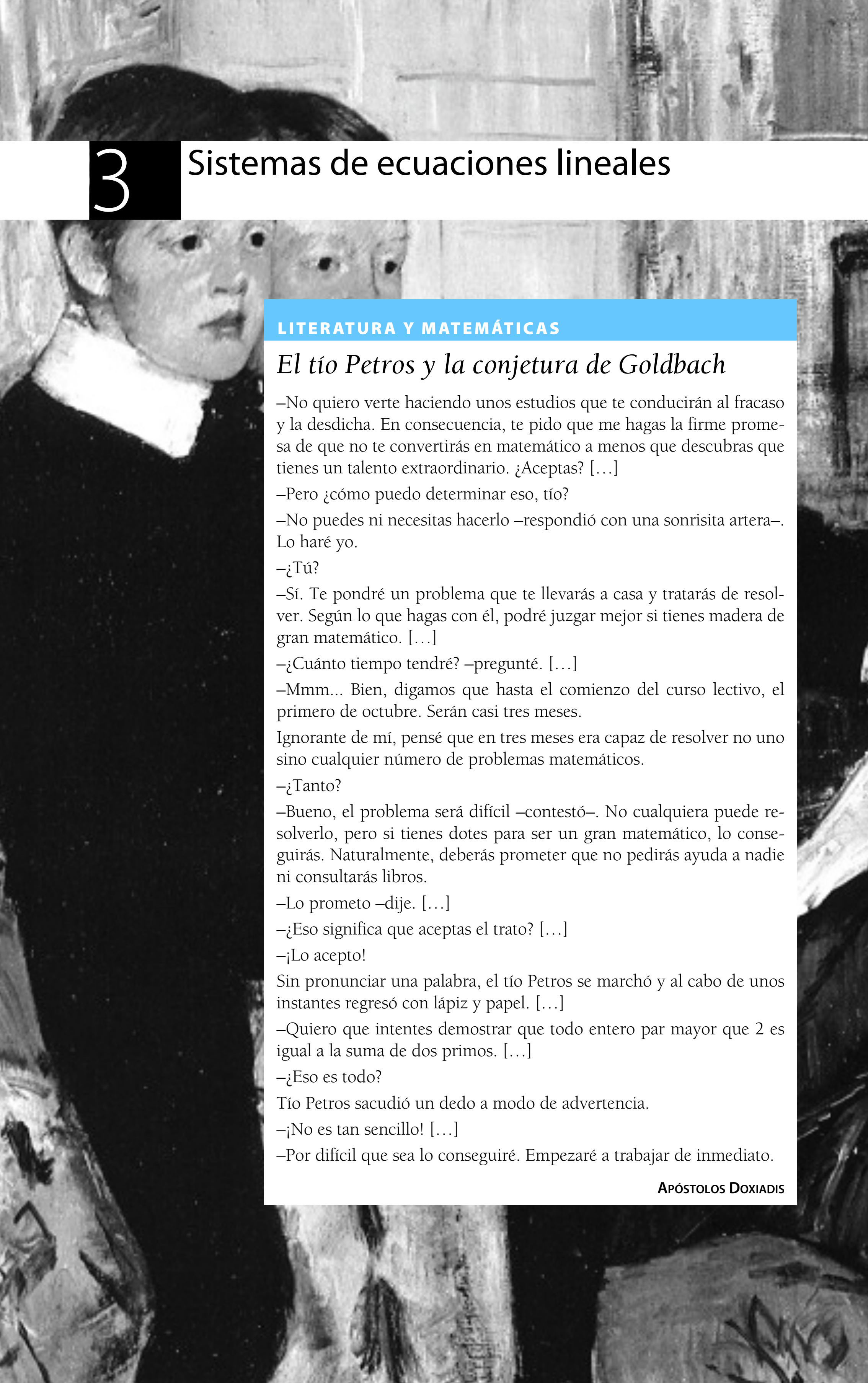


3 Sistemas de ecuaciones lineales

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El tío Petros y la conjetura de Goldbach

–No quiero verte haciendo unos estudios que te conducirán al fracaso y la desdicha. En consecuencia, te pido que me hagas la firme promesa de que no te convertirás en matemático a menos que descubras que tienes un talento extraordinario. ¿Aceptas? […]

–Pero ¿cómo puedo determinar eso, tío?

–No puedes ni necesitas hacerlo –respondió con una sonrisita artera–. Lo haré yo.

–¿Tú?

–Sí. Te pondré un problema que te llevarás a casa y tratarás de resolver. Según lo que hagas con él, podré juzgar mejor si tienes madera de gran matemático. […]

–¿Cuánto tiempo tendré? –pregunté. […]

–Mmm... Bien, digamos que hasta el comienzo del curso lectivo, el primero de octubre. Serán casi tres meses.

Ignorante de mí, pensé que en tres meses era capaz de resolver no uno sino cualquier número de problemas matemáticos.

–¿Tanto?

–Bueno, el problema será difícil –contestó–. No cualquiera puede resolverlo, pero si tienes dotes para ser un gran matemático, lo conseguirás. Naturalmente, deberás prometer que no pedirás ayuda a nadie ni consultarás libros.

–Lo prometo –dije. […]

–¿Eso significa que aceptas el trato? […]

–¡Lo acepto!

Sin pronunciar una palabra, el tío Petros se marchó y al cabo de unos instantes regresó con lápiz y papel. […]

–Quiero que intentes demostrar que todo entero par mayor que 2 es igual a la suma de dos primos. […]

–¿Eso es todo?

Tío Petros sacudió un dedo a modo de advertencia.

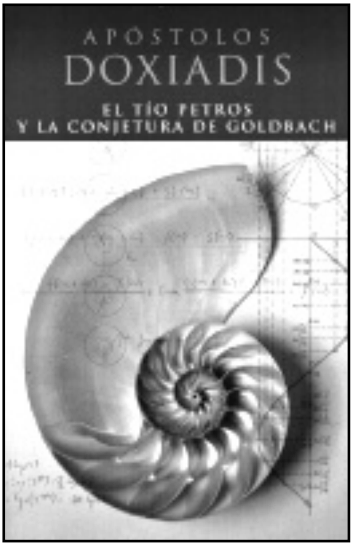
–¡No es tan sencillo! […]

–Por difícil que sea lo conseguiré. Empezaré a trabajar de inmediato.

APÓSTOLOS DOXIADIS

El tío Petros y la conjetura de Goldbach

Apóstolos Doxiadis



Petros Papachristos vivía en una casa a las afueras de Atenas, retirado del mundo, sin mujer ni hijos, ocupado solo en cuidar el jardín y jugar al ajedrez. Había sido un matemático notable, aunque para sus dos hermanos menores, que mantenían con su esfuerzo la empresa heredada del padre, era el «fiasco de la familia». En cambio, uno de sus sobrinos, el narrador de la historia contenida en esta novela, lo admiraba por su pasada reputación. Cuando acabó el penúltimo curso del Bachillerato, un día le preguntó si también él podría llegar a ser un buen matemático. La respuesta y la conversación con el tío Petros se recogen en el texto seleccionado.

El joven acepta la prueba que le propone su tío y que consiste en resolver a lo largo del verano, sin consultar los libros, el siguiente problema: demostrar que todo entero par mayor que 2 es igual a la suma de dos primos. Después de llenar durante los meses estivales cientos de cuartillas que acabaron en la papelera, el joven no logró demostrar esa «sencilla» conjetura. Admitió su incapacidad y, cumpliendo su promesa, se matriculó en la licenciatura de Económicas, en una de las mejores universidades norteamericanas. En su tercer año, le tocó compartir habitación con Sammy Epstein, un muchacho famoso entre los estudiantes del primer ciclo porque era un prodigio de las matemáticas. En su primer encuentro con él, le pide que resuelva el problema que le había propuesto el tío Petros. Y esta fue su respuesta:

–Si pudiera probar eso, tío, no estaría aquí cenando contigo; ya sería catedrático, quizás incluso tendría la medalla Fields, el Nobel de las matemáticas. […]
La afirmación que acabas de hacer es la conjetura de Goldbach, ¡uno de los problemas irresueltos más difíciles de todos los campos de las matemáticas! […]
Lo afirmó por primera vez un matemático llamado Goldbach en una carta dirigida a Euler. Aunque se ha demostrado que es verdad incluso en números primos altísimos, nadie ha conseguido formular una prueba general. […]

Descubierta la «broma», el joven griego decide vengarse, y esa es la trama de la segunda parte de esta novela, en la que se narra la lucha de una persona por construir las matemáticas: sus tanteos, sus desánimos, sus éxitos y fracasos.

