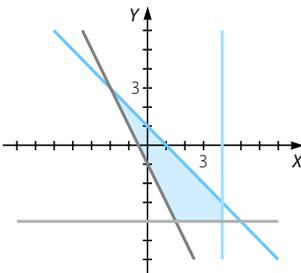


004 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -2x - y \leq 1 \\ x \leq 4 \\ y \geq -4 \end{cases}$$

Representamos las rectas asociadas:  $x + y = 1$ ;  $-2x - y = 1$ ;  $x = 4$ ;  $y = -4$ .

El punto  $(0, 0)$  satisface las cuatro inecuaciones, por lo que la solución está formada por la región del plano delimitada por las cuatro rectas y que contiene al punto  $(0, 0)$ .



005 Plantea este problema: «Tenemos como máximo 120 unidades de dos productos, A y B. Hay 65 unidades de A, con unas ganancias de 4 € por unidad, y 55 de B, con 6,50 € por unidad. Determinar las cantidades que se venden para maximizar los beneficios».

$x \rightarrow$  n.º de unidades del producto A       $y \rightarrow$  n.º de unidades del producto B

	Producto A	Producto B
Ganancias por unidad (€)	4	6,50

$\rightarrow f(x, y) = 4x + 6,50y \rightarrow$  Función objetivo

Maximizar  $f(x, y) = 4x + 6,50y$

Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 65 \\ 0 \leq y \leq 55 \\ x + y \leq 120 \end{array} \right\}$

006 Plantea: «Tenemos mesas de tipo A con 2 m<sup>2</sup> de madera, 1 hora de trabajo y un beneficio de 80 € cada una, y de tipo B con 1 m<sup>2</sup> de madera, 3 horas de trabajo y 50 € de beneficio. Si hay 600 m<sup>2</sup> de madera y un máximo de 900 horas, determina cómo obtener el máximo beneficio».

$x \rightarrow$  n.º de mesas de tipo A       $y \rightarrow$  n.º de mesas de tipo B

	Tipo A	Tipo B	Total
Madera (m <sup>2</sup> )	2	1	600
Trabajo (horas)	1	3	900
Beneficio (€)	80	50	

$\rightarrow 2x + y \leq 600$

$\rightarrow x + 3y \leq 900$

$\rightarrow f(x, y) = 80x + 50y \rightarrow$  Función objetivo

Maximizar  $f(x, y) = 80x + 50y$

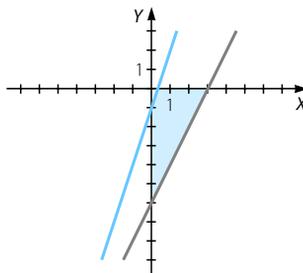
Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 600 \\ x + 3y \leq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

007 Dibuja la región factible que representan estas restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 3x - y \geq 1 \\ 2x - y < 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b) } 2x + y \geq 1 \\ -x - y > 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array} \right\}$$

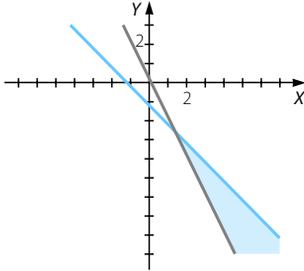
a) Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones:  $3x - y = 1$ ;  $2x - y = 6$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ . Imponiendo las condiciones del sistema de inecuaciones, se obtiene una región factible acotada de vértices

$A(0, -1)$ ;  $B(0, -6)$ ;  $C(3, 0)$  y  $D\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ .

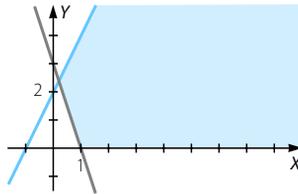


# Programación lineal

b) Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones:  $2x + y = 1$ ;  $-x - y = 6$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ . Se obtiene una región factible no acotada cuyo vértice es el punto de intersección de las rectas  $2x + y = 1$  y  $-x - y = 6 \rightarrow (7, -13)$ .



008 Determina las restricciones que representan a la siguiente región factible:



Recta que pasa por  $(1, 0)$  y  $(0, 3) \rightarrow y = -3x + 3$

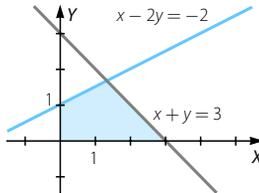
Inecuación que no contiene al punto  $(0, 0) \rightarrow y \geq -3x + 3$

Recta que pasa por  $(-1, 0)$  y  $(0, 2) \rightarrow y = 2x + 2$

Inecuación que contiene al punto  $(0, 0) \rightarrow y \leq 2x + 2$

Las restricciones que determinan esta región son: 
$$\left. \begin{array}{l} y \geq -3x + 3 \\ y \leq 2x + 2 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

009 Determina los vértices de la siguiente región:

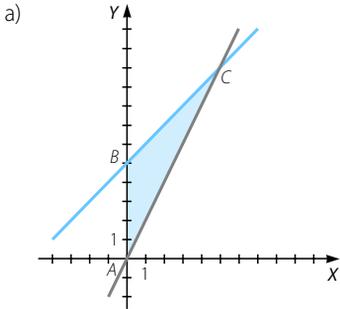


Vértices:  $(0, 0)$ ;  $(0, 1)$  y  $(3, 0)$ , y el punto solución del sistema:  $\left. \begin{array}{l} x - 2y = -2 \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left( \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right)$

010 Halla los vértices de las regiones factibles que representan estas restricciones.

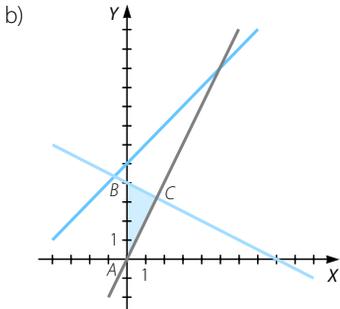
a) 
$$\left. \begin{array}{l} x - y > -5 \\ 2x - y \leq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) 
$$\left. \begin{array}{l} x - y > -5 \\ 2x - y \leq 0 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$



Vértices:  $A(0, 0)$ ;  $B(0, 5)$  y  $C$ , que es la solución del sistema de ecuaciones:

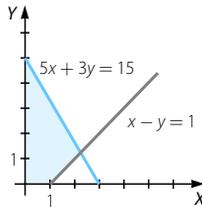
$$\left. \begin{array}{l} x - y = -5 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow C(5, 10)$$



Vértices:  $A(0, 0)$ ;  $B(0, 4)$  y  $C$ , que es la solución del sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow C\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

011 Determina la solución óptima que maximiza la función  $f(x, y) = 2x - y$  en esta región factible:

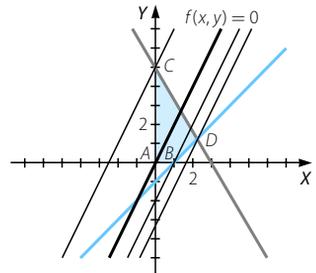


Como la región factible está acotada, el máximo se va a alcanzar en uno de los vértices. Trazando rectas paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, vemos que el máximo se alcanza

en el vértice  $D\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\right)$ , que es la solución

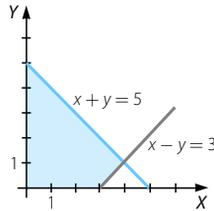
del sistema de ecuaciones:  $\left. \begin{array}{l} 5x + 3y = 15 \\ x - y = 1 \end{array} \right\}$

El valor del máximo es:  $2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$

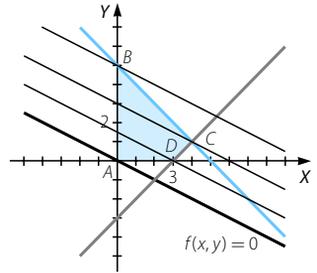


# Programación lineal

012 Halla la solución óptima que maximiza la función  $f(x, y) = x + 2y$  en la siguiente región factible:



Como la región factible está acotada, el máximo se alcanzará en uno de sus vértices. Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por cada uno de los vértices, observamos que el máximo se alcanza en el vértice  $B(0, 5)$  y vale:  $0 + 2 \cdot 5 = 10$



013 Disponemos de 90.000 m<sup>2</sup> para construir parcelas de 3.000 y 5.000 m<sup>2</sup>, A y B. Los beneficios son de 10.000 € por cada parcela A y de 20.000 € por B. El número máximo de parcelas B es de 120, y el de parcelas A, 150. Determina cuántas parcelas de cada tipo necesitamos para obtener beneficios máximos.

$x \rightarrow$  n.º de parcelas de tipo A     $y \rightarrow$  n.º de parcelas de tipo B

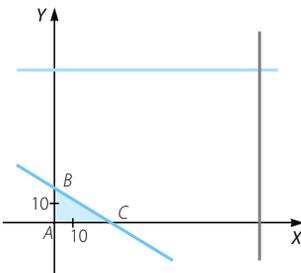
	Parcelas tipo A	Parcelas tipo B	
Tamaño (m <sup>2</sup> )	3.000	5.000	$\rightarrow 3.000x + 5.000y \leq 90.000$
Total parcelas	150	120	$\rightarrow 0 \leq x \leq 150; 0 \leq y \leq 120$
Beneficio (€)	10.000	20.000	$\rightarrow f(x, y) = 10.000x + 20.000y \rightarrow$ Función objetivo

Maximizar  $f(x, y) = 10.000x + 20.000y$

Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 3.000x + 5.000y \leq 90.000 \\ 0 \leq x \leq 150 \\ 0 \leq y \leq 120 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices:  $A(0, 0)$ ;  $B(0, 18)$  y  $C(30, 0)$ .



Como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 360.000$  y  $f(C) = 300.000$ , el máximo se alcanza en el vértice B, lo que significa que para obtener el máximo beneficio: 360.000 €, es necesario construir 18 parcelas de tipo B y ninguna de tipo A.

014 Vamos a invertir en dos productos financieros A y B. La inversión en B será, al menos, de 3.000 € y no se invertirá en A más del doble que en B. El producto A proporciona un beneficio del 10% y B del 5%. Si disponemos de un máximo de 12.000 €, ¿cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio?

$x \rightarrow$  Cantidad de dinero invertida en el producto financiero A  
 $y \rightarrow$  Cantidad de dinero invertida en el producto financiero B

	Producto financiero A	Producto financiero B
Beneficio (€)	0,10	0,05

$\rightarrow f(x, y) = 0,10x + 0,05y$   
 $\rightarrow$  Función objetivo

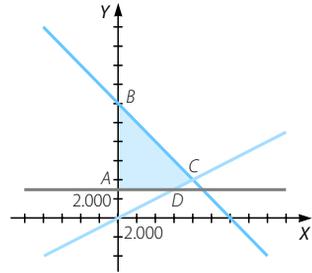
Maximizar  $f(x, y) = 0,10x + 0,05y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 12.000 \\ 3.000 \leq y \\ 0 \leq x \leq 2y \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices: A(0, 3.000); B(0, 12.000); C(8.000, 4.000) y D(6.000, 3.000).

Como  $f(A) = 150$ ;  $f(B) = 600$ ;  $f(C) = 1.000$  y  $f(D) = 750$ , el máximo se alcanza en C.

Es decir, debemos invertir 8.000 € en el producto A y 4.000 € en el producto B para alcanzar un beneficio máximo de 1.000 €.



015 Se fabrican dos tipos de aparatos A y B en los talleres X e Y. En cada uno de los talleres se trabajan 100 horas a la semana. Cada aparato A requiere 3 horas del taller X y 1 hora de Y, y cada aparato B, 1 y 2 horas, respectivamente. Cada aparato A se vende a 100 € y cada aparato B a 150 €. Calcula, gráficamente, el número de aparatos de cada tipo que hay que producir para que la facturación sea máxima.

$x \rightarrow$  n.º de aparatos de tipo A       $y \rightarrow$  n.º de aparatos de tipo B

	Tipo A	Tipo B	Horas trabajadas
Taller X (horas)	3	1	100
Taller Y (horas)	1	2	100
Precio por aparato (€)	100	150	

$\rightarrow 3x + y \leq 100$

$\rightarrow x + 2y \leq 100$

$\rightarrow f(x, y) = 100x + 150y \rightarrow$  Función objetivo

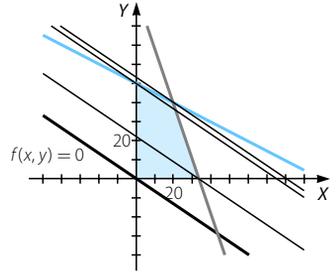
Maximizar  $f(x, y) = 100x + 150y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$

# Programación lineal

La región factible está acotada.

Vértices:  $A(0, 0)$ ;  $B(0, 50)$ ;  $C(20, 40)$  y  $D\left(\frac{100}{3}, 0\right)$ .

Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por cada uno de los vértices, vemos que el máximo se alcanza en  $C$ . Así, es necesario producir 20 aparatos de tipo  $A$  y 40 aparatos de tipo  $B$  para alcanzar un beneficio máximo de 8.000 €.



016

Tenemos 120 refrescos de naranja y 180 de limón. Se venden en paquetes de dos tipos: los paquetes de tipo  $A$  contienen 3 refrescos de naranja y 3 de limón, y los de tipo  $B$  contienen 2 refrescos de naranja y 4 de limón. El beneficio es de 6 € por cada paquete de tipo  $A$  y 5 € por cada paquete de tipo  $B$ . Halla, gráficamente, cuántos paquetes de cada tipo hay que vender para maximizar los beneficios.

$x \rightarrow$  n.º de paquetes de tipo  $A$        $y \rightarrow$  n.º de paquetes de tipo  $B$

	Paquetes tipo A	Paquetes tipo B	Total	
Naranja	3	2	120	$\rightarrow 3x + 2y \leq 120$
Limón	3	4	180	$\rightarrow 3x + 4y \leq 180$
Beneficio (€)	6	5		$\rightarrow f(x, y) = 6x + 5y \rightarrow$ Función objetivo

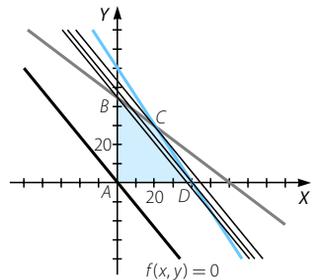
Maximizar  $f(x, y) = 6x + 5y$

Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices:  $A(0, 0)$ ;  $B(0, 45)$ ;  $C(20, 30)$  y  $D(40, 0)$ .

Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, vemos que el máximo se alcanza en  $C$ . Así, es necesario vender 20 paquetes de tipo  $A$  y 30 paquetes de tipo  $B$  para que el beneficio máximo sea de 270 €.



017

Resuelve este problema de programación lineal:

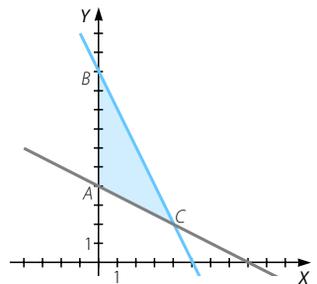
Maximizar  $f(x, y) = x - 2y$

Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} x + 2y \geq 8 \\ -2x - y \geq -10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices:  $A(0, 4)$ ;  $B(0, 10)$  y  $C(4, 2)$ .

Como  $f(A) = -8$ ;  $f(B) = -20$  y  $f(C) = 0$ , el máximo se alcanza en el vértice  $C$  y su valor es 0.



018 Resuelve el problema de programación lineal:

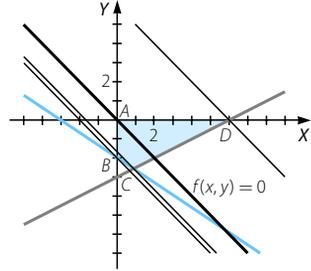
$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad f(x, y) = x + y \\ \text{Sujeto a} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y \leq 6 \\ 2x + 3y \geq -6 \\ x \geq 0, y \leq 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

La región factible está acotada.

Trazamos paralelas que pasen por  $A(0, 0)$ ;

$$B(0, -2); C\left(\frac{6}{7}, \frac{-18}{7}\right) \text{ y } D(6, 0).$$

El máximo se alcanza en  $D$  y vale 6.



019 Resuelve este problema de programación lineal:

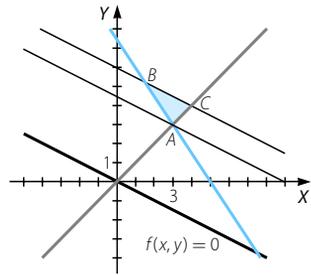
$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad f(x, y) = 2x + 4y \\ \text{Sujeto a} \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 12 \\ x - y \leq 0 \\ 6x + 4y \geq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

La región factible está acotada.

Trazamos paralelas que pasen por  $A(3, 3)$ ;

$$B\left(\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right) \text{ y } C(4, 4).$$

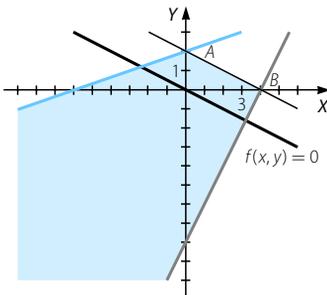
El máximo se alcanza en  $B$  y  $C$  y, por tanto, se alcanza en todos los puntos del segmento  $BC$ .