Comprueba que la conjetura de Goldbach se cumple para todos los números pares menores que 20. Halla un número par que sea, a la vez, suma de un número primo con 11 y de otro número primo con 17, siendo ambos números primos menores que 30.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$4 = 2 + 2$	$6 = 3 + 3$	$8 = 3 + 5$	$10 = 3 + 7$
$12 = 5 + 7$	$14 = 3 + 11$	$16 = 5 + 11$	$18 = 7 + 11$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$11 + 29 = 40$

$17 + 23 = 40$

Sistemas de ecuaciones lineales

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -1 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array}\right.$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -1 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$

002 Escribe tres ecuaciones equivalentes a estas.

a) $x - 2 = 7$ b) $2x = -3$ c) $\frac{x}{2} - 4 = 6$

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$x - 9 = 0$ $2x - 4 = 14$ $2 - x = -7$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$4x + 6 = 0$ $1 - 6x = 10$ $10x + 15 = 0$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$x - 8 = 12$ $16 - 2x = -24$ $3x = 60$

003 Escribe dos sistemas equivalentes a estos.

a) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 3 \end{array}\right\}$

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:
$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right\}$

b) Aunque el sistema es incompatible, podemos considerar sistemas equivalentes. Los siguientes sistemas se han obtenido multiplicando las ecuaciones por una constante:
$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 4x - 4y = 6 \end{array}\right\}$

ACTIVIDADES

001 Escribe una ecuación con tres incógnitas de coeficientes 4, −1 y 1, respectivamente, y con término independiente −2.
Calcula tres soluciones de esta ecuación.

La ecuación es $4x - y + z = -2$, y tres soluciones son:
$x = 1$, $y = 6$ y $z = 0$
$x = -1$, $y = 0$ y $z = 2$
$x = 0$, $y = 2$ y $z = 0$

002 **Determina una solución de este sistema:**

$$\left.\begin{aligned} -x - y + z &= 0 \\ -2x &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $x = 0,\ y = 2,\ z = 2$

003 **Clasifica estos sistemas según su número de soluciones.**

a) $\left.\begin{aligned} -2x + y &= 2 \\ 2x - y &= -2 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} -x + 2y &= 4 \\ 2x - 4y &= 1 \end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}\right\}$

a) Tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible indeterminado.

b) No tiene solución. El sistema es incompatible.

c) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned}\right.$

Tiene solución única. El sistema es compatible determinado.

004 **Convierte este sistema en un sistema escalonado y resuélvelo.**

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 2z &= 1 \\ -x &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 2z &= 1 \\ -x \qquad &= 5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 2z &= 1 \\ -y - z &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 2z &= 1 \\ z &= 7 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -5 \\ y &= 13 \\ z &= 7 \end{aligned}\right.$$

005 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.**

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ -x - y + z &= 0 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} y - z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 3 \\ 3x \qquad - 2z &= 7 \end{aligned}\right\}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 1 + \lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}\right.$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 7 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 3 \\ y - z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}\right.$$

006 Resuelve aplicando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r} y+z=-5 \\ 2x-y \qquad =0 \\ x \qquad +z=-4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x-\ y+\ z+\ t=4 \\ 3x-2y \qquad -\ t=-2 \\ x+2y-2z-\ t=0 \\ y+\ z-4t=-4 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\to \left.\begin{array}{r} x \qquad +z=-4 \\ y+z=-5 \\ -z=\ \ 3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-3 \end{array}\right.$

b) $\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 22 \end{array}\right)$

$\to \left.\begin{array}{r} x+2y-\ \ 2z-\ \ \ t=0 \\ y+\ \ \ z-\ \ 4t=-4 \\ 14z-30t=-34 \\ -2t=22 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-19 \\ y=-22 \\ z=-26 \\ t=-11 \end{array}\right.$

007 Discute estos sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y-2z=1 \\ -x-\ y+\ z=0 \\ y-\ z=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -2x+\ y-\ z=1 \\ 2x-2y-\ z=3 \\ -y-2z=7 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

008 **Discute utilizando el método de Gauss.**

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z - 2t &= -5 \\ 2x - y + - t &= 0 \\ x + + z - 3t &= -2 \\ -x + y - 2z + t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Sistema incompatible

009 **Escribe mediante ecuaciones este sistema, y resuélvelo aplicando el método de Gauss.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ -2x + y - z &= -2 \\ -2y + z &= -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ 5y - 5z &= 0 \\ -5z &= -5 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right.$$

010 **Determina la expresión matricial de este sistema, y resuélvelo como si fuera una ecuación matricial.**

$$\left.\begin{aligned} -3x + y + 2z &= 0 \\ -x - 2y + z &= -2 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B \qquad |A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right.$$

011 **Utiliza el teorema de Rouché-Fröbenius para discutir este sistema, y resuélvelo por el método de Gauss.**

$$\left.\begin{array}{r}2x-3y+\ z=-2\\-x-\ y+2z=0\\x-4y+3z=-2\end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\-1&-1&2\\1&-4&3\end{pmatrix}\qquad A^*=\left(\begin{array}{rrr|r}2&-3&1&-2\\-1&-1&2&0\\1&-4&3&-2\end{array}\right)$$

$|A|=0$

$$\begin{vmatrix}2&-3\\-1&-1\end{vmatrix}=-5\neq 0\rightarrow \text{Rango }(A)=2$$

$$\begin{vmatrix}2&-3&-2\\-1&-1&0\\1&-4&-2\end{vmatrix}=0\rightarrow \text{Rango }(A^*)=2$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

$$\left(\begin{array}{rrr|r}2&-3&1&-2\\-1&-1&2&0\\1&-4&3&-2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&-4&3&-2\\-1&-1&2&0\\2&-3&1&-2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&-4&3&-2\\0&-5&5&-2\\0&5&-5&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&-4&3&-2\\0&-5&5&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-4y+3z=-2\\-5y+5z=-2\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-2+5\lambda}{5}\\y=\dfrac{2+5\lambda}{5}\\z=\lambda\end{cases}\quad \text{con } \lambda\in\mathbb{R}$$

012 **Discute este sistema utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius, y resuélvelo utilizando el método de Gauss.**

$$\left.\begin{array}{r}x+3y-2z=1\\-2x-3y+\ z=0\\-x\qquad -\ z=7\end{array}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-2&-3&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\qquad A^*=\left(\begin{array}{rrr|r}1&3&-2&1\\-2&-3&1&0\\-1&0&-1&7\end{array}\right)$$

$|A|=0$

$$\begin{vmatrix}1&3\\-2&-3\end{vmatrix}=3\neq 0\rightarrow \text{Rango }(A)=2$$

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\-2&-3&0\\-1&0&7\end{vmatrix}=18\neq 0\rightarrow \text{Rango }(A^*)=3$$

Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3\rightarrow$ Sistema incompatible

013 **Resuelve este sistema utilizando la regla de Cramer, si es posible.**

$$\left.\begin{aligned} -x + 2y - z &= 2 \\ x - y + 2z &= 1 \\ -2x + z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 1$$

014 **Resuelve este sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer, si es posible.**

$$\left.\begin{aligned} -2x + y - z &= 4 \\ -x - 3y + z &= -8 \\ -2y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Se puede aplicar la regla de Cramer.}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -8 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_y| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -1 & -8 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \quad |A_z| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 12$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = 2 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -2$$

015 **Resuelve este sistema:**

$$\left.\begin{aligned} 5x - y + 2z &= 0 \\ -2x + y - z &= 0 \\ -x - y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

La solución es: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

016 **Escribe un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de cuatro ecuaciones y que tenga:**

a) Solución única.

b) Infinitas soluciones.

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ x+y-z-t=0 \\ 2x+y-z\phantom{{}+t}=0 \\ y+z+t=0 \end{array}\right\}$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ x+y-z-t=0 \\ x+y\phantom{{}+z+t}=0 \\ y+z+t=0 \end{array}\right\}$$

017 **Discute este sistema en función de los valores de m.**

$$\left.\begin{array}{r} -x+y-z=-1 \\ 4x-2y+2z=2m \\ -3x-2y+mz=-4 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix} = 4-2m$$

- Si $m \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

- Si $m = 2 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3$$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible

018 **Discute el sistema según los valores de a.**

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+3y-z=0 \end{array}\right\}$$

El sistema es homogéneo $\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) $\rightarrow$ Sistema compatible

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a + 63$$

- Si $a \neq -9 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow$$ Rango $(A) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

019 **Resuelve este sistema en función de los valores de m.**

$$\left.\begin{aligned} -x + y - z &= -1 \\ 4x - 2y + 2z &= 2m \\ -3x - 2y + mz &= -4 \end{aligned}\right\}$$

Si $m \neq 2 \rightarrow |A| = 4 - 2m \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2m & -2 & 2 \\ -4 & -2 & m \end{vmatrix} = -2m^2 + 6m - 4 = -2(1-m)(2-m)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2m & 2 \\ -3 & -4 & m \end{vmatrix} = -2(m^2 + m - 7)$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2m \\ -3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 22 - 10m$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-2(1-m)(2-m)}{4-2m} = -1 + m$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2(m^2+m-7)}{4-2m} = \frac{m^2+m-7}{m-2}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{22-10m}{4-2m} = \frac{5m-11}{m-2}$$

020 **Resuelve el sistema según los valores de a.**

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - ay - 3z &= 0 \\ 5x + 3y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

- Si $a \neq -9 \rightarrow |A| = 7a + 63 \neq 0$
  Como el sistema es homogéneo, la solución es: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

- Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = -z \\ x + 9y = 3z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z & -3 \\ 3z & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -z \\ 1 & 3z \end{vmatrix} = 7z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 0 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{7z}{21} = \frac{z}{3}$$

La solución es: $x = 0,\ y = \frac{\lambda}{3},\ z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

021 **Plantea un sistema para el siguiente problema:**

«Juan, Pepe y Javier quieren reunir 26 € para comprar un regalo. Han decidido que Juan ha de poner el doble que Pepe y Javier debe poner dos terceras partes de lo que ponga Juan. ¿Cuánto debe poner cada uno?».

Sean x, y, z las cantidades que deben poner Juan, Pepe y Javier, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 26 \\ x = 2y \\ z = \dfrac{2}{3}x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rl} x + y + z &= 26 \\ x - 2y &= 0 \\ 2x - 3z &= 0 \end{array}\right\}$$

022 **En una fábrica trabajan 22 personas entre obreros, oficinistas y directivos. El doble del número de oficinistas más el triple del número de directivos, es igual al doble del número de obreros. ¿Es posible saber con estos datos el número de obreros que hay?**

Sean x, y, z los obreros, los oficinistas y los directivos que trabajan en la fábrica, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 22 \\ 2y + 3z = 2x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 22 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \end{array}\right\}$$

El número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema no puede ser compatible determinado. No se puede determinar el número de obreros con estos datos.

023 **El precio de la estancia diaria en un hotel es de 30 € por persona. A los niños se les cobra el 50 % y a los jubilados el 70 % de ese precio.**

Determina el número de niños y de jubilados que había cierto día en el hotel, si se sabe que: había 200 personas, el número de jubilados era igual al 25 % del número de niños y se recaudaron 4.620 € por la estancia de todos.

Sean x, y, z el número de personas que no son niños ni jubilados, el número de niños y el número de jubilados, respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=200\\ z&=0{,}25y\\ 30x+15y+21z&=4.620\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+\quad y+\quad z&=200\\ 0{,}25y-\quad z&=0\\ 30x+\quad 15y+21z&=4.620\end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200\\ 0 & 0{,}25 & -1 & 0\\ 30 & 15 & 21 & 4.620\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200\\ 0 & 1 & -4 & 0\\ 0 & -15 & -9 & 1.380\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200\\ 0 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -69 & -1.380\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x+y+\quad z&=200\\ y-\quad 4z&=0\\ -69z&=-1.380\end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=100\\ y&=80\\ z&=20\end{aligned}\right.$$

Hay 80 niños, 20 jubilados y 100 personas que no son niños ni jubilados.

024 **El presupuesto para muebles de un instituto es cinco veces la suma del de libros más el de material de oficina. El presupuesto para libros es el triple del de material de oficina. La suma de lo presupuestado para muebles y material de oficina es 7 veces lo destinado a libros.**

a) ¿Se puede saber con estos datos el dinero destinado a cada compra?

b) Determina las cantidades si para libros hay 1.800 €.

a) Sean x, y, z los presupuestos para muebles, libros y material de oficina, respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} x&=5(y+z)\\ y&=3z\\ x+z&=7y\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x-5y-5z&=0\\ y-3z&=0\\ x-7y+\quad z&=0\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -5\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & -7 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -5\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2.

El sistema es compatible indeterminado. No podemos saber cuánto se ha destinado a cada compra con estos datos.

b) Si $y=1.800 \rightarrow z=600 \qquad x=5\cdot 2.400=12.000$

Para muebles se destinan 12.000 €, y para material de oficina, 600 €.

025 Resuelve aplicando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r}2x+3y+5z=1\\4x+7y+13z=-1\\2x+3y+7z=-3\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}x+2y+z=1\\x+y-z=1\\2x+3y+z=1\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}5x+2y+3z=5\\-x+3y-2z=12\\x+y+z=2\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}3y+z=3\\3x+4y=11\\-2x+2z=-8\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}x-2y-z=-1\\x-y+2z=2\\x+2y+z=3\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}-p+3q-r=12\\3p+2r=7\\5p-6q+4r=5\end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r}3x-y+2z=7\\-x+2y+5z=-2\\3x+4y+19z=8\end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r}2a-4b-c=-7\\-3a+2b-3c=-4\\-a-3b-8c=-12\end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&5&1\\4&7&13&-1\\2&3&7&-3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&5&1\\0&1&3&-3\\0&0&2&-4\end{array}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+3y+5z=1\\y+3z=-3\\2z=-4\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=3\\z=-2\end{array}\right.$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\1&1&-1&1\\2&3&1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&-2&0\\0&-1&-1&-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-1&-2&0\\0&0&1&-1\end{array}\right)$

$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y+z=1\\-y-2z=0\\z=-1\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-2\\y=2\\z=-1\end{array}\right.$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c}5&2&3&5\\-1&3&-2&12\\1&1&1&2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\-1&3&-2&12\\5&2&3&5\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&4&-1&14\\0&-3&-2&-5\end{array}\right)$

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&4&-1&14\\0&0&-11&22\end{array}\right)\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=2\\4y-z=14\\-11z=22\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=3\\z=-2\end{array}\right.$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c}0&3&1&3\\3&4&0&11\\-2&0&2&-8\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&4&0&11\\0&3&1&3\\-2&0&2&-8\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&4&0&11\\0&3&1&3\\0&8&6&-2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&4&0&11\\0&3&1&3\\0&0&10&-30\end{array}\right)$

$\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x+4y=11\\3y+z=3\\10z=-30\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=2\\z=-3\end{array}\right.$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&-1\\1&-1&2&2\\1&2&1&3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&-1\\0&1&3&3\\0&4&2&4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&-1\\0&1&3&3\\0&0&-10&-8\end{array}\right)$

$\rightarrow\left.\begin{array}{r}x-2y-z=-1\\y+3z=3\\-10z=-8\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=\dfrac{3}{5}\\z=\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 9 & -1 & 65 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

g) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 10 & 34 & 2 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 5z = -2 \\ 5y + 17z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{12 - 9\lambda}{5} \\ y = \dfrac{1 - 17\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & -7 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -8 & -12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -1 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & -10 & -17 & -31 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & 0 & 23 & -21 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 3y + 8z = 12 \\ 11y + 21z = 32 \\ 23z = -21 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{123}{23} \\ y = \dfrac{107}{23} \\ z = -\dfrac{21}{23} \end{array}\right.$

026 Discute los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 6x - 3y = 9 \\ -4x + 2y = -6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x - 3y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 4 \\ 2x - 2y + z = 6 \\ 5x - 5y + 4z = 16 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b + 2c = 1 \\ 2a + b + c = 0 \\ 3b + 2c = -1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3z = 4 \\ -x + 3y + 4z = 6 \\ -2x + 11y + 19z = 28 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} -4p + 2q = -8 \\ 6p - 3q = 5 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 3x - 3y = 3 \\ 2x \quad = 0 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 5 \\ 5x + 7y + z = 1 \end{array}\right\}$

i) $\left.\begin{array}{r} 3a + b - c = 2 \\ -2a + 3b + 2c = 5 \\ 11b + 4c = 19 \end{array}\right\}$

j) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2(b - c) = 9 - c \\ -a + 5(b - 2) = b - 4 \\ 2(7b - c) = 5 - c \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ -4 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & -5 & 4 & 16 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \\ -2 & 11 & 19 & 28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 11 & 19 & 28 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 11 & 16 \\ 0 & 5 & 11 & 16 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

f) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 6 & -3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible

g) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible determinado

h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -13 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$

Sistema incompatible

i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado

j) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b - c = 9 \\ -a + 4b \quad\;\; = 6 \\ 14b - c = 5 \end{array}\right\}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 14 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 14 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 14 & -1 & 27 \\ 0 & 14 & -1 & 5 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 14 & -1 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible

027 Obtén todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -1 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x + 7y + z = -4 \end{array}\right\}$$

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Ejercicio B. Problema 1)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = -1 \\ -3y - z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

028 Discute por el método de Gauss el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 2 \\ -x + 3y + z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

029 Resuelva y clasifique el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 + z \\ 2x + z = 2 + y \\ y = z \end{array}\right\}$$

(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 1)

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ y - z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

030 Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$$

Transformarlo, si es que es posible, en compatible indeterminado cambiando solamente un signo.