020 Resuelve el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad f(x, y) = 3x + 6y \\ \text{Sujeto a} \quad \left. \begin{array}{l} -x + 3y \leq 6 \\ 2x - y \leq 8 \\ x + 2y \leq 4 \end{array} \right\} \end{array}$$

La región factible no está acotada. Tiene dos vértices:  $A(0, 2)$  y  $B(4, 0)$ .



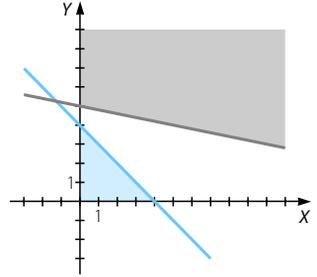
La función objetivo alcanza su máximo en los vértices  $A$  y  $B$  y, por tanto, en todos los puntos del segmento que une  $A$  con  $B$ , y su valor es 12.

# Programación lineal

021 Resuelve el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad f(x, y) = -x + 3y \\ \text{Sujeto a} \quad \left. \begin{array}{l} x + 5y \geq 25 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

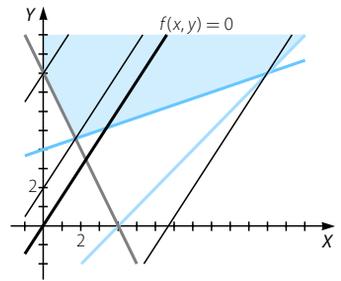
El sistema de inecuaciones  $\left. \begin{array}{l} x + 5y \geq 25 \\ x + y \leq 4 \end{array} \right\}$  no tiene solución en el primer cuadrante, por lo que no existe región factible para el conjunto de restricciones del enunciado. El problema no tiene solución.



022 Resuelve este problema de programación lineal:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad f(x, y) = 3x - 2y \\ \text{Sujeto a} \quad \left. \begin{array}{l} -x + 3y \geq 12 \\ 2x + y \geq 8 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

La región factible no está acotada. Trazando rectas paralelas a  $3x - 2y = 0$  vemos que siempre se puede trazar una recta paralela por encima de la anterior que corte a la región factible. El problema no tiene solución.



023 Una fábrica elabora dos tipos de productos, A y B. El tipo A necesita 2 obreros trabajando un total de 20 horas, y se obtiene un beneficio de 1.500 € por unidad. El tipo B necesita 3 obreros con un total de 10 horas y el beneficio es de 1.000 € por unidad. Si disponemos de 60 obreros y 480 horas de trabajo, determina la cantidad de unidades de A y de B que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

$x \rightarrow$  n.º de unidades del producto de tipo A  
 $y \rightarrow$  n.º de unidades del producto de tipo B

	Tipo A	Tipo B	Total
Obreros	2	3	60
Tiempo (horas)	20	10	480
Beneficio por unidad (€)	1.500	1.000	

$$\rightarrow 2x + 3y \leq 60$$

$$\rightarrow 20x + 10y \leq 480$$

$$\rightarrow f(x, y) = 1.500x + 1.000y \rightarrow \text{Función objetivo}$$

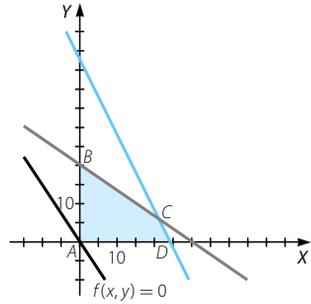
$$\text{Maximizar} \quad f(x, y) = 1.500x + 1.000y$$

$$\text{Sujeto a} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ 20x + 10y \leq 480 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La región factible está acotada.

Vértices:  $A(0, 0)$ ;  $B(0, 20)$ ;  $C(21, 6)$  y  $D(24, 0)$ .

Como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 20.000$ ;  $f(C) = 37.500$  y  $f(D) = 36.000$ , el máximo se alcanza en el vértice  $C$ . Así, hay que fabricar 21 unidades de tipo  $A$  y 6 unidades de tipo  $B$  para que el beneficio sea máximo y valga 37.500 €.



024

Una fábrica de conserva tiene 800 kg de guisantes para conservar en dos tipos de latas. La lata pequeña contiene 200 g y aporta un beneficio de 10 céntimos por lata. La lata grande contiene 500 g y un beneficio de 30 céntimos. Si en el almacén solo disponemos de 2.000 latas de tamaño pequeño y 1.000 grandes, determina la cantidad de latas de cada tamaño que tenemos que producir para maximizar el beneficio.

$x \rightarrow$  n.º de latas pequeñas       $y \rightarrow$  n.º de latas grandes

	Lata pequeña	Lata grande	Total
Cantidad de guisantes (kg)	0,2	0,5	800
Total latas	2.000	1.000	
Beneficio por unidad (€)	0,10	0,30	

$\rightarrow 0,2x + 0,5y \leq 800$

$\rightarrow x \leq 2.000; y \leq 1.000$

$\rightarrow f(x, y) = 0,10x + 0,5y \rightarrow$  Función objetivo

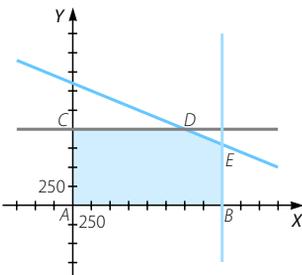
Maximizar  $f(x, y) = 0,10x + 0,5y$

Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 0,2x + 0,5y \leq 800 \\ 0 \leq x \leq 2.000 \\ 0 \leq y \leq 1.000 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices:  $A(0, 0)$ ;  $B(2.000, 0)$ ;  $C(0, 1.000)$ ;  $D(1.500, 1.000)$  y  $E(2.000, 800)$ .

Como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 200$ ;  $f(C) = 300$ ;  $f(D) = 450$  y  $f(E) = 440$ , el valor máximo se alcanza en el punto  $D$ . Por tanto, debemos fabricar 1.500 latas pequeñas y 1.000 latas grandes para maximizar el beneficio y que este sea de 450 €.



# Programación lineal

025 Un deportista necesita diariamente consumir 36 g de una sustancia *M*, 24 g de *N* y 8 g de *P*. En la farmacia ha encontrado dos tipos de cápsulas que contienen estas sustancias. Las cápsulas *A* tienen 6 g de *M*, 2 g de *N* y 18 g de *P*, y cuestan 3 céntimos por cápsula. Las cápsulas *B* tienen 3 g de *M*, 4 g de *N* y 18 g de *P*, y cuestan 4,5 céntimos por cápsula. ¿Cuántas cápsulas de cada tipo necesita para que el coste sea mínimo?

$x \rightarrow$  n.º de cápsulas de tipo *A*

$y \rightarrow$  n.º de cápsulas de tipo *B*

	Cápsula <i>A</i>	Cápsula <i>B</i>	Total
Sustancia <i>M</i> (g)	6	3	36
Sustancia <i>N</i> (g)	2	4	24
Sustancia <i>P</i> (g)	18	18	8
Coste por cápsula (céntimos)	3	4,5	

$\rightarrow 6x + 3y \geq 36$

$\rightarrow 2x + 4y \geq 24$

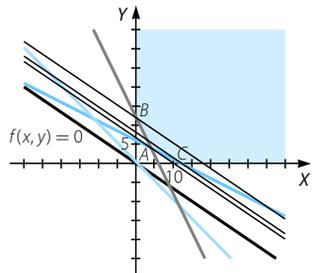
$\rightarrow 18x + 18y \geq 8$

$\rightarrow f(x, y) = 3x + 4,5y \rightarrow$  Función objetivo

Minimizar  $f(x, y) = 3x + 4,5y$

Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 6x + 3y \geq 36 \\ 2x + 4y \geq 24 \\ 18x + 18y \geq 8 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$

La región factible no está acotada superiormente y tiene tres vértices: *A*(4, 4); *B*(0, 12) y *C*(12, 0). Trazando paralelas a la función objetivo vemos que el mínimo se alcanza en *A*. Así, un deportista necesita 4 cápsulas de cada tipo para que el coste sea mínimo, siendo este coste de 30 céntimos.



026 Los animales de una granja deben tomar, al menos, 60 mg de vitamina *A* y, al menos, 90 mg de vitamina *B*. Existen dos compuestos con estas vitaminas. El compuesto *X* contiene 10 mg de vitamina *A* y 15 mg de *B*, y cada dosis cuesta 0,50 €. El compuesto *Y* contiene 10 mg de cada vitamina, y cada dosis cuesta 0,30 €. Además, se recomienda no tomar más de 8 dosis diarias. Calcula qué dosis tiene que tomar para que el coste sea mínimo.

$x \rightarrow$  n.º de dosis del compuesto *X*

$y \rightarrow$  n.º de dosis del compuesto *Y*

	Compuesto <i>X</i>	Compuesto <i>Y</i>	Cantidad
Vitamina <i>A</i> (mg)	10	10	60
Vitamina <i>B</i> (mg)	15	10	90
Coste (€)	0,50	0,30	

$\rightarrow 10x + 10y \geq 60$

$\rightarrow 15x + 10y \geq 90$

$\rightarrow f(x, y) = 0,50x + 0,30y \rightarrow$  Función objetivo

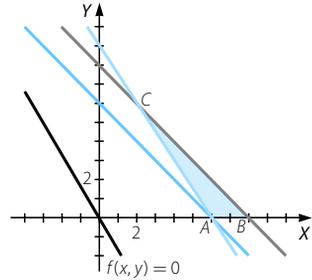
Minimizar  $f(x, y) = 0,50x + 0,30y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 8 \\ 10x + 10y \geq 60 \\ 15x + 10y \geq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices:  $A(6, 0)$ ;  $B(8, 0)$  y  $C(2, 6)$ .

Sustituyendo en la función objetivo obtenemos que  $f(A) = 3$ ;  $f(B) = 4$  y  $f(C) = 2,8$ , por lo que el mínimo se alcanza en el punto  $C$ .

Así, los animales tienen que tomar 2 dosis del compuesto  $X$  y 6 dosis del compuesto  $Y$  para que el coste sea mínimo, siendo este de 2,80 €.



027

Una empresa se dedica a elaborar lotes de productos que se venden en los supermercados. En estos momentos están empaquetando dos lotes diferentes. El lote de tipo  $A$  tiene 1 queso y 2 botellas de vino, y su transporte cuesta 0,90 €. El lote de tipo  $B$  tiene 3 quesos y 1 botella de vino, y cuesta 1,50 € transportarlo. La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino, y necesitan elaborar, al menos, 10 lotes del tipo  $A$  y 25 del tipo  $B$ . ¿Cuántos lotes de cada clase han de elaborar para que los gastos en transporte sean mínimos?

$x \rightarrow$  n.º de lotes de tipo  $A$        $y \rightarrow$  n.º de lotes de tipo  $B$

	Lote tipo A	Lote tipo B	Total
Queso	1	3	200
Botellas de vino	2	1	100
Coste del transporte (€)	0,90	1,50	

$\rightarrow x + 3y \leq 200$

$\rightarrow 2x + y \leq 100$

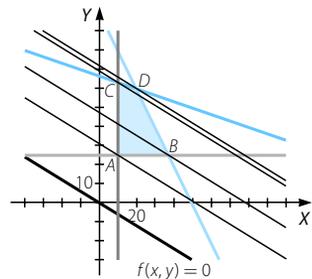
$\rightarrow f(x, y) = 0,90x + 1,50y \rightarrow$  Función objetivo

Minimizar  $f(x, y) = 0,90x + 1,50y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ 10 \leq x \\ 25 \leq y \end{array} \right\}$

La región factible está acotada.

Vértices:  $A(10, 25)$ ;  $B\left(\frac{75}{2}, 25\right)$ ;  $C\left(10, \frac{190}{3}\right)$  y  $D(20, 60)$ .

Como  $f(A) = 46,5$ ;  $f(B) = 71,25$ ;  $f(C) = 104$  y  $f(D) = 108$ , el mínimo se alcanza en  $A$  y su valor es 46,5. Es decir, para que los gastos del transporte sean mínimos se han de elaborar 10 lotes de tipo  $A$  y 25 lotes de tipo  $B$ , ascendiendo los gastos a 46,50 €.



# Programación lineal

028 Esta es la composición de los artículos, A y B, por los elementos M1, M2 y M3.

	A	B
M1	2	1
M2	3	2
M3	1	2

Disponemos de 45 unidades de M1, 71 de M2 y 25 de M3, y los costes de traslado de A y B son 50 € y 60 €, respectivamente. Determina los artículos que hay que elaborar para que los costes de traslado sean mínimos.

$x \rightarrow$  n.º de artículos A       $y \rightarrow$  n.º de artículos B

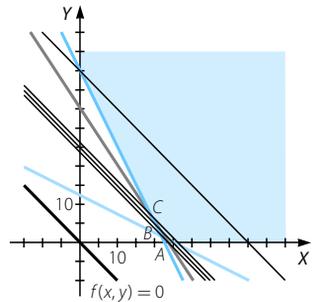
Minimizar  $f(x,y) = 50x + 60y$

Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 45 \\ 3x + 2y \geq 71 \\ x + 2y \geq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

La región factible no está acotada.

Vértices: A(25, 0); B(23, 1); C(19, 7) y D(0, 45).

Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por estos vértices, se obtiene que el mínimo se alcanza en B. Esto significa que para que los costes de traslado sean mínimos hay que elaborar 23 artículos A y 1 artículo B. En este caso, el coste será de 1.200 €.



029 Comprueba que el punto (2, 3) pertenece al semiplano determinado por la inecuación:

$$3x - 2y \leq 1$$

Halla las coordenadas de otros dos puntos de la misma región del plano.

El punto (2, 3) pertenece al semiplano determinado por  $3x - 2y \leq 1$  porque  $3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0 \leq 1$ .

Por tanto, (0, 0) y (-1, 0) son dos puntos de la misma región del plano.

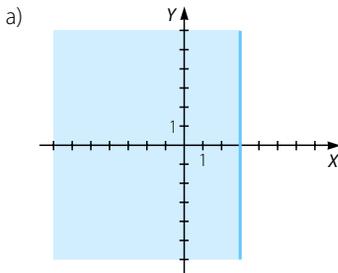
030 Resuelve gráficamente las inecuaciones.

a)  $x \leq 3$

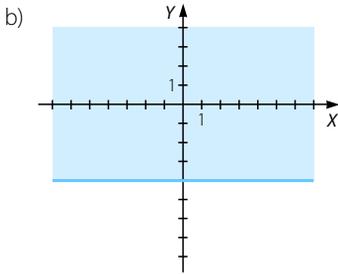
b)  $y > -4$

c)  $x < 0$

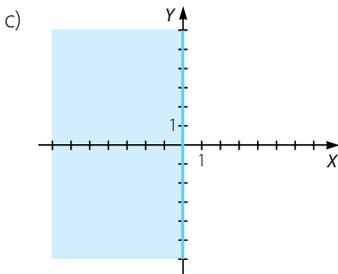
d)  $y \leq 5$



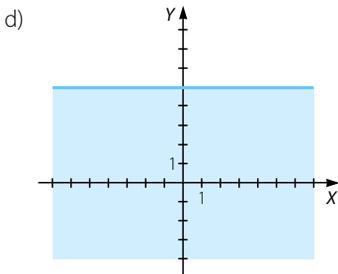
La recta  $x = 3$  forma parte de la solución.



La recta  $y = -4$  no forma parte de la solución.



La recta  $x = 0$  no forma parte de la solución.



La recta  $y = 5$  forma parte de la solución.

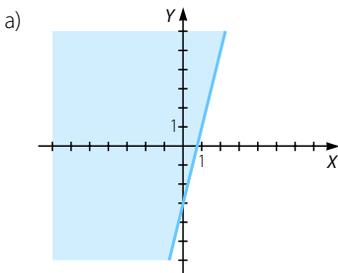
031 Resuelve las siguientes inecuaciones lineales con dos incógnitas.

a)  $4x - y < 3$

b)  $4x + y \leq 3$

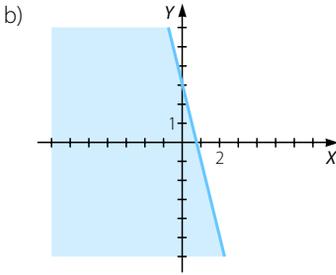
c)  $-4x - y \geq 3$

d)  $-4x + y > 3$

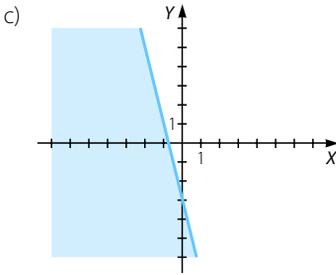


La recta  $4x - y = 3$  no forma parte de la solución.