(Cantabria. Junio 2007. Ejercicio 1. Opción B)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ -2y \quad = 0 \\ -2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

031 **Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = (x \quad m)$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$.**

a) Si $(AB)(2C - D) = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x, y) en función de m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Cuándo es única? Resuelve el sistema si $m = 4$.

(Asturias. Junio 2006. Bloque 1)

a) $(AB)(2C - D) = E \rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (x \quad m)\right] \cdot \left[2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3x & 3m \\ x & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x + 3m \\ x + m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 3m = -y + 2m + 2 \\ x + m = -2x - my + 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + \quad y = -m + 2 \\ 3x + my = -m + 5 \end{array}\right\}$$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & m \end{vmatrix} = 3m - 3$

- Si $m = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 1$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A^*) = 2 \neq$ Rango $(A) \rightarrow$ Sistema incompatible

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado $\rightarrow$ El sistema tiene una solución única.

Si $m = 4 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + \quad y = -2 \\ 3x + 4y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \end{array}\right.$

032 Escribe mediante ecuaciones estos sistemas.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + 5z = 3 \\ x + 2y - z = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} a + 4b = -1 \\ 2a + 3b = 4 \\ a + 5b = 2 \\ -6a + 7b = 5 \end{array}\right\}$

033 Escribe en forma matricial estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - 3z = -2 \\ -x - y + 2z = 3 \\ 3y - 5z = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} p + q + r - s = 3 \\ 2p - q + 2s = 5 \\ q + 3r - 5s = -1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y - z + t - v = -1 \\ 2x - 3z + 6v = 8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 3 \\ -x + z = -7 \\ 2x + y + 4z = 5 \\ 3y - 9z = -1 \end{array}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

034 Sea $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la matriz de sus términos independientes. Se pide:

a) Escribir las tres ecuaciones que forman el sistema.

b) Obtener todas las soluciones del sistema.

(C. Valenciana. Junio 2005. Ejercicio B. Problema 1)

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + z = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - 2\lambda \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

035 Escribe en forma matricial y luego resuelve empleando la matriz inversa.

a) $\left.\begin{aligned} 4x - \ \ y &= 18 \\ 3x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x \qquad - z &= -7 \\ 2x + y - 3z &= -26 \\ 4y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \\ z = 8 \end{cases}$

036 Dado el sistema:

$\left.\begin{aligned} 2x - y \qquad &= 2 \\ x - y + z &= 2 \\ y - z &= -1 \end{aligned}\right\}$

exprésalo matricialmente, $AX = B$, calcula la matriz inversa de A y resuélvelo.

(Galicia. Septiembre 2002. Bloque 1. Ejercicio 1)

Definimos: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

037 Dada la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

obtener de forma razonada los valores de x, y, z.

(C. Valenciana. Junio 2003. Ejercicio B. Problema 1)

$$\begin{pmatrix} 3x - 2y \\ -2x + y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ -2x + 2y \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 2y \qquad = -10 \\ -2x + 2y \qquad = 6 \\ y + z = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

038 Discute los sistemas de ecuaciones lineales utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - 5z = -8 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \\ 4x + 9y - 10z = -8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 8x - 6y + 2z = -1 \\ 3x + y - z = 10 \\ -x + 3y - 2z = 5 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b - 6c + 3d = 7 \\ a - b + 2c - d = 6 \\ 7a + b - 6c + 3d = 32 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b - 6c + 3d = 7 \\ a - b + 2c - d = 6 \\ 6a - b \qquad = 3 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 2(x + y) - 3y + 5 = 0 \\ 3 = x - 2(x + 2y) \\ 3(x + y + 2) + 2 = 0 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} a + 5b \qquad = 7 \\ -2a + 2b + 3c = -2 \\ -a + 3b + 2c = 1 \\ 4b + 2c = 4 \end{array}\right\}$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 4 & 9 & -10 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -10 & -8 \end{array}\right)$

$|A| = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 9 & -8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

b) $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$|A| = -14 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -6 & 3 & 32 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 <$ n.º de incógnitas

Sistema compatible indeterminado

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 110 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}(A^*) = 3$

Rango $(A) \neq$ Rango $(A^*) \rightarrow$ Sistema incompatible

e) $\left.\begin{array}{r} 2x - \ \ y = -5 \\ x + 4y = -3 \\ 3x + 3y = -8 \end{array}\right\}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & -8 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Rango $(A^*) = 2$
Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

039 **Resuelve, aplicando la regla de Cramer, estos sistemas compatibles determinados.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + \ \ y = 2 \\ -3x - 2y = -1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2a - 3b = 6 \\ -a + 5b = -3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3a + 2b + 2c = 1 \\ 2a + \ \ b + \ \ c = 0 \\ 3b + 2c = -1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 33 + 2z \\ 3x = 19 - y \\ 10 + 3z = x + 2y \end{array}\right\}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 3 \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = -4$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a| = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 21 \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = 3 \qquad b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = 0$

c) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_a| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \qquad |A_c| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = -1 \qquad b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = -5 \qquad c = \dfrac{|A_c|}{|A|} = 7$

d) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 26 \neq 0 \rightarrow$ Se puede aplicar la regla de Cramer.

$|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 5 & -2 \\ 19 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 130 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 33 & -2 \\ 3 & 19 & 0 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = 104 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 33 \\ 3 & 1 & 19 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 26$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 5 \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = 4 \qquad z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = 1$

040 **Resuelve, aplicando la regla de Cramer, estos sistemas compatibles indeterminados.**

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - 2y = 6 \\ -6x + 3y = -9 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 6 \\ -3x + y - 2z = -3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 6 \\ -3x + y - 2z = -3 \\ 2x - 3y + z = -3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 4 \\ x - y + z = 1 \\ y - z + t = 1 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 2a - b = 0 \\ 11a - b - 3c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3p - 3q + 11r = 0 \\ 4p + 7r = 0 \\ 5p + 3q + 3r = 0 \\ -6p - 6q + r = 0 \end{array}\right\}$

a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Consideramos la ecuación: $4x - 2y = 6$

La solución es: $x = \lambda,\ y = 2\lambda - 3$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ Consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 6 - z \\ -3x + y &= -3 + 2z \end{aligned}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 - z & 2 \\ -3 + 2z & 1 \end{vmatrix} = 12 - 5z$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 6 - z \\ -3 & -3 + 2z \end{vmatrix} = 15 - z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{12 - 5z}{7} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{15 - z}{7}$$

La solución es: $x = \dfrac{12 - 5\lambda}{7}$, $y = \dfrac{15 - \lambda}{7}$, $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y &= 6 - z \\ -3x + y &= -3 + 2z \end{aligned}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 - z & 2 \\ -3 + 2z & 1 \end{vmatrix} = 12 - 5z$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 6 - z \\ -3 & -3 + 2z \end{vmatrix} = 15 - z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{12 - 5z}{7} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{15 - z}{7}$$

La solución es: $x = \dfrac{12 - 5\lambda}{7}$, $y = \dfrac{15 - \lambda}{7}$, $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 4 - t \\ x - y + z &= 1 \\ y - z &= 1 - t \end{aligned}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 - t & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 - t & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 2t \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 2 - t$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 - t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 - t & -1 \end{vmatrix} = 3 - t \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{3 - t}{2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 - t \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - t \end{vmatrix} = 1 + t \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{1 + t}{2}$$

La solución es: $x = 2 - \lambda$, $y = \dfrac{3 - \lambda}{2}$, $z = \dfrac{1 + \lambda}{2}$, $t = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 11 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} 2a - b &= 0 \\ 11a - b &= 3c \end{aligned}\right\}$$

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3c & -1 \end{vmatrix} = 3c \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 3c \end{vmatrix} = 6c$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = \frac{c}{3} \qquad b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{2c}{3}$$

La solución es: $a = \dfrac{\lambda}{3}$, $b = \dfrac{2\lambda}{3}$, $c = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

f) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ -6 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{aligned} 3p - 3q &= -11r \\ 4p &= -7r \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} p = -\dfrac{7}{4}\lambda \\ q = \dfrac{23}{12}\lambda & \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ r = \lambda \end{cases}$$

041 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Cramer.

$$\left.\begin{aligned} x + y - 2z &= -6 \\ x \quad + z &= 5 \\ 2x - y \quad &= 11 \end{aligned}\right\}$$