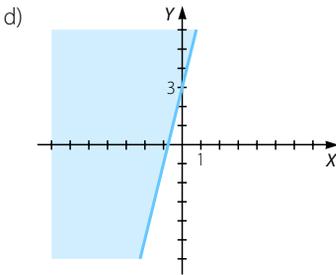
# Programación lineal



La recta  $4x + y = 3$  forma parte de la solución.



La recta  $-4x - y = 3$  forma parte de la solución.

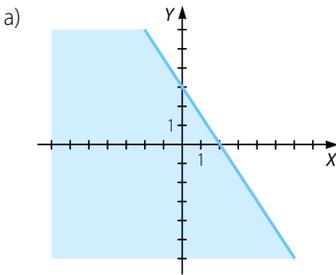


La recta  $-4x + y = 3$  no forma parte de la solución.

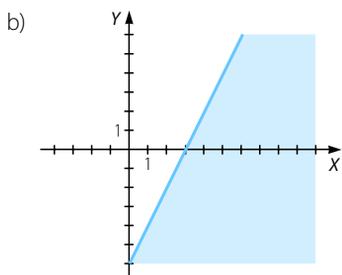
032 Resuelve gráficamente estas inecuaciones.

a)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 1$

b)  $\frac{2x - y}{3} > 2$

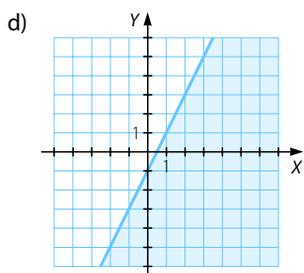
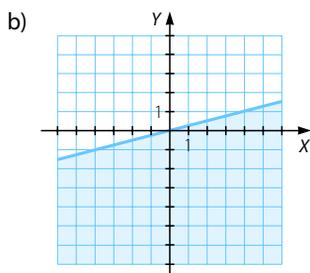
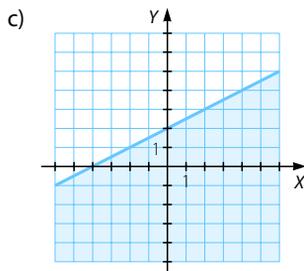
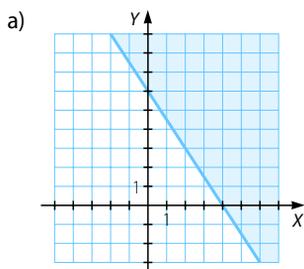


La recta  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$  forma parte de la solución.



La recta  $2x - y = 6$  no forma parte de la solución.

033 Determina las inecuaciones que tienen como soluciones los siguientes semiplanos.



- a) Recta que pasa por  $(4, 0)$  y  $(0, 6) \rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$ . La región de puntos no contiene al punto  $(0, 0)$ , por lo que la inecuación es  $y \geq \frac{-3}{2}x + 6$ .
- b) Recta que pasa por  $(0, 0)$  y  $(4, 1) \rightarrow y = \frac{1}{4}x$ . La región de puntos contiene al punto  $(0, -1)$ , por lo que la inecuación es  $x \geq 4y$ .
- c) Recta que pasa por  $(0, 2)$  y  $(-4, 0) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$ . La región de puntos contiene al punto  $(0, 0)$ , por lo que la inecuación es  $2y \leq x + 4$ .
- d) Recta que pasa por  $(1, 1)$  y  $(0, -1) \rightarrow y = 2x - 1$ . La región de puntos no contiene al punto  $(0, 0)$ , por lo que la inecuación es  $y \leq 2x - 1$ .

# Programación lineal

034 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 6 \\ y \leq 4 \end{array} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 6 \end{array} \right\}$$

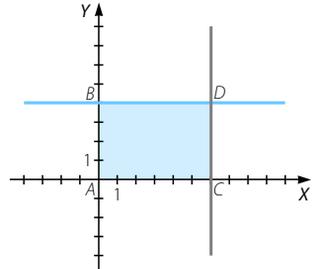
$$\text{e) } \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2y - x \leq 4 \\ x + y \geq 8 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x \geq 2 \\ y \geq 3 \\ x \leq 5 \\ y \leq 5 \end{array} \right\}$$

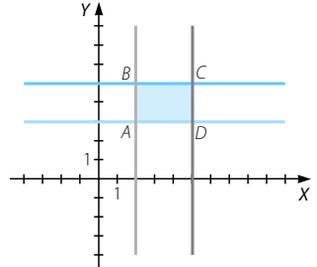
$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 4y \leq 12 \\ x - 5y \geq 10 \end{array} \right\}$$

$$\text{f) } \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x + 3y \geq 0 \\ x - y \leq 7 \end{array} \right\}$$

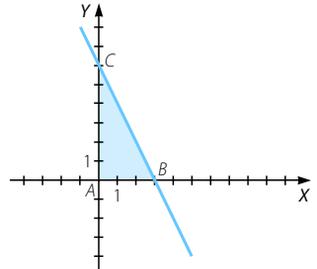
a) El sistema de inecuaciones tiene como solución la región del plano que tiene como vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(0, 4)$ ;  $C(6, 0)$  y  $D(6, 4)$ . Los segmentos de recta que unen los vértices forman parte de la solución.



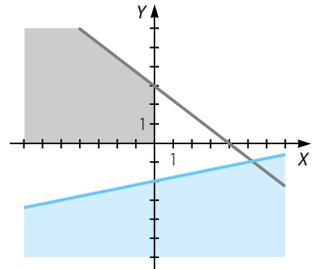
b) El sistema de inecuaciones tiene como solución la región del plano que tiene como vértices  $A(2, 3)$ ;  $B(2, 5)$ ;  $C(5, 5)$  y  $D(5, 3)$ . Los segmentos de recta que unen los vértices forman parte de la solución.



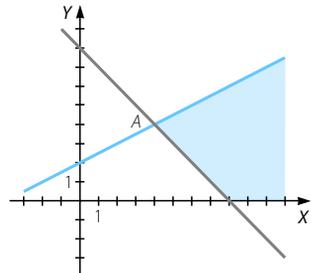
c) El sistema de inecuaciones tiene como solución la región del plano que tiene como vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(3, 0)$  y  $C(6, 0)$ . Los segmentos de recta que unen los vértices forman parte de la solución.



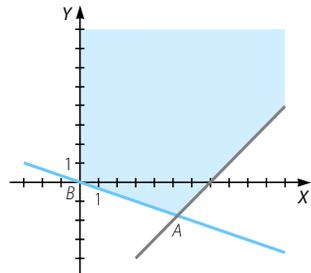
d) Como  $x \leq 0$  e  $y \geq 0$ , estamos en el segundo cuadrante. Y como  $3x + 4y \leq 12$  y  $x - 5y \geq 10$  no tienen puntos comunes en este cuadrante, resulta que el sistema de inecuaciones no tiene solución.



- e) El sistema de inecuaciones tiene como solución la región del plano formada por los puntos del primer cuadrante situados en la parte inferior de  $2x - y = 4$  y la parte superior de  $x + y = 8$ . El punto  $A$ , intersección de ambas rectas, es  $(4, 4)$ . Los segmentos de recta también forman parte de la solución.



- f) El sistema de inecuaciones tiene como solución la región de puntos no acotada superiormente limitada por la recta  $x = 0$  e inferiormente por las rectas  $x + 3y = 0$  y  $x - y = 7$ . Los vértices son  $A\left(\frac{21}{4}, \frac{7}{4}\right)$  y  $B(0, 0)$ . Los segmentos de recta también forman parte de la solución.

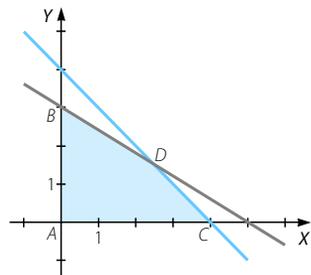


035 Halla las regiones del plano determinadas por los sistemas de inecuaciones, e indica en cada caso si son acotadas o no.

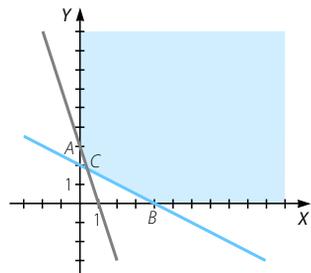
$$\left. \begin{array}{l} a) \ x \geq 0 \\ \quad y \geq 0 \\ \quad 3x + 5y \leq 15 \\ \quad x + y \leq 4 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} b) \ x \geq 0 \\ \quad y \geq 0 \\ \quad 3x + y \geq 3 \\ \quad x + 2y \geq 4 \end{array} \right\}$$

- a) La región del plano que se obtiene está acotada y tiene como vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(0, 3)$ ;  $C(4, 0)$  y  $D\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ , que es la intersección de las rectas  $3x + 5y = 15$  y  $x + y = 4$ . Los segmentos de recta que unen los vértices también forman parte de la región.



- b) La región del plano que se obtiene no está acotada superiormente y tiene como vértices  $A(0, 3)$ ;  $B(4, 0)$  y  $C\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$ , que es el punto intersección de las rectas  $3x + y = 3$ ;  $x + 2y = 4$ . Los segmentos de recta que delimitan la región también forman parte de ella.



# Programación lineal

- 036 Representa gráficamente la región determinada por este sistema de inecuaciones. ¿Sobra alguna inecuación?

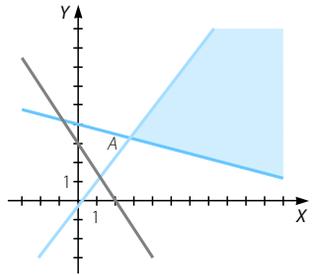
$$\left. \begin{aligned} x + 4y &\geq 16 \\ 9x - 7y &\geq 2 \\ 3x + 2y &\geq 6 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

La solución no está acotada por la derecha

y tiene un único vértice:  $A\left(\frac{120}{43}, \frac{142}{43}\right)$ ,

que es la intersección de las rectas  $x + 4y = 16$  y  $9x - 7y = 2$ . Está limitada superiormente por la recta  $9x - 7y = 2$  e inferiormente por la recta  $x + 4y = 16$ . Los segmentos de recta que delimitan la región también forman parte de ella.

La inecuación  $3x + 2y \geq 6$  no influye en la solución.

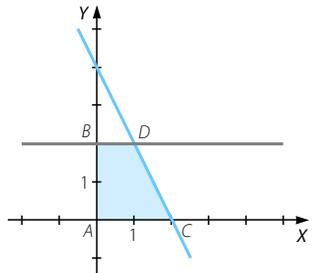


- 037 Dibuja la región del plano definida por las siguientes

$$\left. \begin{aligned} x &\geq 0 \\ \text{inecuaciones: } 0 &\leq y \leq 2 \\ y + 2x &\leq 4 \end{aligned} \right\}$$

(La Rioja. Septiembre 2005. Parte A. Cuestión 2)

La solución viene dada por la región del plano limitada por los vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(0, 2)$ ;  $C(2, 0)$  y  $D(1, 2)$ . Los segmentos de recta que unen estos vértices también forman parte de la solución.



- 038 Representa la región solución del siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{aligned} 3x - 2y &\leq 3 \\ x + y &\leq -1 \end{aligned} \right.$$

Determina tres puntos de abscisa  $x = -2$  y ordenada entera que sean solución del sistema.

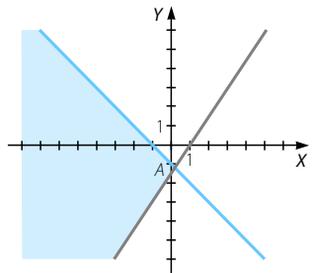
(Cataluña. Año 2006. Serie 3. Cuestión 1)

La solución no está acotada por la izquierda

y tiene un único vértice:  $A\left(\frac{1}{5}, \frac{-6}{5}\right)$ , que es

la intersección de las rectas  $3x - 2y = 3$  y  $x + y = -1$ . Está limitada superiormente por la recta  $x + y = -1$  e inferiormente por la recta  $3x - 2y = 3$ . Los segmentos de recta también forman parte de la región.

Tres puntos de abscisa  $x = -2$  y ordenada entera son:  $(-2, -1)$ ;  $(-2, -2)$  y  $(-2, -3)$ .



039 Considere el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ x + y \geq 5 \\ x - 5y \leq 0 \end{cases}$$

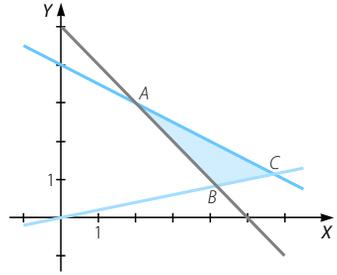
- a) Resuélvalo gráficamente.  
b) Halle todas las soluciones enteras.

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 3)

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \rightarrow A(2, 3)$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \rightarrow B\left(\frac{25}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{40}{7}, \frac{8}{7}\right)$$

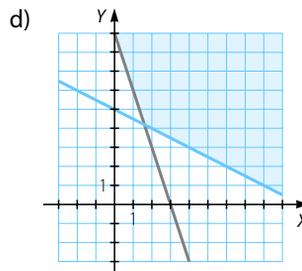
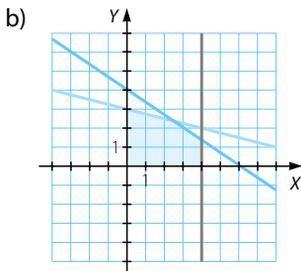
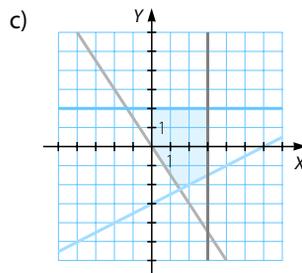
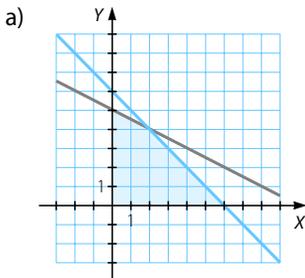


La solución del sistema de inecuaciones es la región del plano limitada por los vértices A, B y C.

Los segmentos de recta que unen los vértices también forman parte de la región.

- b) Las soluciones enteras de este sistema son (4, 1); (3, 2); (2, 3); (4, 2) y (5, 1).

040 Determina un sistema de inecuaciones para cada solución representada en estas gráficas.



# Programación lineal

- a) Las ecuaciones de ambas rectas son  $x + y = 6$  y  $x + 2y = 10$ . El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Las ecuaciones de las tres rectas son  $x = 4$ ;  $x + 4y = 12$  y  $3y + 2x = 12$ . El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y \leq 12 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$$

- c) Las ecuaciones de las cuatro rectas son  $x = 3$ ;  $y = 2$ ;  $x - 2y = 6$  y  $2y + 3x = 0$ . El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 3 \\ 2 \geq y \\ x - 2y \leq 6 \\ 2y + 3x \geq 0 \end{array} \right\}$$

- d) Las ecuaciones de las dos rectas son  $3x + y = 9$  y  $x + 2y = 10$ . El sistema de inecuaciones que da lugar a la región sombreada es:

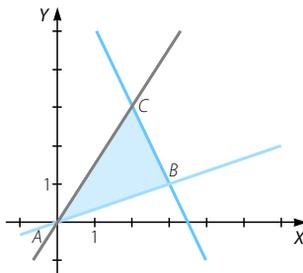
$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \geq 9 \\ x + 2y \geq 10 \end{array} \right\}$$

041 Determina un sistema de inecuaciones que tenga como conjunto de soluciones el interior y los lados del triángulo del plano de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 3)$  y  $(3, 1)$ .

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 4)

- Recta que pasa por  $(0, 0)$  y  $(2, 3) \rightarrow 3x - 2y = 0$
- Recta que pasa por  $(0, 0)$  y  $(3, 1) \rightarrow x - 3y = 0$
- Recta que pasa por  $(3, 1)$  y  $(2, 3) \rightarrow 2x + y = 7$

La región factible dada por el triángulo es:



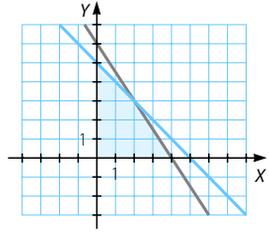
El sistema de inecuaciones que da lugar a la región factible es:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 7 \\ x - 3y \leq 0 \\ 3x - 2y \geq 0 \end{array} \right\}$$

042 Considera la siguiente región factible.

Halla los puntos en los que las funciones toman sus valores máximos.

- a)  $f(x, y) = 3x + y$   
 b)  $f(x, y) = x + 2y - 1$   
 c)  $f(x, y) = 3x + 2y - 1$



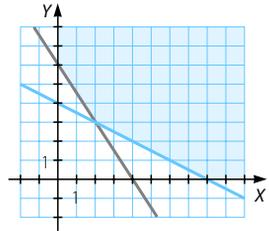
La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(4, 0)$ ;  $C(2, 3)$  y  $D(0, 5)$ .