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio B. Problema 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 15 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix} = -25 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 10$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 3 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -5 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = 2$$

042 Discute y resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ x+y-3z=3 \\ 2x+3y+z=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=3 \\ 2y+3z=2 \\ 3x+y+3z=7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x+4y+2z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 16x+17y+7z=0 \\ 4x-y+4z=1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} a+c=0 \\ b-c=1 \\ a+3b+c=5 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} a+c=0 \\ b-c=1 \\ a+3b-2c=5 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+t=0 \\ x+2y-z+4t=-1 \\ 3x-4y+z-2t=1 \end{array}\right\}$

g) $\left.\begin{array}{r} 2a-b+c=7 \\ 3a+2b-2c=1 \end{array}\right\}$

h) $\left.\begin{array}{r} 2x-4y+z=7 \\ -3x+6y-2z=4 \\ 11x-22y+6z=24 \end{array}\right\}$

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=\text{Rango }(A^*)=3=\text{n.º de incógnitas}$

Sistema compatible determinado

$|A_x|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=12 \qquad |A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-12 \qquad |A_z|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=3$

$x=\frac{|A_x|}{|A|}=-4 \qquad y=\frac{|A_y|}{|A|}=4 \qquad z=\frac{|A_z|}{|A|}=-1$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0 \rightarrow \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \text{Rango }(A^*)=2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+y=3-2z \\ 2y=2-3z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3-2z & 1 \\ 2-3z & 2 \end{vmatrix} = 4 - z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3-2z \\ 0 & 2-3z \end{vmatrix} = 2 - 3z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{4-z}{2} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{2-3z}{2}$$

La solución es: $x = \dfrac{4-\lambda}{2}$, $y = \dfrac{2-3\lambda}{2}$, $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 16 & 17 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 17 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 16 & 17 & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 21 \rightarrow \text{Rango } (A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 17 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3 = \text{n.° de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & -13 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 0 \\ x - 2y \quad\;\; = 0 \\ -21y \quad\;\; = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{21} \\ y = -\dfrac{1}{21} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 3 = \text{n.° de incógnitas}$$

Sistema compatible determinado

$$|A_a| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad |A_c| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$a = \frac{|A_a|}{|A|} = -\frac{2}{3} \qquad b = \frac{|A_b|}{|A|} = \frac{5}{3} \qquad c = \frac{|A_c|}{|A|} = \frac{2}{3}$$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3 \neq \text{Rango } (A) \rightarrow$ Sistema incompatible

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = \text{Rango } (A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas

Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x - y = -t \\ x + 2y = -1 + z - 4t \end{array}\right\}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ -1 + z - 4t & 2 \end{vmatrix} = -1 + z - 6t$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{-1 + \lambda - 6\mu}{5}$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -t \\ 1 & -1 + z - 4t \end{vmatrix} = -2 + 2z - 7t$

$y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{-2 + 2\lambda - 7\mu}{5}$

La solución es: $x = \dfrac{-1 + \lambda - 6\mu}{5}$, $y = \dfrac{-2 + 2\lambda - 7\mu}{5}$,

$z = \lambda$, $t = \mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

g) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \to \text{Rango}\,(A) = \text{Rango}\,(A^*) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$

Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2a - b = 7 - c \\ 3a + 2b = 1 + 2c \end{array}\right\}$

$|A_a| = \begin{vmatrix} 7-c & -1 \\ 1+2c & 2 \end{vmatrix} = 15$ $\qquad |A_b| = \begin{vmatrix} 2 & 7-c \\ 3 & 1+2c \end{vmatrix} = 7c - 19$

$a = \dfrac{|A_a|}{|A|} = \dfrac{15}{7}$ $\qquad b = \dfrac{|A_b|}{|A|} = \dfrac{7c-19}{7}$

La solución es: $a = \dfrac{15}{7}$, $b = \dfrac{7\lambda - 19}{7}$, $c = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

h) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 11 & -22 & 6 \end{pmatrix}$

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & -2 & 4 \\ 11 & -22 & 6 & 24 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 11 & -22 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to \text{Rango}\,(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & -2 & 4 \\ 11 & 6 & 24 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango}\,(A^*) = 2$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x + z = 7 + 4y \\ -3x - 2z = 4 - 6y \end{array}\right\}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 7+4y & 1 \\ 4-6y & -2 \end{vmatrix} = -18 - 2y$ $\qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 7+4y \\ -3 & 4-6y \end{vmatrix} = 29$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = 18 + 2\lambda$ $\qquad z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = -29$

La solución es: $x = 18 + 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = -29$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

043 Dadas las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ x + \ \ y + z &= 3 \end{aligned}$$

añadir una ecuación lineal de modo que el sistema resultante sea:

a) Compatible determinado y resolverlo.

b) Compatible indeterminado y dar su solución.

c) Incompatible y justificarlo.

(Navarra. Septiembre 2007. Ejercicio 1. Opción A)

a) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ x - y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x \qquad\quad &= 4 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ 4x + 3y \qquad &= 8 \\ 2x \qquad\quad &= 4 \end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 0 \\ z &= 1 \end{aligned}\right.$$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 4x + 3y \qquad &= 8 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ 4x + 3y \qquad &= 8 \\ 4x + 3y \qquad &= 8 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ 4x + 3y \qquad &= 8 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\to \left\{\begin{aligned} x &= -1 + 3\lambda \\ y &= 4 - 4\lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}\right.$$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 0 &= 4 \end{aligned}\right\} \to \text{Sistema incompatible}$$

044 Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes:

$x - 3y + 2z = 0 \qquad -2x + y - z = 0 \qquad x - 8y - z = 0$

(Andalucía. Año 2007. Modelo 3. Opción B. Ejercicio 1)

Al ser un sistema homogéneo, es siempre compatible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 30 \neq 0 \to$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas

Sistema compatible determinado $\to$ La solución es: $x = y = z = 0$

045 El siguiente sistema de ecuaciones depende de un parámetro p.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + \ \ z &= p \\ 2x + 3y + \ \ z &= p \\ x + \ \ y - pz &= p \end{aligned}\right\}$$

Discute este sistema de ecuaciones lineales en función de los distintos valores del parámetro p.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & p \\ 2 & 3 & 1 & p \\ 1 & 1 & -p & p \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -p \end{vmatrix} = p \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & p \\ 2 & 3 & p \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = -p$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $p \neq 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = 0 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

046 Discute el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro a.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + 2y + 4z = -1 \\ 3x + y + a^2z = 3a \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & a^2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & a^2 & 3a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3a \end{vmatrix} = -3a - 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = -1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

047 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} -x - y + 3z = 0 \\ 2x \qquad + bz = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{array}\right\}$$

con b un parámetro real, calcular:

a) El rango de la matriz de los coeficientes del sistema según los valores del parámetro b.

b) Los valores del parámetro b para los que el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado y hallar la solución del sistema para los valores de b calculados.

c) **Los valores del parámetro *b* para los que el sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado y hallar las soluciones del sistema para los valores de *b* calculados.**

(Aragón. Septiembre 2001. Opción A. Cuestión 1)

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & b \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2b + 20 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

- Si $b \neq -10 \rightarrow$ Rango $(A) = 3$
- Si $b = -10 \rightarrow$ Rango $(A) = 2$

b) Al ser un sistema homogéneo, es compatible determinado si el rango de la matriz de los coeficientes es igual que el número de incógnitas, es decir, si $b \neq -10$.

En este caso, la solución es: $x = y = z = 0$

c) El sistema es compatible indeterminado si el rango de la matriz de los coeficientes es menor que el número de incógnitas, es decir, si $b = -10$.