- a) Como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 12$ ;  $f(C) = 9$  y  $f(D) = 5$ , el máximo se alcanza en el punto  $B$  y vale 12.  
 b) Como  $f(A) = -1$ ;  $f(B) = 3$ ;  $f(C) = 7$  y  $f(D) = 9$ , el máximo se alcanza en el punto  $D$  y vale 9.  
 c) Como  $f(A) = -1$ ;  $f(B) = 11$ ;  $f(C) = 11$  y  $f(D) = 9$ , el máximo se alcanza en los puntos  $B$  y  $C$  y en todos los del segmento  $BC$  y vale 11.

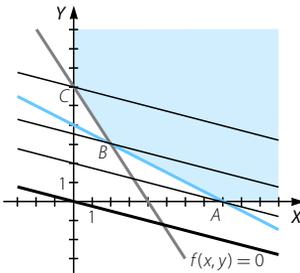
043 Calcula los puntos de la región donde se alcanza el valor mínimo de estas funciones.

- a)  $f(x, y) = x + 4y$   
 b)  $f(x, y) = x + y + 4$

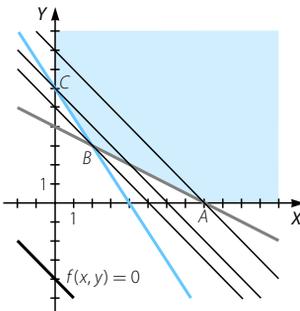
La región factible no está acotada y tiene como vértices  $A(8, 0)$ ;  $B(2, 3)$  y  $C(0, 6)$ .



- a) Trazando paralelas a la función objetivo  $f(x, y) = x + 4y$ , que pasen por los vértices, vemos que el mínimo se alcanza en  $A(8, 0)$  y vale 8.



- b) Trazando paralelas a la función objetivo  $f(x, y) = x + y + 4$ , que pasen por los vértices, vemos que el mínimo se alcanza en  $B(2, 3)$  y vale 9.



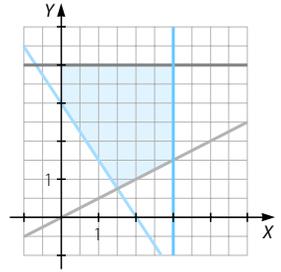
# Programación lineal

044 Dada la región factible, determina el máximo y el mínimo de las siguientes funciones.

- a)  $f(x, y) = 2x + y$   
 b)  $f(x, y) = 3x + 2y - 3$

La región factible está acotada y tiene como

vértices  $A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ ;  $B\left(3, \frac{3}{2}\right)$ ;  $C(3, 4)$ ;  $D(0, 4)$  y  $E(0, 3)$ .



- a) Sustituyendo los vértices en la función objetivo, obtenemos que  $f(A) = \frac{15}{4}$ ;  $f(B) = \frac{15}{2}$ ;  $f(C) = 10$ ;  $f(D) = 4$  y  $f(E) = 3$ , por lo que el máximo se alcanza en  $C$  y vale 10, y el mínimo se alcanza en  $E$  y vale 3.
- b) Sustituyendo los vértices en la función objetivo, obtenemos que  $f(A) = 3$ ;  $f(B) = 9$ ;  $f(C) = 14$ ;  $f(D) = 5$  y  $f(E) = 3$ , por lo que el máximo se alcanza en  $C$  y vale 14, y el mínimo se alcanza en  $A$  y  $E$  y, por tanto, en todos los puntos del segmento  $AE$ , y vale 3.

045 a) Representa gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones:  
 $2x + y \leq 6$      $-x + y \leq 3$      $4x + y \leq 10$      $x \geq 0$      $y \geq 0$   
 y determina sus vértices.

b) Calcula el máximo de la función  $f(x, y) = 4x + 2y - 3$  en el recinto anterior e indica dónde se alcanza.

(Andalucía. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 1)

a) Región factible acotada con estos vértices:

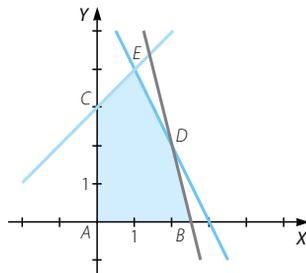
$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow A(0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y = 10 \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow B\left(\frac{10}{4}, 0\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ -x + y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow C(0, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 6 \\ 4x + y = 10 \end{array} \right\} \rightarrow D(2, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} -x + y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{array} \right\} \rightarrow E(1, 4)$$



- b) Como la región factible está acotada, el máximo de la función  $f(x, y) = 4x + 2y - 3$  se alcanza en uno de sus vértices. Y como  $f(A) = -3$ ;  $f(B) = 7$ ;  $f(C) = 3$ ;  $f(D) = 9$  y  $f(E) = 9$ , el máximo se alcanza en los vértices  $D$  y  $E$ , y, por tanto, en todos los puntos del segmento  $DE$ , y vale 9.

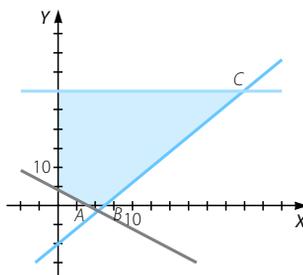
046 De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

$$4x + 3y \geq 12 \quad y \leq 30 \quad x \leq \frac{10+y}{2} \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

- a) Representa gráficamente la región factible del problema y calcula sus vértices.  
 b) Maximiza en esa región factible la función objetivo  $F(x, y) = x + 3y$ .  
 c) ¿Pertenece el punto  $(11, 10)$  a la región factible?

(Andalucía. Año 2007. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 1)

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left. \begin{aligned} 4x + 3y = 12 \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A(3, 0) \\ & \left. \begin{aligned} 2x = 10 + y \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow B(5, 0) \\ & \left. \begin{aligned} 2x = 10 + y \\ y = 30 \end{aligned} \right\} \rightarrow C(20, 30) \\ & \left. \begin{aligned} y = 30 \\ x = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow D(0, 30) \\ & \left. \begin{aligned} 4x + 3y = 12 \\ x = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow E(0, 4) \end{aligned}$$



- b) El máximo de la función objetivo  $F(x, y) = x + 3y$  se alcanza en uno de los vértices. Como  $F(A) = 3$ ;  $F(B) = 5$ ;  $F(C) = 110$ ;  $F(D) = 90$  y  $F(E) = 12$ , el máximo se alcanza en C y tiene un valor de 110.  
 c) El punto  $(11, 10)$  no pertenece a la región factible.

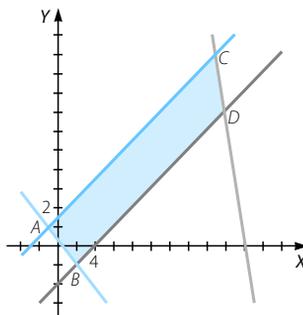
047 a) Halla los vértices de la región determinada por las siguientes inecuaciones:

$$3x + y \leq 60 \quad x - 2y \geq -3 \quad y \geq \frac{x}{2} - 2 \quad 2x + 3y \geq 1$$

- b) Calcula los puntos de la región donde la función  $f(x, y) = 3x - 2y$  alcanza los valores máximo y mínimo y determina estos.

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Ejercicio A. Problema 2)

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left. \begin{aligned} x - 2y = -3 \\ 2x + 3y = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow A(-1, 1) \\ & \left. \begin{aligned} 2y = x - 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow B(2, -1) \\ & \left. \begin{aligned} x - 2y = -3 \\ 3x + y = 60 \end{aligned} \right\} \rightarrow C\left(\frac{117}{7}, \frac{69}{7}\right) \\ & \left. \begin{aligned} x - 2y = -3 \\ 3x + y = 60 \end{aligned} \right\} \rightarrow D\left(\frac{124}{7}, \frac{48}{7}\right) \end{aligned}$$



- b) Como la región está acotada, el máximo y el mínimo de la función  $f(x, y) = 3x - 2y$  se alcanzan en los vértices.

Y como  $f(A) = -5$ ;  $f(B) = 8$ ;  $f(C) = \frac{213}{7}$  y  $f(D) = \frac{276}{7}$ , el máximo se alcanza en D y su valor es  $\frac{276}{7}$ , y el mínimo se alcanza en A y su valor es  $-5$ .

# Programación lineal

048 Determina los valores máximo y mínimo de la función  $z = 5x + 3y$  sujeta a las restricciones:

$$3x + y \geq 4 \quad x + y \leq 6 \quad 0 \leq y \leq 5 \quad x \leq 5$$

(Madrid. Septiembre 2003. Opción B. Ejercicio 1)

La región factible está acotada y tiene como vértices:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 5 \end{cases} \rightarrow B(5, 0)$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x = 5 \end{cases} \rightarrow C(5, 1)$$

$$\begin{cases} y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases} \rightarrow D(1, 5)$$

$$\begin{cases} y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \rightarrow E\left(-\frac{1}{3}, 5\right)$$

$$f(A) = \frac{20}{3}$$

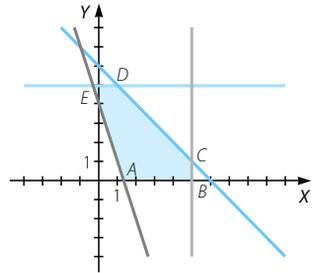
$$f(B) = 15$$

$$f(C) = 28$$

$$f(D) = 18$$

$$f(E) = \frac{40}{3}$$

El mínimo se alcanza en el vértice  $A$  y su valor es  $\frac{20}{3}$ , y el máximo se alcanza en el vértice  $C$  y su valor es 28.



049 Considera el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente la región factible.

b) Calcula el máximo de la función  $f(x, y) = x - 3y$  en dicha región.

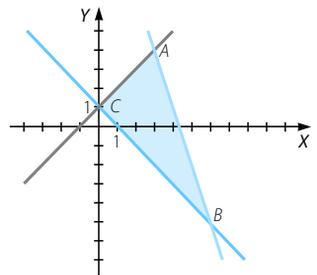
(Cataluña. Septiembre 2007. Cuestión 3)

a) La región factible está acotada y tiene como vértices los puntos:

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow A(3, 4)$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 13 \end{cases} \rightarrow B(6, -5)$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow C(0, 1)$$



b) Sustituimos los vértices en la función objetivo:  $f(A) = -9$ ;  $f(B) = 21$  y  $f(C) = -3$ . El máximo se alcanza en el vértice  $B(6, -5)$  y su valor es 21.

- 050 Se desea minimizar la función lineal  $3x + 4y + 2(10 - x) + 3(18 - y)$  con las restricciones:

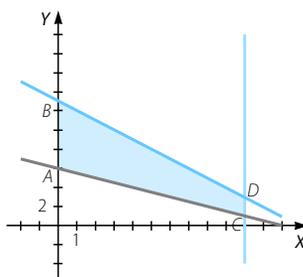
$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad 10 - x \geq 0 \quad 18 - y \geq 0 \\ x + y \leq 13 \quad (10 - x) + (18 - 2y) \leq 16 \end{aligned}$$

Se pide:

- Representación gráfica del conjunto factible.
- Hallar las coordenadas de todos sus vértices.
- Hallar todas las soluciones óptimas.

(Cantabria. Junio 2007. Ejercicio 1. Opción A)

- $(10 - x) + (18 - 2y) = 16 \rightarrow x + 2y = 12$
- Los vértices son  $A(0, 6)$ ;  $B(0, 13)$ ;  $C(10, 1)$  y  $D(10, 3)$ .
- Como la región factible está acotada, la función objetivo alcanza sus soluciones óptimas en los vértices. Y como  $f(A) = 80$ ;  $f(B) = 87$ ;  $f(C) = 85$  y  $f(D) = 87$ , el mínimo se alcanza en  $A$ , y su valor es 80, y el máximo se alcanza en  $B$  y  $D$ , y por tanto, en todos los puntos del segmento  $BD$ , y su valor es 87.



- 051 Consideramos el recinto plano limitado por las siguientes inecuaciones:

$$x - y \leq 4 \quad y + 2x \geq 7 \quad -2x - y + 13 \geq 0 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

- Representa el recinto y calcula los vértices.
- Halla en qué puntos de ese recinto alcanza los valores máximo y mínimo la función  $F(x, y) = 4x + 2y - 1$ .

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 1)

- La región factible está acotada y tiene como vértices:

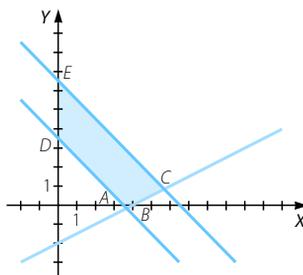
$$\left. \begin{aligned} y + 2x = 7 \\ y = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A\left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

$$\left. \begin{aligned} y = 0 \\ x - y = 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow B(4, 0)$$

$$\left. \begin{aligned} -2x - y + 13 = 0 \\ x - y = 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow C\left(\frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} x = 0 \\ y + 2x = 7 \end{aligned} \right\} \rightarrow D(0, 7)$$

$$\left. \begin{aligned} x = 0 \\ -2x - y + 13 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow E(0, 13)$$



- Como la región está acotada, las soluciones óptimas se alcanzan en los vértices. Y como  $f(A) = 13$ ;  $f(B) = 15$ ;  $f(C) = 25$ ;  $f(D) = 13$  y  $f(E) = 25$ , el máximo se alcanza en  $C$  y  $E$ , y por tanto, en todos los puntos del segmento  $CE$ , y su valor es 25, y el mínimo se alcanza en los vértices  $D$  y  $A$ , y por tanto, en todos los puntos del segmento  $DA$ , y su valor es 13.

# Programación lineal

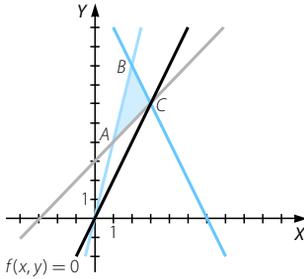
052 Representar el recinto definido por las inecuaciones:

$$0 \leq y \leq 4x \quad y \geq x + 3 \quad y + 2x - 12 \leq 0$$

y hallar los valores máximo y mínimo de la función  $F(x, y) = y - 2x$  en dicho recinto.

(País Vasco. Septiembre 2006. Apartado A. Ejercicio 2)

La región está acotada por las rectas  $y = 4x$ ;  $y = x + 3$ ;  $y + 2x - 12 = 0$ , y tiene como vértices  $A(1, 4)$ ;  $B(2, 8)$  y  $C(3, 6)$ .



Como  $f(A) = 2$ ;  $f(B) = 4$  y  $f(C) = 0$ , el máximo se alcanza en  $B$  y vale 4, y el mínimo se alcanza en  $C$  y vale 0.

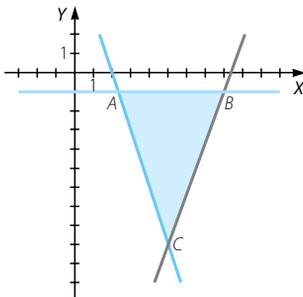
053 Sean  $T = \{(x, y) / y + 3x \geq 6, y + 1 \leq 0, 8x - 3y \leq 67\}$  y  $f(x, y) = 3y - 8x$ .

a) Representa gráficamente la región  $T$ .

b) Calcula el valor máximo y el mínimo, si existen, de la función  $f(x, y)$  en  $T$  y di en qué puntos se alcanzan.

(Aragón. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 1)

a) La región  $T$  está acotada por las rectas  $y + 3x = 6$ ;  $y + 1 = 0$ ;  $8x - 3y = 67$ , y tiene como vértices  $A\left(\frac{7}{3}, -1\right)$ ;  $B(8, -1)$  y  $C(5, -9)$ . Los segmentos de recta que unen los vértices, también forman parte de la solución.



b) Como la región factible está acotada, el máximo y el mínimo de la función objetivo se alcanzan en los vértices. Y como  $f(A) = \frac{47}{3}$ ;  $f(B) = -67$  y  $f(C) = -67$ , el máximo se alcanza en el vértice  $A$ , siendo su valor  $\frac{47}{3}$ , y el mínimo se alcanza en los vértices  $B$  y  $C$ , y por tanto, en todos los puntos del segmento  $BC$ , y su valor es  $-67$ .

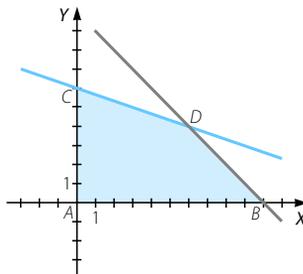
054 Considera el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 18 \\ x + y \leq 10 \end{array} \right\}$$

- Representa gráficamente la región de soluciones.
- Determina el máximo de la función  $f(x, y) = 3x + 5y$  en dicha región y para qué valores se alcanza dicho máximo.
- Determina el máximo de la función  $f(x, y) = 3x + 3y$  en dicha región y para qué valores se alcanza.

(Cataluña. Junio 2008. Cuestión 1)

- Se trata de una región acotada, limitada por las rectas  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x + 3y = 18$ ;  $x + y = 10$ , cuyos vértices son  $A(0, 0)$ ;  $B(10, 0)$ ;  $C(0, 6)$  y  $D(6, 4)$ . Los puntos de los segmentos de recta que unen los vértices, pertenecen a la solución del sistema de inecuaciones.