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{l} -x - y = -3z \\ 2x \qquad = 10z \end{array}\right\}$

La solución es: $x = 5\lambda,\ y = -2\lambda,\ z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

048 **Discuta en función del parámetro *a* el siguiente sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 5 \\ 5x + y - z = 11 \\ 3x - y + az = 2 \end{array}\right\}$$

(Cataluña. Septiembre 2006. Cuestión 2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & a & 2 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix} = -4a - 12 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

- Si $a \neq -3 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -3 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible

049 Discute este sistema de ecuaciones lineales para los distintos valores del parámetro k.

$$\left.\begin{aligned} x-2y&=4\\ 2x+y&=5\\ 4x-3y&=k \end{aligned}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\\4&-3\end{pmatrix}\qquad A^*=\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&4\\2&1&5\\4&-3&k\end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}=5\neq 0\rightarrow \text{Rango }(A)=2\qquad \begin{vmatrix}1&-2&4\\2&1&5\\4&-3&k\end{vmatrix}=5k-65$$

- Si $k\neq 13\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3\rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $k=13\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

050 Estudiar para los diferentes valores del parámetro a, la existencia de soluciones del sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a-1\\ 2x+y+az&=a\\ x+ay+z&=1 \end{aligned}\right\}$$

y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 1. Cuestión 1)

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&a\\1&a&1\end{pmatrix}\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a-1\\2&1&a&a\\1&a&1&1\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&a\\1&a&1\end{vmatrix}=-a^2+3a-2\qquad \begin{vmatrix}1&1&a-1\\2&1&a\\1&a&1\end{vmatrix}=a^2-2a$$

$$\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\qquad -a^2+3a-2=0\rightarrow\begin{cases}a=1\\a=2\end{cases}$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{1,2\}\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a=1\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3\rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a=2\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2<$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

En este caso, consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} x+y&=1-z\\ 2x+y&=2-2z \end{aligned}\right\}$

$$|A_x|=\begin{vmatrix}1-z&1\\2-2z&1\end{vmatrix}=-1+z\qquad |A_y|=\begin{vmatrix}1&1-z\\2&2-2z\end{vmatrix}=0$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=1-z\qquad y=\frac{|A_y|}{|A|}=0$$

La solución es: $x=1-\lambda,\ y=0,\ z=\lambda$, con $\lambda\in\mathbb{R}$

051 Discutir según los valores de m el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} mx - y - z &= 3 \\ x + 2y + z &= 1 \\ x - 3y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$

Justificar la respuesta.

(Extremadura. Septiembre 2007. Opción B. Problema 1)

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5m + 5 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

- Si $m \neq -1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = -1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

052 Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los distintos valores del parámetro p.

$$\left.\begin{aligned} px + (p+1)z &= p \\ py + z &= p \\ y + pz &= p \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & p+1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} p & 0 & p+1 & p \\ 0 & p & 1 & p \\ 0 & 1 & p & p \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 0 & p+1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p^2 - 1) \qquad \begin{vmatrix} p & 0 & p \\ 0 & p & p \\ 0 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p^2 - p) = p^2(p-1)$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = -1$, como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $p = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado
- Si $p = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

053 Se considera el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+\qquad z=1\\ 3x-5y+\qquad z=4\\ x-\ \ y+(a-2)z=2 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) Halla todas las soluciones para $a = 3$.

(Castilla y León. Septiembre 2007. Bloque B. Pregunta 1)

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ 3 & -5 & 1\\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1\\ 3 & -5 & 1 & 4\\ 1 & -1 & a-2 & 2 \end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 3 & -5 & 1\\ 1 & -1 & a-2 \end{vmatrix}=a-1$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 3 & -5 & 4\\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix} 1 & -2\\ 3 & -5 \end{vmatrix}=1\neq 0$

- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado

$|A_x|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 4 & -5 & 1\\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=6$ $\qquad |A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2$ $\qquad |A_z|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 3 & -5 & 4\\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=3$ $\qquad y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=1$ $\qquad z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=0$

054 ¿Qué valores debe tomar a en el siguiente sistema de ecuaciones lineales para que este sea incompatible? ¿Y para que sea compatible?

$$\left.\begin{array}{r} x+(a-1)y+\ \ z=1\\ 3x+\qquad ay+az=3 \end{array}\right\}$$

$A=\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1\\ 3 & a & a \end{pmatrix}$

$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 1 & 1\\ 3 & a & a & 3 \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & a-1\\ 3 & a \end{vmatrix}=3-2a$ $\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 3 & a \end{vmatrix}=a-3$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas para cualquier valor de a
Sistema compatible indeterminado para cualquier valor de a

055 **Discuta en función del parámetro p el sistema de ecuaciones lineales de matriz ampliada:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & p+5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array}\right)$$

(Cataluña. Junio 2006. Cuestión 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & p+5 & 7 \\ 0 & 0 & p-1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & p+5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & p+5 & 7 \\ 0 & 0 & p-1 \end{vmatrix} = (p+5)(p-1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & p-1 & 0 \end{vmatrix} = -5p+5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \{-5, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado
- Si $p = -5 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible

056 **Clasifica el siguiente sistema para los distintos valores del parámetro p.**

$$\left.\begin{aligned} a + pb - 2c &= 0 \\ pb + c &= 0 \\ 3a + 2b - c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Resuélvelo en los casos en que sea posible.

Al ser un sistema homogéneo sabemos que es compatible para cualquier valor de p.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & -2 \\ 0 & p & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & p & -2 \\ 0 & p & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8p - 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

- Si $p \neq \frac{1}{4} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $p = \frac{1}{4} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

057 Toma el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}(a+1)x+y+z&=a(a+3)\\ x+(a+1)y+z&=a^2(a+3)\\ x+y+(a+1)z&=a^3(a+3)\end{aligned}\right\}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro es incompatible este sistema de ecuaciones?

b) ¿Qué valor debe tomar a para que sea compatible indeterminado?

c) Resuelve el sistema en los casos en que sea compatible.

$$A=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & a(a+3)\\ 1 & a+1 & 1 & a^2(a+3)\\ 1 & 1 & a+1 & a^3(a+3)\end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1\\ 1 & a+1 & 1\\ 1 & 1 & a+1\end{vmatrix}=(a+1)^3+2-3(a+1)=a^3+3a^2=a^2(a+3)$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & a(a+3)\\ 1 & a+1 & a^2(a+3)\\ 1 & 1 & a^3(a+3)\end{vmatrix}=a(a+3)\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1\\ 1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a^2\end{vmatrix}=$$

$$=a(a+3)(a^2(a+1)^2-a^2-a(a+1))=$$

$$=a^2(a+3)(a^3+2a^2-a-1)$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{-3,0\}\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

- Si $a=0\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=1\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

- Si $a=-3\rightarrow A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ y $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)$

  Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=2<$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

Luego no hay ningún valor de a para el que el sistema sea incompatible.
Los valores para los que es compatible indeterminado son 0 y -3.

- Si $a\in\mathbb{R}-\{-3,0\}\rightarrow|A|=a^2(a+3)$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} a(a+3) & 1 & 1\\ a^2(a+3) & a+1 & 1\\ a^3(a+3) & 1 & a+1\end{vmatrix}=-a^2(a+3)(a^2-2)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-a^2(a+3)(a^2-2)}{a^2(a+3)}=-(a^2-2)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a+1 & a(a+3) & 1 \\ 1 & a^2(a+3) & 1 \\ 1 & a^3(a+3) & a+1 \end{vmatrix} = a^2(a+3)(2a-1)$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{a^2(a+3)(2a-1)}{a^2(a+3)} = 2a-1$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & a(a+3) \\ 1 & a+1 & a^2(a+3) \\ 1 & 1 & a^3(a+3) \end{vmatrix} = a^2(a+3)(a^3+2a^2-a-1)$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{a^2(a+3)(a^3+2a^2-a-1)}{a^2(a+3)} = a^3+2a^2-a-1$$

- Si $a = 0$, consideramos la ecuación: $x + y + z = 0$
  La solución es: $x = -\lambda - \mu,\ y = \lambda,\ z = \mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- Si $a = -3$, consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} -2x + \ \ y &= -z \\ x - 2y &= -z \end{aligned}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix} = 3z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} -2 & -z \\ 1 & -z \end{vmatrix} = 3z$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = z \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = z$$

La solución es: $x = \lambda,\ y = \lambda,\ z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

058 **Discute este sistema y resuélvelo cuando $m = 6$.**

$$\left.\begin{aligned} x + \ \ y + \ \ \ z &= 0 \\ 2x + 3y \qquad &= 0 \\ x - 2y + mz &= m \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & m & m \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = m - 7 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} = m$$

- Si $m \neq 7 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = 7 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $m = 6 \rightarrow |A| -1$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -18 \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 12 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 18 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = -12 \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -6$$

059 Discute y resuelve (si son compatibles) los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\left.\begin{array}{r}2x+\ \ y-\ \ z=5\\ x-\ \ y+2z=-3\\ 3x-2y+\ \ z=-2\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}2x-2y=3\\ x+2y=4\\ 3x+\ \ y=0\end{array}\right\}$

(La Rioja. Septiembre 2002. Parte B. Problema 1)

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & 5\\ 1 & -1 & 2 & -3\\ 3 & -2 & 1 & -2\end{array}\right)$

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=10\neq 0\rightarrow \text{Rango }(A)=\text{Rango }(A^*)=3=\text{n.º de incógnitas}$

Sistema compatible determinado

$|A_x|=\begin{vmatrix}5 & 1 & -1\\ -3 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 1\end{vmatrix}=10$ $\qquad |A_y|=\begin{vmatrix}2 & 5 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=20$ $\qquad |A_z|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & -1 & -3\\ 3 & -2 & -2\end{vmatrix}=-10$