- Como la región factible está acotada, el máximo de la función objetivo  $f(x, y) = 3x + 5y$  se alcanza en uno de los vértices. Y como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 30$ ;  $f(C) = 30$  y  $f(D) = 38$ , el máximo se alcanza en  $D$  y su valor es 38.
- Al igual que en el apartado anterior, la región factible está acotada. Como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 30$ ;  $f(C) = 18$  y  $f(D) = 30$ , el máximo se alcanza en los puntos  $B$  y  $D$ , y, por tanto, en todos los puntos del segmento  $BD$ . Su valor es 33.

055 Se considera la función  $f(x, y) = x - y$ .

- Representa el conjunto:

$$A = \{(x, y) / 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 60, y \geq 0\}$$

y calcula el valor máximo de  $f(x, y)$  en  $A$ . ¿Alguna de las desigualdades que definen al conjunto  $A$  se podría eliminar de forma que siguiera siendo el mismo conjunto?

- Di si la función  $f(x, y)$  alcanza valor máximo en el conjunto:

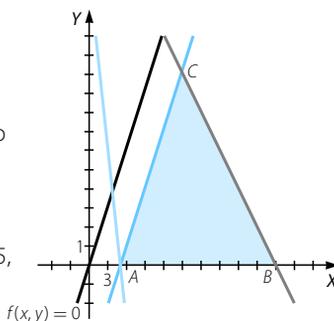
$$B = \{(x, y) / 3x + y \leq 15, x - y \geq 5, x \geq 0\}$$

En caso afirmativo calcula dicho valor.

(Aragón. Junio 2004. Opción B. Cuestión 1)

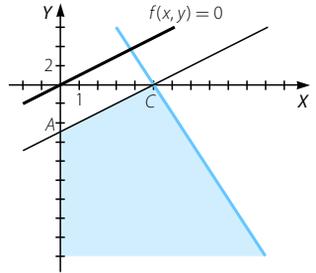
- El conjunto  $A$  está acotado y tiene como vértices  $B(30, 0)$ ;  $C(15, 10)$  y  $D(5, 0)$ . La función  $f(x, y) = x - y$  alcanza su máximo en alguno de los vértices. Como  $f(B) = 30$ ;  $f(C) = 5$  y  $f(D) = 5$ , el máximo se alcanza en  $B$  y vale 30.

Podemos eliminar la inecuación  $3x + y \geq 15$ , de modo que seguiremos teniendo el mismo conjunto.



# Programación lineal

- b) El conjunto  $B$  no está acotado y tiene como vértices  $A(0, -5)$  y  $C(5, 0)$ . Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por estos vértices, se tiene que la recta  $x - y = 5$  pasa por  $A$  y  $C$ , obteniéndose en ellos el valor mínimo. Por tanto, la función objetivo no alcanza el máximo en el conjunto  $B$ .



056

En un problema de programación lineal, la región de soluciones es el cuadrado de vértices  $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(3, 3)$  y  $(3, 1)$ , y la función objetivo es  $B(x, y) = 3x + 2y$ .

- a) Determina en qué punto es máxima la función objetivo y cuál es este valor máximo.  
 b) Da un conjunto de inecuaciones que determine la región de soluciones.

*(Cataluña. Junio 2008. Cuestión 3)*

- a) Como el cuadrado es una región acotada, la función objetivo alcanzará los extremos en los vértices. Y como  $B(1, 1) = 5$ ;  $B(1, 3) = 9$ ;  $B(3, 3) = 15$  y  $B(3, 1) = 11$ , el máximo se alcanza en el vértice  $(3, 3)$  y vale 15.  
 b) Las rectas que delimitan un cuadrado de vértices  $(1, 1)$ ;  $(1, 3)$ ;  $(3, 3)$  y  $(3, 1)$ , son  $x = 1$ ;  $y = 1$ ;  $x = 3$  e  $y = 3$ .

El sistema de inecuaciones que da lugar a la región interna

$$\text{del cuadrado es: } \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

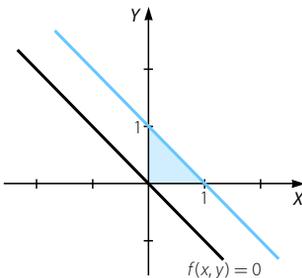
057

En un problema de programación lineal la región factible es el conjunto convexo formado por el triángulo de vértices:  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$ . La función objetivo es paralela a la recta  $x + y = 0$ . Halla los puntos en los que la función objetivo alcanza:

- a) El mínimo. b) El máximo.

*(Cataluña. Año 2006. Serie 3. Cuestión 2)*

El triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  está limitado por las rectas  $x = 0$ ;  $y = 0$  y  $x + y = 1$ .



Trazando paralelas a  $x + y = 0$  que pasen por los vértices, obtenemos que el mínimo se alcanza en  $(0, 0)$  y vale 0, y el máximo se alcanza en todos los puntos del segmento que une  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  y vale 1.

058 Sea la función  $f(x, y) = ax + by$ . Si se consideran las siguientes restricciones:

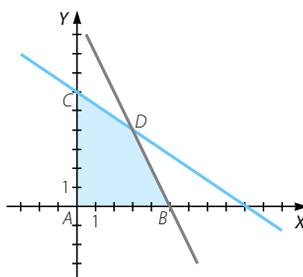
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 18 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

determina la relación que tiene que existir entre  $a$  y  $b$  para que el máximo de la función  $f(x, y)$  se alcance en el punto  $(3, 4)$ .

La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(5, 0)$ ;  $C(0, 6)$  y  $D(3, 4)$ .

Como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 5a$ ;  $f(C) = 6b$  y  $f(D) = 3a + 4b$ , y situamos el máximo en  $D$ , tiene que ocurrir:

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 4b \geq 0 \\ 3a + 4b \geq 5a \\ 3a + 4b \geq 6b \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3a \geq -4b \\ 4b \geq 2a \\ 3a \geq 2b \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2b \geq a \\ 3a \geq 2b \end{array} \right\} \\ \rightarrow 3a \geq 2b \geq a$$

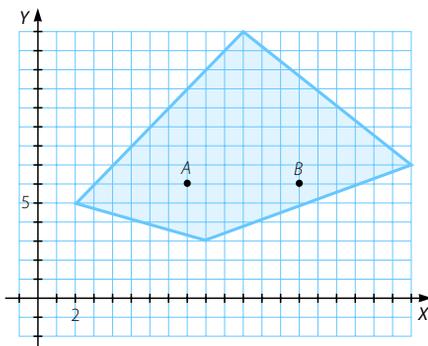


que es la relación pedida para  $a$  y  $b$  como parámetros positivos.

Los siguientes casos no se pueden producir:

- $a$  y  $b$  no pueden ser 0, ya que no obtendríamos una función de la forma  $ax + by$ .
- $a$  y  $b$  no pueden tener signos opuestos, porque la función objetivo no alcanzaría su máximo en  $D$ .
- $a$  y  $b$  no pueden ser ambos negativos, pues no se cumpliría la primera de las restricciones anteriores.

059 La función objetivo de un problema de programación lineal es  $f(x, y) = ax - by + c$ , donde  $a, b, c$  son números positivos. Averigua en cuál de los dos puntos  $A$  o  $B$  del gráfico la función objetivo toma un valor mayor. Razona la respuesta.



(Cataluña. Junio 2006. Cuestión 4)

Como la función objetivo es  $f(x, y) = ax - by + c$ , con  $a, b$  y  $c$  números positivos, si sustituimos los puntos  $A(8, 6)$  y  $B(14, 6)$ , vemos que el máximo se alcanza en  $B$ .

# Programación lineal

060

En un concurso el premio consiste en un cheque de 240 € para gastar en libros y juegos. Los libros cuestan 8 € y los juegos 24 €. La organización establece la condición de que el número de libros que el ganador compre no puede superar al doble del número de juegos.



- Plantea un sistema de inecuaciones con las restricciones y representa la región factible.
- Determina razonadamente si el ganador podría comprar 12 libros y 6 juegos.
- ¿Podría adquirir 7 libros y 7 juegos? En el caso de que le sobre dinero, ¿cuánto es?

a)  $x \rightarrow$  n.º de libros     $y \rightarrow$  n.º de juegos

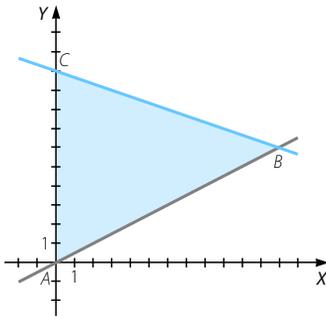
	Libros	Juegos	Total
Coste (€)	8	24	240

$\rightarrow 8x + 24y \leq 240$

El sistema de inecuaciones que hay que resolver es:

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 24y \leq 240 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La región factible está acotada y sus vértices son  $A(0, 0)$ ;  $B(12, 6)$  y  $C(0, 10)$ .



- Los vértices pertenecen a la región factible, porque en las inecuaciones se da la igualdad. El punto  $B$  representa 12 libros y 6 juegos, por lo que el ganador sí los podrá comprar.
- Sí podrá comprar 7 libros y 7 juegos, porque el punto  $(7, 7)$  pertenece a la región factible. El coste será de 224 € y le sobrarán 16 €.

061

Una empresa posee dos centros de producción. Uno genera diariamente 1 tonelada de material altamente radiactivo, 3 con radiación media y 5 de radiación baja. El otro centro genera cada día 2 toneladas de cada tipo. La empresa debe reciclar, al menos, 80 toneladas de material altamente radiactivo, 160 de radiación media y 200 del que la emite baja. Si el coste diario de la operación es de 20.000 € en cada centro, ¿cuántos días debe realizarse para que el coste de la operación sea mínimo?

$x \rightarrow$  n.º de días que debe reciclar el primer centro de producción

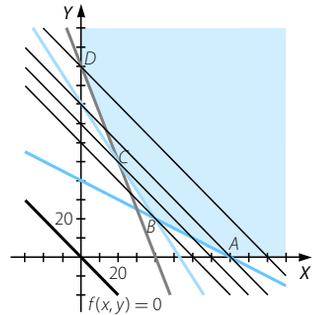
$y \rightarrow$  n.º de días que debe reciclar el segundo centro de producción

	Primer centro	Segundo centro	Total reciclado	
Radiación alta (toneladas)	1	2	80	$\rightarrow x + 2y \geq 80$
Radiación media (toneladas)	3	2	160	$\rightarrow 3x + 2y \geq 160$
Radiación baja (toneladas)	5	2	200	$\rightarrow 5x + 2y \geq 200$
Coste diario (€)	20.000	20.000		$\rightarrow f(x, y) = 20.000x + 20.000y$ $\rightarrow$ Función objetivo

Minimizar  $f(x, y) = 20.000x + 20.000y$

Sujeto a  $\left. \begin{aligned} x + 2y &\geq 80 \\ 3x + 2y &\geq 160 \\ 5x + 2y &\geq 200 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \right\}$

La región factible no está acotada y tiene como vértices  $A(80, 0)$ ;  $B(40, 20)$ ;  $C(20, 50)$  y  $D(0, 100)$ . Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, observamos que el mínimo se alcanza en  $B$  y vale 1.200.000 €.



Para que el coste del reciclaje sea el menor posible, el primer centro de producción debe trabajar 40 días, y el segundo, 20 días.

062

Disponemos de 105.000 € para invertir en dos tipos de acciones:  $A$  y  $B$ . Las de tipo  $A$  tienen un interés anual del 8% y las de tipo  $B$  del 7%. Si invierto como máximo 65.000 € en las de tipo  $A$ , como mínimo 3.000 € en las de tipo  $B$  y quiero que la inversión en las de tipo  $A$  sea, al menos, igual a la inversión en las de tipo  $B$ , ¿cuál es la distribución con la que mayor beneficio obtengo?

$x \rightarrow$  Dinero invertido en  $A$        $y \rightarrow$  Dinero invertido en  $B$

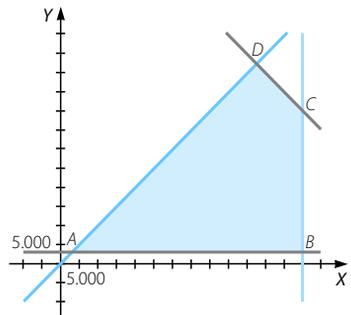
	Tipo A	Tipo B	
Interés anual (%)	0,08	0,07	$\rightarrow f(x, y) = 0,08x + 0,07y \rightarrow$ Función objetivo

Maximizar  $f(x, y) = 0,08x + 0,07y$

Sujeto a  $\left. \begin{aligned} 0 \leq x &\leq 65.000 \\ y &\geq 3.000 \\ x &\geq y \\ x + y &\leq 105.000 \end{aligned} \right\}$

La región factible está acotada con vértices en  $A(3.000, 3.000)$ ;  $B(65.000, 3.000)$ ;  $C(65.000, 40.000)$  y  $D(52.500, 52.500)$ .

Como  $f(A) = 450$ ;  $f(B) = 5.410$ ;  $f(C) = 8.000$  y  $f(D) = 7.875$ , el máximo se alcanza en  $C$ .



Debemos invertir 65.000 € en las acciones de tipo  $A$  y 3.000 € en las acciones de tipo  $B$ . Obtendremos 8.000 €.

# Programación lineal

- 063 Un circo ha montado una carpa con una capacidad para 1.500 personas, entre adultos y niños; el número de niños no puede superar los 600 y el número de adultos no puede superar al doble del número de niños.



Si el precio de la entrada de adultos es de 8 €, y el de niños es un 40% menos, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por las entradas?

$x \rightarrow$  n.º de entradas de adulto       $y \rightarrow$  n.º de entradas de niño

	Adultos	Niños
Precio (€)	8	4,80

$\rightarrow f(x, y) = 8x + 4,80y \rightarrow$  Función objetivo

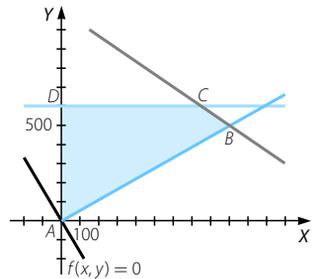
Maximizar  $f(x, y) = 8x + 4,80y$

Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2y \\ 0 \leq y \leq 600 \\ x + y \leq 1.500 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada con vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(1.000, 500)$ ;  $C(900, 600)$  y  $D(0, 600)$ .

Como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 10.400$ ;  $f(C) = 10.080$  y  $f(D) = 2.880$ , el máximo se alcanza en  $B$ .

Para maximizar el dinero recaudado con las entradas se deben vender 1.000 entradas de adulto y 500 entradas de niño, obteniéndose 10.400 €.



- 064 Una empresa fabrica dos modelos de guantes: un modelo normal y un modelo de lujo. La empresa tiene 900 horas disponibles en su departamento de corte y costura, 300 horas en el departamento de terminado y 100 horas disponibles en el departamento de empaquetado. Las horas necesarias de cada departamento por par de guantes y sus beneficios, en euros, se dan en la siguiente tabla:

	Corte y costura	Terminado	Empaquetado	Beneficios
Normal	1	1/2	1/8	4
De lujo	3/2	1/3	1/4	8

¿Cuántos pares de cada modelo debe fabricar para maximizar el beneficio?

(Navarra. Septiembre 2004. Ejercicio 1. Opción B)

$x \rightarrow$  n.º de pares de guantes del modelo normal

$y \rightarrow$  n.º de pares de guantes del modelo de lujo

	Modelo normal	Modelo de lujo	Horas	
Departamento de coste y costura	1	$\frac{3}{2}$	900	$\rightarrow x + \frac{3}{2}y \leq 900$
Departamento de terminado	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	300	$\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 300$
Departamento de empaquetado	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	100	$\rightarrow \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \leq 100$
Beneficios (€)	4	8		$\rightarrow f(x, y) = 4x + 8y$ $\rightarrow$ Función objetivo

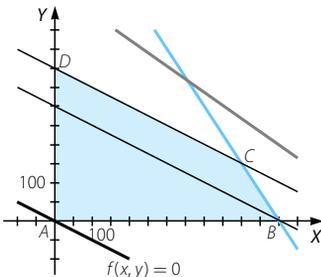
Maximizar  $f(x, y) = 4x + 8y$

$$\text{Sujeto a } \left. \begin{array}{l} x + \frac{3}{2}y \leq 900 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 300 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La región factible está acotada con vértices:

$A(0, 0)$ ;  $B(600, 0)$ ;  $C(500, 150)$  y  $D(0, 400)$ .

Trazando paralelas a la función objetivo, tenemos que el máximo se obtiene en el segmento  $DC$ .



Como son pares de guantes, solo valen los puntos cuyas coordenadas sean enteras, es decir, los puntos cuyas coordenadas sean de la forma  $\left(x, \frac{800-x}{2}\right)$ , con  $0 \leq x \leq 500$  y  $x$  un número par.

El beneficio es de 3.200 €.