$x=\dfrac{|A_x|}{|A|}=1$ $\qquad y=\dfrac{|A_y|}{|A|}=2$ $\qquad z=\dfrac{|A_z|}{|A|}=-1$

b) $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{cc|c}2 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{array}\right)$

$\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6\neq 0\rightarrow \text{Rango }(A)=2$

$\begin{vmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=-47\neq 0\rightarrow \text{Rango }(A^*)=3$

Rango $(A)\neq$ Rango $(A^*)\rightarrow$ Sistema incompatible

060 Discute el sistema y resuélvelo en el caso de que sea compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r}ax-\ \ y-4z=1\\ x+ay-2z=-1\\ y+\ \ z=-a\end{array}\right\}$$

$A=\begin{pmatrix}a & -1 & -4\\ 1 & a & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}a & -1 & -4 & 1\\ 1 & a & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -a\end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -4 \\ 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3 \qquad \begin{vmatrix} a & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = 2a^2 - 3a + 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-3, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -3 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $a = 1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{aligned} -y - 4z &= 1 - x \\ y + z &= -1 \end{aligned}\right\}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1-x & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -x - 3 \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 1-x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = x$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-x-3}{3} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{x}{3}$$

La solución es: $x = \lambda$, $y = \dfrac{-\lambda - 3}{3}$, $z = \dfrac{\lambda}{3}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

061 **a) Discuta el siguiente sistema en función de los valores del parámetro *a*.**

$$\left.\begin{aligned} x + (a+1)y &= 1 \\ ax + 2y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

b) Resuélvalo para el valor de *a* que lo hace indeterminado.

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 1)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ a & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{array}\right)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2 - a - a^2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -2 \end{vmatrix} = -2 - a$$

$$-a^2 - a + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -2 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 1 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado
- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible

b) Si $a = -2$, consideramos la ecuación: $x - y = 1$

La solución es: $x = 1 + \lambda$, $y = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

062 Discute el siguiente sistema de ecuaciones, y resuélvelo en los casos en que sea posible.

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = a^2 \\ x - y \qquad = -a \\ x + ay + z = a \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 0 & -a \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ -1 & 0 & -a \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 2a = -2a(a-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
  Sistema incompatible
- Si $a = 0$ o $a = 1 \rightarrow$ Rango $(A) =$ Rango $(A^*) = 2$
  Sistema compatible indeterminado

Para $a = 0$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y + z = 0 \\ -y = -x \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Para $a = 1$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} y + z = 1 - x \\ -y = -1 - x \end{array}\right\}$

La solución es: $x = \lambda, y = 1 + \lambda, z = -2\lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

063 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcular dos números reales x e y tales que se verifique $A + xA + yI = 0$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 1. Cuestión 1)

$$A + xA + yI = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 2x + y & 1 + x \\ 2 + 2x & 3 + 3x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2 + 2x + y = 0 \\ 1 + x = 0 \\ 2 + 2x = 0 \\ 3 + 3x + y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = -2 \\ x \qquad = -1 \\ 3x + y = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

064 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3 \\ x + 3y + 2z = \alpha \end{array}\right\}$$

a) Demuestra que, para cualquier valor del parámetro real α, el sistema tiene solución única.

b) Halla la solución del sistema en función de α.

c) Determina el valor de α para el que la solución (x, y, z) del sistema satisfaga que $x + y + z = 1$.

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \alpha \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -50 \neq 0$$

Rango (A) = Rango (A^*) = 3 = n.º de incógnitas

Sistema compatible determinado para cualquier valor de α

b) $|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\alpha - 50 \rightarrow x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{10\alpha - 50}{-50} = \dfrac{5 - \alpha}{5}$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = -30\alpha + 30 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-30\alpha + 30}{-50} = \frac{3\alpha - 3}{5}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 15\alpha - 20 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{15\alpha - 20}{-50} = \frac{4 - 3\alpha}{10}$$

c) Si $x + y + z = 1 \rightarrow \dfrac{5 - \alpha}{5} + \dfrac{3\alpha - 3}{5} + \dfrac{4 - 3\alpha}{10} = 1$

$$\rightarrow \alpha = 2 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \\ z = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

065 **Resuelve este sistema cuando sea posible.**

$$\left.\begin{aligned} ax \quad - z &= a \\ ay + 2z &= 0 \\ 3x + y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + a$$

Si $a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
Sistema compatible determinado

$$|A_x| = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{a^2 + 3a}{a^2 + a} = \frac{a+3}{a+1}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & a & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4a \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-4a}{a^2 + a} = \frac{-4}{a+1}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2a^2 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{2a^2}{a^2 + a} = \frac{2a}{a+1}$$

066 **Discutir el sistema y resolverlo para los valores del parámetro que lo hagan compatible determinado.**

$$\left.\begin{aligned} mx + 2y + 3z &= 0 \\ 2x + my + 2z &= 2 \\ 2x + my + 3z &= m - 2 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 3 & 0 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & m & 3 & m-2 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 4 \qquad \begin{vmatrix} m & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & m-2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 16m + 24$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

- Si $m = \pm 2 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $m = -2 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m = 2 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $m = \pm 2 \rightarrow |A| = m^2 - 4$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ m-2 & m & 3 \end{vmatrix} = -3m^2 + 16m - 20$$

$$\rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-3m^2 + 16m - 20}{m^2 - 4} = \frac{-3m + 10}{m + 2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} m & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & m-2 & 3 \end{vmatrix} = -2m^2 + 16m - 24$$

$$\rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2m^2 + 16m - 24}{m^2 - 4} = \frac{-2m + 12}{m + 2}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & m & m-2 \end{vmatrix} = m^3 - 4m^2 - 4m + 16$$

$$\rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{m^3 - 4m^2 - 4m + 16}{m^2 - 4} = m - 4$$

Para $m = 2$ consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 2x + 2z = 2 - 2y \\ 2x + 3z = -2y \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2-2y & 2 \\ -2y & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2y \qquad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 2-2y \\ 2 & -2y \end{vmatrix} = -4$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = 3 - y \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = -2$$

La solución es: $x = 3 - \lambda$, $y = \lambda$, $z = -2$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

067 **Se venden huevos de categorías *XL*, *L* y *M*. Averigua el precio de una docena de cada tipo sabiendo que:**

- **Carmen pagó 4,90 € por una docena de cada tipo.**
- **Jesús pagó 9,60 € por 2 docenas *XL* y 4 docenas *M*.**
- **Esther se llevó 3 docenas *L* y 3 *M* y pagó 9,30 €.**

Sean x, y, z los precios de cada docena de huevos de categorías *XL*, *L* y *M*, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 4{,}9 \\ 2x + 4z = 9{,}6 \\ 3y + 3z = 9{,}3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 4{,}9 \\ -2y + 2z = -0{,}2 \\ y + z = 3{,}1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 4{,}9 \\ -2y + 2z = -0{,}2 \\ 4z = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1{,}8 \\ y = 1{,}6 \\ z = 1{,}5 \end{array}\right.$$

Así, la docena de huevos *XL* cuesta 1,80 €, la de categoría *L* vale 1,60 € y la de categoría *M* cuesta 1,50 €.

068 El administrador de la comunidad de vecinos está tratando de descubrir cuánto cobran a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Sabe que:

- En el 4.º A el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas y tuvieron que pagar 78 € de mano de obra.
- En el 3.º D pagaron 85 € por las 2 horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.
- En mi casa estuvieron 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil y nos cobraron 133 €.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional?

Sean x, y, z los precios por hora de trabajo del electricista, el fontanero y el albañil, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+2z=78 \\ 2y+z=85 \\ x+y+3z=133 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ x+2z=78 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ -y-z=-55 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+3z=133 \\ 2y+z=85 \\ y=30 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=28 \\ y=30 \\ z=25 \end{array}\right.$$

El electricista cobra 28 €, el fontanero 30 € y el albañil 25 €.

069 Se están preparando dosis con dos tipos de complementos para los astronautas de la nave *Enterprise*. Cada gramo del complemento *A* contiene 2 unidades de riboflavina, 3 de hierro y 2 de carbohidratos. Cada gramo del complemento *B* contiene 2 unidades de riboflavina, 1 de hierro y 4 de carbohidratos. ¿Cuántos gramos de cada complemento son necesarios para producir exactamente una dosis con 12 unidades de riboflavina, 16 de hierro y 14 de carbohidratos?

(C. Valenciana. Septiembre 2007. Ejercicio A. Problema 1)

Sean x e y los gramos de cada tipo de complemento.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=12 \\ 3x+\ \ y=16 \\ 2x+4y=14 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+2y=12 \\ 3x+\ \ y=16 \\ 2y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=1 \end{array}\right.$$

Son necesarios 5 gramos del complemento *A* y 1 gramo del complemento *B*.