# Programación lineal

065

En Navidad un colmado quiere preparar dos tipos de lotes,  $L_1$  y  $L_2$ . Cada lote del tipo  $L_1$  está formado por 4 barras de turrón, 2 botellas de cava y 2 paquetes de café, y cada lote del tipo  $L_2$  está formado por 2 barras de turrón, 2 botellas de cava y 4 paquetes de café. Con cada lote del tipo  $L_1$  se obtiene un beneficio de 4,50 €, y con cada lote del tipo  $L_2$ , uno de 3 €. El colmado dispone de 300 barras de turrón, de 180 botellas de cava y de 300 paquetes de café. ¿Cuántos lotes de cada tipo se tienen que preparar para obtener un beneficio máximo?

(Balears. Junio 2008. Opción B. Cuestión 2)

$x \rightarrow$  n.º de lotes  $L_1$      $y \rightarrow$  n.º de lotes  $L_2$

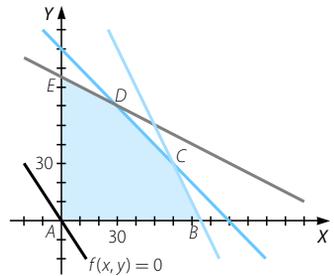
	Lotes $L_1$	Lotes $L_2$	Total	
Barras de turrón	4	2	300	$\rightarrow 4x + 2y \leq 300$
Botellas de cava	2	2	180	$\rightarrow 2x + 2y \leq 180$
Paquetes de café	2	4	300	$\rightarrow 2x + 4y \leq 300$
Beneficio (€)	4,50	3		$\rightarrow f(x, y) = 4,50x + 3y$ $\rightarrow$ Función objetivo

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad f(x, y) = 4,50x + 3y \\ \text{Sujeto a} \quad \left. \begin{array}{l} 4x + 2y \leq 300 \\ 2x + 2y \leq 180 \\ 2x + 4y \leq 300 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\} \end{array}$$

La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(75, 0)$ ;  $C(60, 30)$ ;  $D(30, 60)$  y  $E(0, 75)$ .

Como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 337,5$ ;  $f(C) = 360$ ;  $f(D) = 315$ ;  $f(E) = 225$ , el máximo se alcanza en  $C$ .

Para maximizar el beneficio debemos preparar 60 lotes de tipo  $L_1$  y 30 lotes de tipo  $L_2$ , siendo este beneficio de 360 €.



066

Un profesor ha dado a sus alumnos una lista de problemas para que resuelvan, como máximo, 70. Los problemas están clasificados en dos grupos. Los del grupo A valen 5 puntos cada uno y los del grupo B, 7 puntos. Para resolver un problema del tipo A se necesitan 2 minutos y para resolver un problema del tipo B, 3 minutos. Si los alumnos disponen de dos horas y media para resolverlos, ¿cuántos problemas de cada tipo habría que hacer para obtener la puntuación máxima?

(La Rioja. Junio 2008. Parte B. Problema 2)



$x \rightarrow$  n.º de problemas del tipo A       $y \rightarrow$  n.º de problemas del tipo B

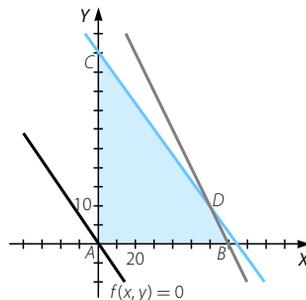
	Problemas tipo A	Problemas tipo B	Total
Tiempo (min)	2	3	150
Puntos	5	7	

$\rightarrow 2x + 3y \leq 150$   
 $\rightarrow f(x, y) = 5x + 7y \rightarrow$  Función objetivo

Maximizar  $f(x, y) = 5x + 7y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 150 \\ x + y \leq 70 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$

La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(70, 0)$ ;  $C(0, 50)$  y  $D(60, 10)$ .

Como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 350$ ;  $f(C) = 350$  y  $f(D) = 370$ , el máximo se alcanza en  $D$ . Esto significa que para obtener la máxima puntuación hay que realizar 60 problemas del tipo A y 10 problemas del tipo B, obteniéndose con ellos 370 puntos.



067 En un almacén de electrodomésticos hay neveras y lavadoras, pudiéndose almacenar hasta un total de 180 unidades. Para atender adecuadamente la demanda de los clientes, deben existir al menos 30 lavadoras y el número de neveras debe ser, al menos, igual al número de lavadoras más 20. Si el costo de cada nevera es de 450 € y de cada lavadora es de 375 €:

- Formula el correspondiente problema.
- Representa la región factible.
- ¿Cuántas unidades de cada electrodoméstico se han de almacenar minimizando los costos totales?

(Canarias. Junio 2008. Prueba B. Pregunta 5)

a)  $x \rightarrow$  n.º de neveras       $y \rightarrow$  n.º de lavadoras

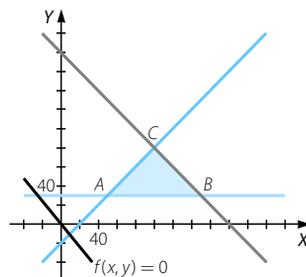
	Neveras	Lavadoras
Coste (€)	450	375

$\rightarrow f(x, y) = 450x + 375y \rightarrow$  Función objetivo

Minimizar  $f(x, y) = 450x + 375y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 180 \\ y \geq 30 \\ x \geq y + 20 \end{array} \right\}$

b) La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(50, 30)$ ;  $B(150, 30)$  y  $C(100, 80)$ .

c) Sustituyendo los vértices en la función objetivo obtenemos  $f(A) = 33.750$ ;  $f(B) = 78.750$  y  $f(C) = 75.000$ , por lo que el mínimo se alcanza en A. Así, hay que almacenar 50 neveras y 30 lavadoras para que el coste sea mínimo y valga 33.750 €.



# Programación lineal

068

Una tienda de artículos de piel necesita para su próxima campaña un mínimo de 80 bolsos, 120 pares de zapatos y 90 cazadoras. Se abastece de los artículos en dos talleres: A y B. El taller A produce diariamente 4 bolsos, 12 pares de zapatos y 2 cazadoras con un coste diario de 360 €. La producción diaria del taller B es de 2 bolsos, 2 pares de zapatos y 6 cazadoras siendo su coste de 400 € cada día.



Determina, justificando la respuesta:

- El número de días que debe trabajar cada taller para abastecer a la tienda con el mínimo coste.
- El valor de dicho coste mínimo.

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción A. Problema 1)

$x \rightarrow$  n.º de días que trabaja el taller A

$y \rightarrow$  n.º de días que trabaja el taller B

	Taller A	Taller B	Total
Bolsos	4	2	80
Zapatos	12	2	120
Cazadoras	2	6	90
Coste (€)	360	400	

$$\rightarrow 4x + 2y \geq 80$$

$$\rightarrow 12x + 2y \geq 120$$

$$\rightarrow 2x + 6y \geq 90$$

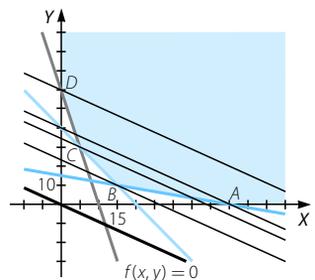
$$\rightarrow f(x, y) = 360x + 400y \rightarrow \text{Función objetivo}$$

Minimizar  $f(x, y) = 360x + 400y$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sujeto a } 4x + 2y \geq 80 \\ 12x + 2y \geq 120 \\ 2x + 6y \geq 90 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$$

- La región factible no está acotada y tiene como vértices  $A(45, 0)$ ;  $B(15, 10)$ ;  $C(5, 30)$  y  $D(0, 60)$ . Trazando paralelas a la función objetivo por los distintos vértices se aprecia que el mínimo se alcanza en B. Así, el taller A debe trabajar 15 días, y el taller B, 10 días para minimizar el coste.

- El valor del coste mínimo es 9.400 €.



069 Un proyecto de jardinería puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa:  $G_1$  y  $G_2$ . Se trata de ajardinar tres zonas:  $A$ ,  $B$  y  $C$ . En la siguiente tabla se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo en cada zona durante una semana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo $G_1$	4	10	7
Grupo $G_2$	10	5	7

Se necesita ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona  $A$ , 50 unidades en la zona  $B$  y 49 unidades en la zona  $C$ , estimándose el coste semanal en 3.300 € para el grupo  $G_1$  y en 4.000 € para el grupo  $G_2$ .

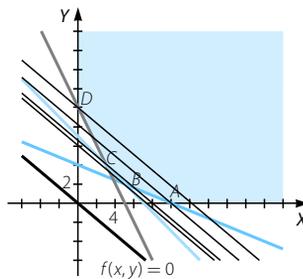
¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste? Expresa la función objetivo y las restricciones del problema. Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

(Galicia. Junio 2008. Bloque 1. Ejercicio 2)

$x \rightarrow$  n.º de semanas que tendrá que trabajar el grupo  $G_1$   
 $y \rightarrow$  n.º de semanas que tendrá que trabajar el grupo  $G_2$

	Grupo $G_1$	Grupo $G_2$	Total	
Zona A	4	10	40	$\rightarrow 4x + 10y \geq 40$
Zona B	10	5	50	$\rightarrow 10x + 5y \geq 50$
Zona C	7	7	49	$\rightarrow 7x + 7y \geq 49$
Coste (€)	3.300	4.000		$\rightarrow f(x, y) = 3.300x + 4.000y$ $\rightarrow$ Función objetivo

Minimizar  $f(x, y) = 3.300x + 4.000y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 4x + 10y \geq 40 \\ 10x + 5y \geq 50 \\ 7x + 7y \geq 49 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$



La región factible no está acotada y tiene como vértices  $A(10, 0)$ ;  $B(5, 2)$ ;  $C(3, 4)$  y  $D(0, 10)$ . Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por estos vértices se observa que el mínimo se alcanza en  $B$ . El grupo  $G_1$  tendrá que trabajar 5 semanas, y el grupo  $G_2$ , 2 semanas para que el coste sea mínimo, siendo este coste de 24.500 €.

# Programación lineal

070

Una empresa fabrica dos calidades de un bien, teniendo que producir en total un mínimo de 100 unidades y un máximo de 200. El coste de producción de una unidad de la primera calidad es de 15 € y se obtiene un beneficio unitario de 100 €. El coste de producción de una unidad de la segunda calidad es de 10 € y se obtiene un beneficio unitario de 50 €.

- Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el coste total mínimo para obtenerse un beneficio total de al menos 12.500 €.
- Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el beneficio total máximo con un coste total no superior a 2.550 €.

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 1)

$x \rightarrow$  n.º de unidades de calidad 1

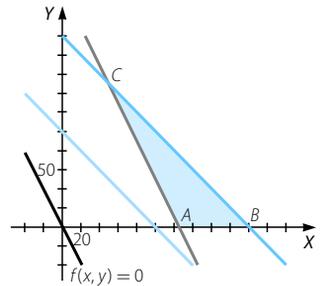
$y \rightarrow$  n.º de unidades de calidad 2

	Calidad 1	Calidad 2
Coste de producción (€)	15	10
Beneficio por unidad (€)	100	50

- a) Minimizar  $f(x, y) = 15x + 10y$
- Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 100 \leq x + y \leq 200 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \\ 100x + 50y \geq 12.500 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(125, 0)$ ;  $B(200, 0)$  y  $C(50, 150)$ .

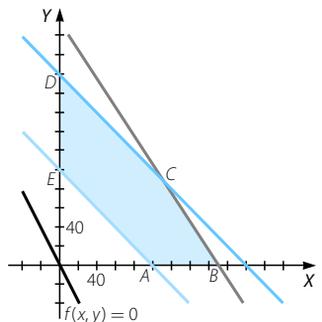
Como  $f(A) = 1.875$ ;  $f(B) = 3.000$  y  $f(C) = 2.250$ , la función alcanza su mínimo en  $A$ , es decir, se deben fabricar 125 unidades de calidad 1 y ninguna de calidad 2 para minimizar el coste, y que este sea de 1.875 €.



- b) Maximizar  $f(x, y) = 100x + 50y$
- Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 100 \leq x + y \leq 200 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \\ 15x + 10y \leq 2.550 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(100, 0)$ ;  $B(170, 0)$ ;  $C(110, 90)$ ;  $D(0, 200)$  y  $E(0, 100)$ .

Como  $f(A) = 10.000$ ;  $f(B) = 17.000$ ;  $f(C) = 15.500$ ;  $f(D) = 10.000$  y  $f(E) = 5.000$ , el máximo se alcanza en  $B$ , es decir, es necesario fabricar 170 objetos de calidad 1 y ninguno de calidad 2 para que el beneficio sea máximo, siendo este beneficio de 17.000 €.



- 071 Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras,  $A$  y  $B$ . Las almazaras  $A$  y  $B$  venden el aceite a 2.000 y 3.000 € por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara  $A$  el doble de aceite que a la almazara  $B$ .



¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada una de las almazaras para obtener el mínimo coste? Determina dicho coste mínimo.

(Madrid. Junio 2008. Opción B. Ejercicio 1)

$x$  → Cantidad de aceite que se compra a la almazara  $A$   
 $y$  → Cantidad de aceite que se compra a la almazara  $B$

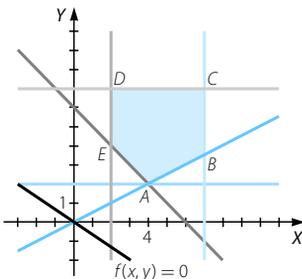
	Almazara A	Almazara B
Precio por tonelada (€)	2.000	3.000

→  $f(x, y) = 2.000x + 3.000y$   
 → Función objetivo

Minimizar  $f(x, y) = 2.000x + 3.000y$

Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ x \leq 2y \\ 2 \leq x \leq 7 \\ 2 \leq y \leq 7 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada con vértices  $A(4, 2)$ ;  $B\left(7, \frac{7}{2}\right)$ ;  $C(7, 7)$ ;  $D(2, 7)$  y  $E(2, 4)$ .



Como  $f(A) = 14.000$ ;  $f(B) = 24.500$ ;  $f(C) = 35.000$ ;  $f(D) = 25.000$  y  $f(E) = 16.000$ , el mínimo se alcanza en  $A$ . Así, es necesario comprar 4 toneladas de aceite en la almazara  $A$  y 2 toneladas de aceite en la almazara  $B$ , siendo el coste de 14.000 €.

# Programación lineal

072 Cada instalación de una televisión analógica necesita 10 m de cable y cada instalación de televisión digital necesita 20 m. Cada televisión analógica necesita 20 minutos de instalación y 30 minutos cada televisión digital. Disponemos un máximo de 400 m de cable al día. Tenemos que trabajar al menos 300 minutos al día. Diariamente podemos instalar un máximo de 20 televisiones analógicas y debemos instalar al menos 6 televisiones digitales. Por cada televisión analógica instalada obtenemos unos ingresos de 10 € y por cada televisión digital 15 €.

Utilizando técnicas de programación lineal, representa la región factible, calcula el número de televisores analógicos y digitales que permiten obtener mayores ingresos diariamente, así como el ingreso máximo diario que se puede conseguir.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Bloque A. Pregunta 1)

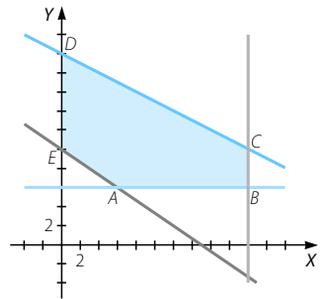
$x \rightarrow$  n.º de televisores analógicos       $y \rightarrow$  n.º de televisores digitales

	Televisión analógica	Televisión digital	Total disponible	
Cable (m)	10	20	400	$\rightarrow 10x + 20y \leq 400$
Tiempo (min)	20	30	300	$\rightarrow 20x + 30y \geq 300$
Ingresos (€)	10	15		$\rightarrow f(x,y) = 10x + 15y$ $\rightarrow$ Función objetivo

Maximizar  $f(x,y) = 10x + 15y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 10x + 20y \leq 400 \\ 20x + 30y \geq 300 \\ 0 \leq x \leq 20 \\ y \geq 6 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(6, 6)$ ;  $B(20, 6)$ ;  $C(20, 10)$ ;  $D(0, 20)$  y  $E(0, 10)$ .

Como  $f(A) = 150$ ;  $f(B) = 290$ ;  $f(C) = 350$ ;  $f(D) = 300$  y  $f(E) = 150$ , el máximo se alcanza en  $C$ , es decir, se deben instalar 20 televisores analógicos y 10 televisores digitales para maximizar los ingresos, siendo estos de 350 €.



073 Una empresa fabrica dos tipos de piezas: A y B. Cada pieza debe pasar por tres departamentos con limitaciones de tiempo. Las horas necesarias por cada pieza y sus beneficios son:

	Dep. 1	Dep. 2	Dep. 3	Beneficio
Pieza A	2	5	2	11 €
Pieza B	6	2	2	7 €
Horas disponibles	66	50	26	

Calcula la producción que maximiza el beneficio.

- Plantea el problema.
- Resolución gráfica.
- Analiza gráficamente qué ocurre si el beneficio de B se reduce en 4 €.

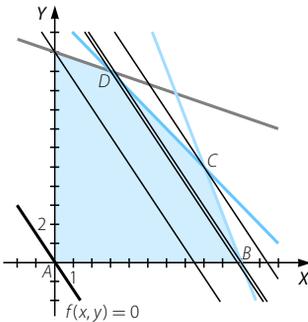
(Navarra. Junio 2008. Ejercicio 1. Opción B)

- a)  $x \rightarrow$  n.º de piezas A fabricadas  
 $y \rightarrow$  n.º de piezas B fabricadas

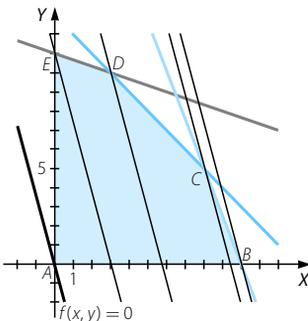
	Pieza A	Pieza B	Horas disponibles	
Dep. 1	2	6	66	$\rightarrow 2x + 6y \leq 66$
Dep. 2	5	2	50	$\rightarrow 5x + 2y \leq 50$
Dep. 3	2	2	26	$\rightarrow 2x + 2y \leq 26$
Beneficio (€)	11	7		$\rightarrow f(x, y) = 11x + 7y$ $\rightarrow$ Función objetivo

Maximizar  $f(x, y) = 11x + 7y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 2x + 6y \leq 66 \\ 5x + 2y \leq 50 \\ 2x + 2y \leq 26 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

- b) La región factible está acotada con vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(10, 0)$ ;  $C(8, 5)$ ;  $D(3, 10)$  y  $E(0, 11)$ . Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por cada uno de los vértices, observamos que el máximo se alcanza en C. Así, para maximizar el beneficio se deben fabricar 8 piezas A y 5 piezas B. El beneficio máximo es de 123 €.



- c) Las restricciones son las mismas, y la función objetivo es:  $f(x, y) = 11x + 3y$ . Trazando paralelas a esta función que pasen por los vértices, observamos que el máximo se obtiene en B, por lo que para maximizar el beneficio se deben fabricar 10 piezas A y ninguna pieza B. El beneficio máximo es de 110 €.



# Programación lineal

074 Para dotar de mobiliario urbano a cierta zona de una ciudad, se quiere colocar al menos 20 piezas entre farolas y jardineras. Hay 40 farolas y 12 jardineras disponibles. Se pretende que el número de jardineras colocadas no sea superior a una tercera parte del de farolas colocadas, pero de forma que por lo menos un 20% de las piezas que se coloquen sean jardineras.

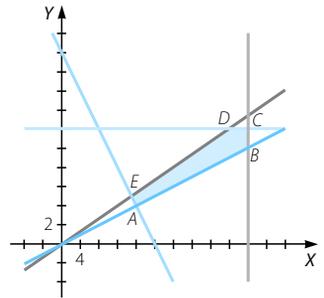
- ¿Qué combinaciones de piezas de cada tipo se pueden colocar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- ¿Qué combinación hace que la diferencia entre el número de farolas y de jardineras colocadas sea mayor? ¿Es la combinación donde más piezas de mobiliario se colocan?

(Asturias. Junio 2008. Bloque 2)

a)  $x \rightarrow$  n.º de farolas       $y \rightarrow$  n.º de jardineras

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 12 \\ x + y \geq 20 \\ x \leq \frac{y}{3} \\ 0,20(x + y) \leq y \end{array} \right\} \text{Las restricciones son:}$$

Gráficamente es la región del plano que tiene como vértices  $A(16, 4)$ ;  $B(40, 10)$ ;  $C(40, 12)$ ;  $D(36, 12)$  y  $E(15, 5)$ .



- Debemos maximizar la función  $f(x, y) = |x - y|$  sujeto a las restricciones anteriores. Como la región está acotada, podemos sustituir los vértices. Y como  $f(A) = 12$ ;  $f(B) = 30$ ;  $f(C) = 28$ ;  $f(D) = 24$  y  $f(E) = 10$ , el máximo se alcanza en  $B$ , es decir, para que la diferencia sea mayor hay que colocar 40 farolas y 10 jardineras.

No es la combinación donde más piezas de mobiliario se colocan, ya que esto se consigue colocando 40 farolas y 12 jardineras.

075 Una compañía de telefonía móvil quiere celebrar una jornada de «Consumo razonable» y ofrece a sus clientes la siguiente oferta: 15 céntimos de euro por cada mensaje SMS y 25 céntimos de euro por cada minuto de conversación incluyendo el coste de establecimiento de llamada. Impone las condiciones:

- El número de llamadas de un minuto no puede ser mayor que el número de mensajes aumentado en 3, ni ser menor que el número de mensajes disminuido en 3.
- Sumando el quintuplo del número de mensajes con el número de llamadas no puede obtenerse más de 27.

- Dibuja la región factible.
- Determina el número de mensajes y de llamadas para que el beneficio sea máximo.
- ¿Cuál es ese beneficio máximo?



(Castilla-La Mancha. Junio 2008. Bloque 2. Ejercicio A)

$x \rightarrow$  n.º de mensajes SMS       $y \rightarrow$  n.º de minutos de conversación telefónica

	Mensaje SMS	Minuto de conversación
Precio (céntimos)	15	25

$\rightarrow f(x, y) = 15x + 25y \rightarrow$  Función objetivo

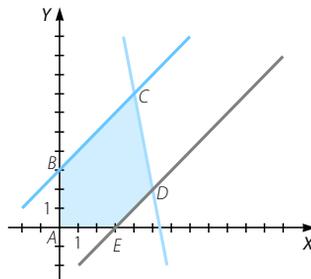
- a) Las restricciones son:
- $$\left. \begin{aligned} x - 3 &\leq y \leq x + 3 \\ 5x + y &\leq 27 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(0, 3)$ ;  $C(4, 7)$ ;  $D(5, 2)$  y  $E(3, 0)$ .

- b) Se trata de maximizar  $f(x, y) = 15x + 25y$  sujeto a las restricciones anteriores.

Como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 75$ ;  $f(C) = 235$ ;  $f(D) = 125$  y  $f(E) = 45$ , el máximo se alcanza en  $C$ , es decir, para maximizar el beneficio se deben mandar 4 mensajes SMS y mantener 7 minutos de conversación telefónica.

- c) El beneficio máximo es de 235 céntimos.



076

Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo  $A$  a un precio de 15.000 € y el modelo  $B$  a un precio de 20.000 €. La oferta está limitada por las existencias que son 20 coches del modelo  $A$  y 10 del modelo  $B$ , queriendo vender, al menos, tantas unidades del modelo  $A$  como del modelo  $B$ .

Por otra parte, para cubrir gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos en ella deber ser, al menos, de 60.000 €.

- a) Plantea el problema y representa gráficamente su conjunto de soluciones.  
 b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos?  
 ¿Cuál es su importe?

(Murcia. Septiembre 2008. Bloque 1. Cuestión 2)

$x \rightarrow$  n.º de coches vendidos del modelo  $A$

$y \rightarrow$  n.º de coches vendidos del modelo  $B$

	Modelo A	Modelo B
Total coches disponibles	20	10
Precio (€)	15.000	20.000

$\rightarrow x \leq 20; y \leq 10$

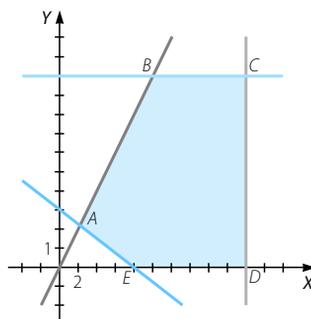
$\rightarrow f(x, y) = 15.000x + 20.000y$   
 $\rightarrow$  Función objetivo

- a) Las restricciones son:

$$\left. \begin{aligned} 15.000x + 20.000y &\geq 60.000 \\ 0 &\leq x \leq 20 \\ 0 &\leq y \leq 10 \\ x &\geq y \end{aligned} \right\}$$

La región factible está acotada y tiene

como vértices  $A\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$ ;  $B(10, 10)$ ;  $C(20, 10)$ ;  $D(20, 0)$  y  $E(4, 0)$ .



# Programación lineal

b) Se trata de maximizar  $f(x, y) = 15.000x + 20.000y$  sujeto a las restricciones anteriores.

Como  $f(A) = 60.000$ ;  $f(B) = 350.000$ ;  $f(C) = 500.000$ ;  $f(D) = 300.000$  y  $f(E) = 60.000$ , el máximo se alcanza en C, es decir, se deben vender 20 coches del modelo A y 10 coches del modelo B para maximizar los ingresos. El importe será de 500.000 €.

077 Una compañía aérea tiene dos modelos de avión (A y B) para cubrir tres trayectos diferentes ( $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ ). El modelo A puede realizar mensualmente 10 veces el trayecto  $T_1$ , 30 veces el  $T_2$  y 50 veces el  $T_3$ . El modelo B puede realizar mensualmente 20 veces cada uno de los trayectos. La compañía se ha comprometido a realizar al menos 80 veces el trayecto  $T_1$ , 160 veces el  $T_2$  y 200 veces el  $T_3$ .



Si el coste de combustible de los dos modelos es de 200.000 € mensuales, ¿cuánto tiempo debe volar cada uno de estos modelos para que se cumplan los compromisos adquiridos con el mínimo coste?

$x \rightarrow$  n.º de meses de actividad del avión A  
 $y \rightarrow$  n.º de meses de actividad del avión B

	Avión A	Avión B	Total
Trayecto $T_1$	10	20	80
Trayecto $T_2$	30	20	160
Trayecto $T_3$	50	20	200
Coste de combustible (€)	200.000	200.000	

$\rightarrow 10x + 20y \geq 80$

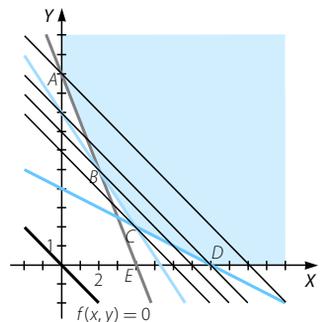
$\rightarrow 30x + 20y \geq 160$

$\rightarrow 50x + 20y \geq 200$

$\rightarrow f(x, y) = 200.000x + 200.000y$   
 $\rightarrow$  Función objetivo

Minimizar  $f(x, y) = 200.000x + 200.000y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 10x + 20y \geq 80 \\ 30x + 20y \geq 160 \\ 50x + 20y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

La región factible no está acotada y tiene como vértices A(0, 10); B(2, 5); C(4, 2) y D(8, 0). Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, observamos que el mínimo se alcanza en el vértice C. Es decir, para minimizar costes es necesario que el avión del modelo A vuele 4 meses y el del modelo B vuele 2 meses. El coste de combustible ascenderá a 1.200.000 €.



078

Una empresa de autobuses de diversos tipos y capacidades dispone, en un determinado día, de un máximo de 7 conductores y de 6 conductoras. Recibe el encargo de transportar a los 528 alumnos de un centro docente con el fin de realizar una excursión de un día de duración. Si un conductor maneja un autobús de 44 plazas, entonces las conductoras deben manejar obligatoriamente los de 66 plazas. Por el contrario, si una conductora maneja un autobús de 24 plazas, entonces los conductores deben manejar obligatoriamente los de 72 plazas. La cantidad que cobra la empresa es de 500 € al día por conductor, independientemente de si es hombre o mujer.

- Representa la región factible.
- Determina el número de conductores y el número de conductoras para que el beneficio empresarial sea máximo.
- Calcula ese beneficio máximo.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 2. Ejercicio A)

$x \rightarrow$  n.º de conductores       $y \rightarrow$  n.º de conductoras

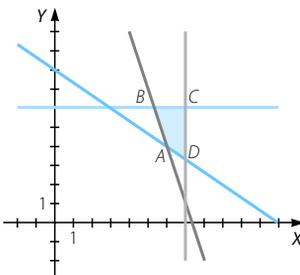
	Conductores	Conductoras
Dinero que se cobra (€)	500	500

$\rightarrow f(x, y) = 500x + 500y \rightarrow$  Función objetivo

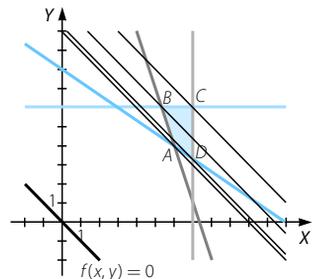
Maximizar  $f(x, y) = 500x + 500y$

Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 44x + 66y \geq 528 \\ 72x + 24y \geq 528 \\ 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 6 \end{array} \right\}$

- La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(6, 4)$ ;  $B\left(\frac{16}{3}, 6\right)$ ;  $C(7, 6)$  y  $D\left(7, \frac{10}{3}\right)$ .



- Se trata de maximizar  $f(x, y) = 500x + 500y$  sujeto a las restricciones anteriores. Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, observamos que el máximo se alcanza en el vértice C, es decir, para que el beneficio empresarial sea máximo se necesitan 7 conductores y 6 conductoras.
- El beneficio máximo es de 6.500 €.



# Programación lineal

079 Un camionero transporta dos tipos de mercancías, X e Y, ganando 60 y 50 € por tonelada respectivamente. Al menos debe de transportar 8 toneladas de X y como mucho el doble de cantidad que de Y. ¿A cuánto asciende su ganancia total máxima si dispone de un camión que puede transportar hasta 30 toneladas?

(Aragón. Septiembre 2007. Opción B. Cuestión 1)



$x \rightarrow$  Toneladas de la mercancía X       $y \rightarrow$  Toneladas de la mercancía Y

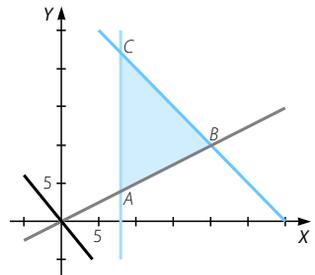
	Mercancía X	Mercancía Y
Ganancia (€)	60	50

$\rightarrow f(x, y) = 60x + 50y \rightarrow$  Función objetivo

Maximizar  $f(x, y) = 60x + 50y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} x \geq 8 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \end{array} \right\}$

La región factible está acotada y tiene como vértices A(8, 4); B(20, 10) y C(8, 22).

Como  $f(A) = 680$ ;  $f(B) = 1.700$  y  $f(C) = 1.580$ , el máximo de la función se alcanza en B, por lo que para conseguir la ganancia total máxima de 1.700 € se deben transportar 20 toneladas de la mercancía X y 10 toneladas de la mercancía Y.



080 Un horticultor desea mezclar fertilizantes que proporcionen un mínimo de 15 unidades de potasa, 20 unidades de nitratos y 24 unidades de fosfatos. Cada unidad de la marca 1 proporciona 3 unidades de potasa, 1 de nitratos y 3 de fosfatos; su costo es de 120 €. Cada unidad de la marca 2 proporciona 1 unidad de potasa, 5 de nitratos y 2 de fosfatos; su costo es de 60 €. ¿Cuál es la combinación de fertilizantes de menor costo que satisface las especificaciones deseadas?

- Plantea el problema.
- Resolución gráfica.
- Analiza gráficamente qué ocurre si el precio de la marca 2 aumenta en 20 €.

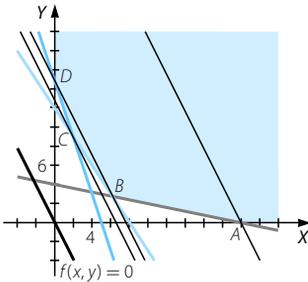
(Navarra. Septiembre 2007. Ejercicio 1. Opción B)

- a)  $x \rightarrow$  Unidades de la marca 1  
 $y \rightarrow$  Unidades de la marca 2

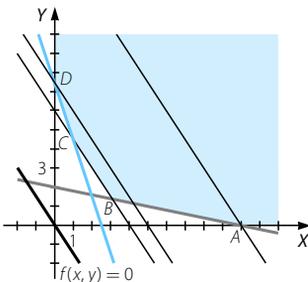
	Marca 1	Marca 2	Total	
Potasa	3	1	15	$\rightarrow 3x + y \geq 15$
Nitratos	1	5	20	$\rightarrow x + 5y \geq 20$
Fosfatos	3	2	24	$\rightarrow 3x + 2y \geq 24$
Coste (€)	120	60		$\rightarrow f(x, y) = 120x + 60y$ $\rightarrow$ Función objetivo

Minimizar  $f(x, y) = 120x + 60y$   
 Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 3x + y \geq 15 \\ x + 5y \geq 20 \\ 3x + 2y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

- b) La región factible no está acotada, siendo los vértices  $A(20, 0)$ ;  $B\left(\frac{80}{13}, \frac{36}{13}\right)$ ;  $C(2, 9)$  y  $D(0, 15)$ . Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, obtenemos que el mínimo se alcanza en C. Así, para que el coste sea el menor posible debemos tomar 2 unidades de la marca 1 y 9 unidades de la marca 2. El coste asciende a 780 €.



- c) Si aumentamos el precio de la marca 2 en 20 €, obtendríamos la siguiente función objetivo:  $f(x, y) = 120x + 80y$ , con lo que procediendo igual que en el apartado b) observamos que el mínimo se alcanza en todos los puntos del segmento BC. Como estamos hablando de unidades de cada una de las marcas, los valores deben ser enteros, por lo que valen los puntos (6, 3); (4, 6) y (2, 9), en los que el coste asciende a 960 €.



# Programación lineal

081 Mario's Pizza es un productor de pizzas congeladas de dos tipos A y B. Obtiene un beneficio de 1 € por cada pizza A que produzca y de 1,50 € por cada pizza de tipo B. Cada pizza incluye una combinación de pasta de harina y de mezcla de relleno, según se indica en el siguiente cuadro:



	Pasta de harina	Mezcla de relleno	Beneficio
Pizza A	1/2 kg	1/8 kg	1 €
Pizza B	1/2 kg	1/4 kg	1,50 €

Un día cualquiera, se dispone de un máximo de 75 kg de pasta de harina y de 25 kg de mezcla de relleno y según los pedidos anteriores, Mario's debe vender diariamente por lo menos 50 pizzas de tipo A y por lo menos 25 pizzas de tipo B.

- Formular el sistema de inecuaciones, representar gráficamente la región factible y calcular sus vértices.
- ¿Cuántas pizzas A y B deberá fabricar diariamente para maximizar los beneficios? Calcular dichos beneficios.

(Galicia. Junio 2007. Bloque 1. Ejercicio 2)

$x \rightarrow$  n.º de pizzas de tipo A  
 $y \rightarrow$  n.º de pizzas del tipo B

	Pizza A	Pizza B	Total disponible
Pasta de harina	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	75
Mezcla de relleno	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	25
Beneficios (€)	1	1,5	

$$\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}y \leq 75$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y \leq 25$$

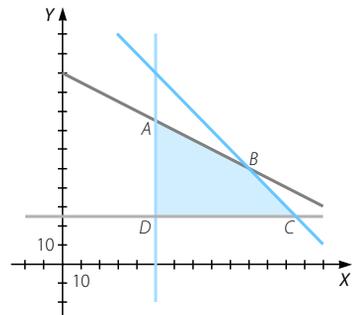
$$\rightarrow f(x, y) = x + 1,5y$$

→ Función objetivo

a) Las inecuaciones son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}y &\leq 75 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y &\leq 25 \\ x &\geq 50 \\ y &\geq 25 \end{aligned} \right\}$$

La región factible está acotada y tiene como vértices A(50, 75); B(100, 50); C(125, 25) y D(50, 25).



- b) Se trata de maximizar  $f(x, y) = x + 1,5y$  sujeto a las restricciones anteriores. Como  $f(A) = 162,5$ ;  $f(B) = 175$ ;  $f(C) = 162,5$  y  $f(D) = 87,5$ ; el máximo se alcanza en el vértice  $B$ , es decir, se deben fabricar diariamente 100 pizzas de tipo  $A$  y 50 pizzas de tipo  $B$  para que el beneficio sea máximo. Este beneficio será de 175 €.

082 Para seguir una dieta de adelgazamiento, se recomienda un preparado dietético, mezclando dos productos  $A$  y  $B$ , con las siguientes condiciones:

- La cantidad de producto  $B$  no debe superar a la cantidad de producto  $A$ .
- La cantidad de mezcla ingerida no debe superar los 200 gramos.
- La cantidad de producto  $A$  no debe superar los 150 gramos.

Si, en cada gramo, el producto  $A$  contiene 0,4 g de vitaminas y el producto  $B$  contiene 0,3 g de vitaminas:

- a) Representa la región factible.  
 b) ¿Cuántos gramos de cada producto hay que incluir en la mezcla para maximizar su contenido vitamínico?

(Canarias. Septiembre 2006. Prueba B. Pregunta 5)

$x \rightarrow$  Gramos del producto  $A$

$y \rightarrow$  Gramos del producto  $B$

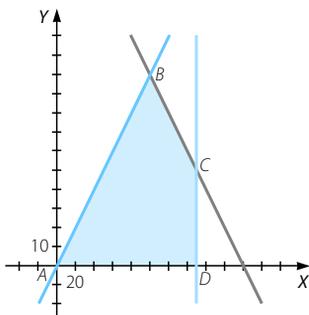
	Producto A	Producto B
Vitaminas (g)	11	7

$\rightarrow f(x, y) = 0,4x + 0,3y \rightarrow$  Función objetivo

- a) Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x \\ x + y \leq 200 \\ 0 \leq x \leq 150 \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$$

La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(100, 100)$ ;  $C(150, 50)$  y  $D(150, 0)$ .



- b) Se trata de maximizar  $f(x, y) = 0,4x + 0,3y$  sujeto a las restricciones anteriores. Como  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 70$ ;  $f(C) = 75$  y  $f(D) = 60$ , el máximo se alcanza en el vértice  $C$ . Así, para maximizar el contenido vitamínico se deben tomar 150 gramos del producto  $A$  y 50 gramos del producto  $B$ .

# Programación lineal

## PREPARA TU SELECTIVIDAD

- 1 Dos compuestos medicinales tienen dos principios activos  $A$  y  $B$ . Por cada píldora, el primer compuesto tiene 2 unidades de  $A$  y 6 de  $B$ , mientras que el segundo compuesto tiene 4 unidades de  $A$  y 4 unidades de  $B$ . Durante un período de tiempo, un paciente debe recibir un mínimo de 16 unidades del tipo  $A$  y un mínimo de 24 unidades del tipo  $B$ . Si el coste de cada píldora del primer compuesto es de 0,50 € y el coste de cada píldora del segundo compuesto es de 0,90 €:

- Representar la región factible.
- Calcular el número óptimo de píldoras de cada compuesto que debe recibir el paciente para minimizar los costos.

(Canarias. Septiembre 2007. Prueba B. Pregunta 5)

- $x \rightarrow$  n.º de unidades del primer compuesto
- $y \rightarrow$  n.º de unidades del segundo compuesto

	Compuesto 1	Compuesto 2	N.º de unidades
Principio A	2	4	16
Principio B	6	4	24
Coste (€)	0,50	0,90	

$$\rightarrow 2x + 4y \geq 16$$

$$\rightarrow 6x + 4y \geq 24$$

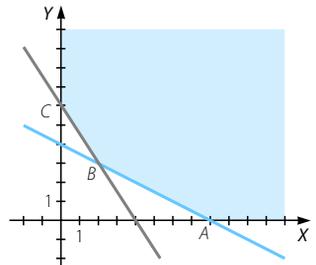
$$\rightarrow f(x, y) = 0,50x + 0,90y$$

→ Función objetivo

La región factible viene dada por:

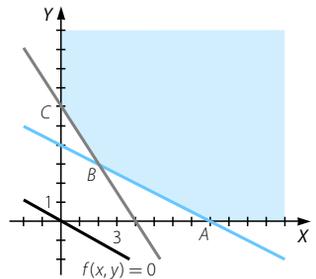
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y \geq 16 \\ 6x + 4y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se trata de una región factible no acotada con vértices  $A(8, 0)$ ;  $B(2, 3)$  y  $C(0, 6)$ .



- Se trata de minimizar la función  $f(x, y) = 0,50x + 0,90y$  sujeto a las restricciones anteriores.

Gráficamente, trazando rectas paralelas la función objetivo que pasen por los vértices, se observa que el mínimo se alcanza en el vértice  $B$ , por lo que el paciente debe tomar 2 píldoras del primer compuesto y 3 píldoras del segundo para minimizar costes, ascendiendo estos a 3,70 €.



- 2 Una empresa fabrica dos tipos de televisores ( $T_{21}$  y  $T_{14}$ ) de 21 y 14 pulgadas, a un coste por televisor de 100 y 50 €, respectivamente. Se sabe que el número de televisores  $T_{21}$  fabricados diariamente no supera en 4 unidades a los  $T_{14}$ , y que entre ambos no superan diariamente los 30 televisores. También se sabe que el proceso productivo no permite fabricar diariamente menos de 2 televisores  $T_{21}$  ni menos de 5 televisores  $T_{14}$ .

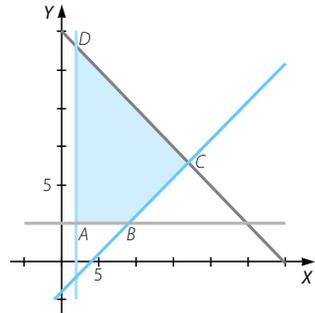
- a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al enunciado.
- b) Dibuja la región factible y calcula sus vértices.
- c) Calcula cuántos televisores  $T_{21}$  y  $T_{14}$  maximizan y cuántos minimizan el coste de producción diaria.

(Galicia. Junio 2005. Bloque 1. Ejercicio 2)

- a)  $x \rightarrow$  n.º de unidades de  $T_{21}$   
 $y \rightarrow$  n.º de unidades de  $T_{14}$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq y + 4 \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 2 \\ y \geq 5 \end{array} \right\}$$

- b) La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(2, 5)$ ;  $B(9, 5)$ ;  $C(17, 13)$  y  $D(2, 28)$ .
- c) Se trata de maximizar y minimizar la función  $f(x, y) = 100x + 50y$  sujeto a las restricciones del apartado a).



Como  $f(A) = 450$ ;  $f(B) = 1.150$ ;  $f(C) = 2.350$  y  $f(D) = 1.600$ , el máximo se alcanza en  $C$  y el mínimo en  $A$ . Concluimos que para maximizar el coste de producción hay que fabricar 17 televisores de 21 pulgadas y 13 televisores de 14 pulgadas, mientras que para minimizar el coste de producción deben hacerse 2 televisores de 21 pulgadas y 5 televisores de 14 pulgadas.

- 3 Una aerolínea quiere optimizar el número de filas de clase preferente y de clase turista en un avión. La longitud útil del avión para instalar las filas de asientos es de 104 m, necesiéndose 2 m para instalar una fila de clase preferente y 1,5 m para las de clase turista. La aerolínea precisa instalar al menos 3 filas de clase preferente y que las filas de clase turista sean como mínimo el triple que las de clase preferente. Los beneficios por fila de clase turista son de 152 € y de 206 € para la clase preferente.

¿Cuántas filas de clase preferente y cuántas de clase turista deben instalar para obtener el beneficio máximo? Indica dicho beneficio.

(Madrid. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 1)

- $x \rightarrow$  n.º de filas de clase preferente
- $y \rightarrow$  n.º de filas de clase turista

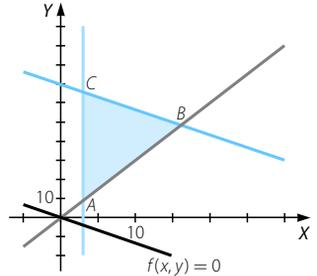
	Preferente	Turista	Total	
Longitud (m)	2	1,5	104	$\rightarrow 2x + 1,5y \leq 104$
Beneficios (€)	206	152		$\rightarrow f(x, y) = 206x + 152y$ $\rightarrow$ Función objetivo

- Maximizar  $f(x, y) = 206x + 152y$
- Sujeto a  $\left. \begin{array}{l} 2x + 1,5y \leq 104 \\ x \geq 3 \\ y \geq 3x \end{array} \right\}$

# Programación lineal

La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(3, 9)$ ;  $B(16, 48)$  y  $C(3; 65,3)$ .

Como  $f(A) = 1.986$ ;  $f(B) = 10.592$  y  $f(C) = 10.548,6$ ; el máximo se alcanza en el vértice  $B$ , por lo que se deben instalar 16 filas de clase preferente y 48 filas de clase turista para obtener el máximo beneficio, siendo este de 10.592 €.



- 4 Una empresa fabrica dos productos P1 y P2 que se venden a 50 € y 44 € la unidad, respectivamente. Para ello alquila dos máquinas, M1 y M2, al precio de 5 € por hora y 6 € por hora, respectivamente. Las horas de funcionamiento de cada máquina necesarias para la fabricación de una unidad de cada producto así como la disponibilidad máxima semanal de cada máquina vienen dadas en la siguiente tabla:

	Producto P1	Producto P2	Disponibilidad
M1	2 horas	4 horas	80 horas
M2	4 horas	2 horas	100 horas

El coste del material utilizado en la fabricación de una unidad del producto P1 es de 10 € y en una unidad del producto P2 es de 8 €. Se desea saber cuántas unidades de cada producto se han de fabricar para maximizar el beneficio.

- Plantea el problema.
- Resuelve gráficamente.
- Analiza gráficamente qué ocurre si el precio de P2 se reduce en 2 €.

(Navarra. Junio 2006. Ejercicio 1. Opción B)

- $x \rightarrow$  n.º de unidades del producto P1
- $y \rightarrow$  n.º de unidades del producto P2

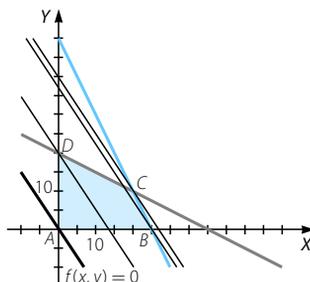
	Producto P1	Producto P2	Disponibilidad	Precio por hora	
M1	2	4	80	5	$\rightarrow 2x + 4y \leq 80$
M2	4	2	100	6	$\rightarrow 4x + 2y \leq 100$
Coste de material por unidad	10	8			
Precio de venta por unidad	50	44			
Coste de material + mano obra	44	40			
Beneficio unidad	6	4			

Gastos del producto P1  $\rightarrow$  10 € de producto + 2 horas de M1  $\cdot$  5 €/hora + 4 horas de M2  $\cdot$  6 €/hora = 10 + 10 + 24 = 44 €

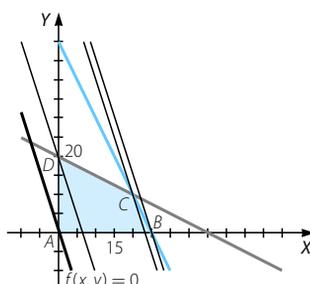
Gastos del producto P2  $\rightarrow$  8 € de producto + 4 horas de M1  $\cdot$  5 €/hora + 2 horas de M2  $\cdot$  6 €/hora = 8 + 20 + 12 = 40 €

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad f(x, y) = 6x + 4y \\ \text{Sujeto a} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 4y \leq 80 \\ 4x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

b) Se obtiene una región factible acotada con vértices  $A(0, 0)$ ;  $B(25, 0)$ ;  $C(20, 10)$  y  $D(0, 20)$ . Trazando paralelas a la función objetivo que pasen por los vértices, vemos que el máximo se alcanza en el vértice  $C$ . Esto quiere decir que es necesario fabricar 20 unidades del producto  $P_1$  y 10 unidades del producto  $P_2$  para maximizar el beneficio, siendo este de 160 €.



c) Si reducimos en 2 € el precio del producto  $P_2$  obtendremos 42 €, en lugar de 44 €. Como el precio de coste sigue siendo de 40 €, la ganancia por unidad será de 2 €, por lo que la función objetivo es  $f(x, y) = 6x + 2y$ . Trazando paralelas a esta función que pasen por todos los vértices, vemos que el máximo se alcanza en el vértice  $B$ , es decir, para maximizar el beneficio se deben fabricar 25 unidades del producto  $P_1$  y ninguna del producto  $P_2$ . Su valor será de 150 €.



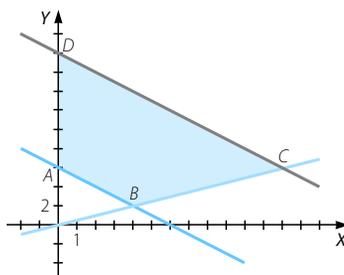
5 La candidatura de cierto grupo político para las elecciones municipales debe cumplir los siguientes requisitos: el número total de componentes de la candidatura debe estar comprendido entre 6 y 18 y el número de hombres ( $x$ ) no debe exceder del doble del número de mujeres ( $y$ ).

- Represente el recinto asociado a estas restricciones y calcule sus vértices.
- ¿Cuál es el mayor número de hombres que puede tener una candidatura que cumpla las condiciones?

(Andalucía. Año 2007. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 1)

$$\begin{array}{l} \text{a) } x \rightarrow \text{n.º de hombres} \\ y \rightarrow \text{n.º de mujeres} \\ \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6 \leq x + y \leq 18 \\ x \leq 2y \end{array} \right\} \end{array}$$

La región factible está acotada y tiene como vértices  $A(0, 6)$ ;  $B(4, 2)$ ;  $C(12, 6)$  y  $D(0, 18)$ .



b) Se trata de maximizar la función, que es la que nos da el número de hombres. Sustituimos los vértices y obtenemos  $f(A) = 0$ ;  $f(B) = 4$ ;  $f(C) = 12$  y  $f(D) = 0$ , por lo que 12 hombres será el máximo número que pueda tener una candidatura que cumpla las condiciones del enunciado.