070 Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple que el número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 1. Cuestión 1)

a) Sean x, y, z los hombres, las mujeres y los niños que se han reunido, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right\}$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ -4z=-20 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=15 \\ z=5 \\ x-y=1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=15 \\ z=5 \\ 2y=14 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=8 \\ y=7 \\ z=5 \end{array}\right.$$

071 **En un monedero tengo 20 monedas por un valor total de 29,50 €. Hay cuatro veces más monedas de 2 € que de 1 €. También hay monedas de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas hay en total?**

Sean x, y, z las monedas de 2 €, 1 € y 50 céntimos que tengo ahorradas, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 2x+y+0{,}5z=29{,}5 \\ x=4y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 20x+10y+5z=295 \\ x-4y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 15x+5y=195 \\ x-4y=0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 15x+5y=195 \\ 65y=195 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=12 \\ y=3 \\ z=5 \end{array}\right.$$

Hay 12 monedas de 2 €, 3 monedas de 1 € y 5 monedas de 50 céntimos.

072 **Una oveja, una cabra y una ternera cuestan juntas 870 €. Por el precio de una ternera pueden comprarse 4 ovejas. Además, sabemos que 5 ovejas y una cabra cuestan 620 €. Calcula el precio de cada animal y explica los resultados.**

Sean x, y, z los precios de una oveja, una cabra y una ternera, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=870 \\ z=4x \\ 5x+y=620 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=870 \\ 4x-z=0 \\ 5x+y=620 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=870 \\ 5x+y=870 \\ 5x+y=620 \end{array}\right\}$$

El sistema es incompatible. No se pueden calcular los precios de los animales con estos datos.

073 Tres trabajadores *A*, *B* y *C*, al acabar un determinado mes, presentan en su empresa la siguiente plantilla de seguimiento, correspondiente a las horas de trabajo, dietas de manutención y kilómetros de desplazamiento que hicieron cada uno de ellos.

	Horas de trabajo	Dietas	Kilómetros
A	40	10	150
B	60	15	250
C	30	6	100

Sabiendo que la empresa paga lo mismo a cada trabajador: *x* euros por hora trabajada, *y* euros por cada dieta y *z* euros por kilómetro de desplazamiento y que paga ese mes un total de 924 € al trabajador *A*, 1.390 € a *B* y 646 € a *C*, calcular *x*, *y*, *z*.

(Galicia. Junio 2004. Bloque 1. Ejercicio 1)

$$\left.\begin{array}{l} 40x + 10y + 150z = 924 \\ 60x + 15y + 250z = 1.390 \\ 30x + 6y + 100z = 646 \end{array}\right\} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 40 & 10 & 150 \\ 60 & 15 & 250 \\ 30 & 6 & 100 \end{vmatrix} = 1.500$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 924 & 10 & 150 \\ 1.390 & 15 & 250 \\ 646 & 6 & 100 \end{vmatrix} = 22.500 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 15$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 40 & 924 & 150 \\ 60 & 1.390 & 250 \\ 30 & 646 & 100 \end{vmatrix} = 45.000 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 30$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 40 & 10 & 924 \\ 60 & 15 & 1.390 \\ 30 & 6 & 646 \end{vmatrix} = 240 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 0,16$$

074 Pilar compra 200 acciones de la empresa *A*, 150 de *B* y 100 de *C* y paga 3.300 €, mientras que Juan gasta 3.750 € por la compra de 50 acciones de *A*, 120 de *B* y 240 de *C*. Con estos datos, ¿es posible saber el precio de cada acción? ¿Y si cada acción tiene un precio entero comprendido entre 1 € y 12 €, ambos incluidos?

Sean *x*, *y*, *z* los precios de las acciones de las empresas *A*, *B* y *C*, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} 200x + 150y + 100z = 3.300 \\ 50x + 120y + 240z = 3.750 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 200 & 150 \\ 50 & 120 \end{vmatrix} = 16.500 \neq 0$$

Los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, y como el sistema tiene tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} 200x + 150y + 100z = 3.300 \\ 50x + 120y + 240z = 3.750 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 3y + 2z = 66 \\ 5x + 12y + 24z = 375 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 3y + 2z = 66 \\ 33y + 86z = 1.170 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{16\lambda - 111}{11} \\ y = \dfrac{1.170 - 86\lambda}{33} \\ z = \lambda \end{array}\right. \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Con los datos no es posible determinar los precios de las acciones.

Si las acciones tienen un precio entero, el valor de la acción de la empresa *C* solo puede ser de 9 €, así las acciones de la empresa *A* valen 3 € y las de *B* valen 12 €.

075 **La suma de las edades de un padre y sus dos hijos es 48. El hijo mayor le lleva 12 años al menor. Y sabemos que dentro de 20 años la edad del padre doblará la edad del hijo mayor. ¿Cuáles son sus edades respectivas?**

Sean *x* la edad del padre, *y* la del hijo mayor y *z* la del hijo menor.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 48 \\ y = z + 12 \\ x + 20 = 2(y + 20) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 48 \\ y - z = 12 \\ x - 2y \qquad = 20 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 48 \\ y - z = 12 \\ -3y - z = -28 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 48 \\ y - z = 12 \\ -4y \qquad = -40 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 40 \\ y = 10 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

La solución no tiene sentido, ya que el hijo menor no puede tener una edad negativa.

076 **Maxi vende ropa en una tienda. Además de un sueldo fijo cobra una comisión de 1 € por cada camisa vendida; 1,50 € por cada pantalón y 2 € por cada chaqueta. Ayer, por vender el doble de pantalones que de chaquetas y 5 pantalones más que camisas, ganó 40,50 €. ¿Cuántas prendas vendió?**

Sean *x*, *y*, *z* los precios de una camisa, un pantalón y una chaqueta, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} y = 2z \\ y = x + 5 \\ x + 1{,}5y + 2z = 40{,}5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y - 2z = 0 \\ x - y \qquad = -5 \\ 10x + 15y + 20z = 405 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y - 2z = 0 \\ 25y + 20z = 455 \\ 10x + 15y + 20z = 405 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 70z = 455 \\ 25y + 20z = 455 \\ 10x + 15y + 20z = 405 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 8 \\ y = 13 \\ z = 6{,}5 \end{array}\right.$$

La solución no tiene sentido, pues no pueden venderse 6,5 chaquetas.

077 **Tenemos el triple de peras que de naranjas. Si decidimos dar 5 naranjas y 8 peras a cada uno de los chicos de un grupo, nos sobrarán solamente 21 peras. ¿Cuántas naranjas y peras tenemos? ¿Cuántos chicos hay en el grupo?**

(País Vasco. Julio 2006. Apartado A. Ejercicio 1)

Sean x el número de peras, y el de naranjas y z el de chicos que hay en el grupo.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ y = 5z \\ x = 8z + 21 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x & -3y & & = 0 \\ & y & -5z & = 0 \\ x & & -8z & = 21 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x & -3y & & = 0 \\ & y & -5z & = 0 \\ & 3y & -8z & = 21 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x & -3y & & = 0 \\ & y & -5z & = 0 \\ & & 7z & = 21 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 45 \\ y = 15 \\ z = 3 \end{array}\right.$$

Tenemos 45 peras y 15 naranjas. En el grupo hay 3 chicos.

078 **Una inmobiliaria ha vendido un total de 65 plazas de garaje en tres urbanizaciones diferentes. Las ganancias obtenidas por la venta de una plaza de garaje en la urbanización *A* son de 2.000 €, 4.000 € por una en la urbanización *B* y 6.000 € por una en la urbanización *C*. Se sabe que se han vendido un 50 % más de plazas en la urbanización *A* que en la urbanización *C*. Calcula el número de plazas de garaje vendidas en cada urbanización sabiendo que el beneficio obtenido por las vendidas en la urbanización *C* es igual a la suma de los beneficios obtenidos por las vendidas en las urbanizaciones *A* y *B*.**

(C. Valenciana. Junio 2008. Ejercicio A. Problema 1)

Sean x, y, z el número de plazas de garaje vendidas en cada urbanización, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ x = 1{,}5z \\ 6.000z = 2.000x + 4.000y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x + & y + & z = & 65 \\ 2x & & -3z = & 0 \\ x + & 2y & -3z = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x + & y + & z = & 65 \\ & 2y & +5z = & 130 \\ & y & -4z = & -65 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} x + & y + & z = & 65 \\ & 2y + & 5z = & 130 \\ & & 13z = & 260 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 30 \\ y = 15 \\ z = 20 \end{array}\right.$$

Se han vendido 30 plazas de garaje en la urbanización *A*, 15 en *B* y 20 en *C*.

079 **Julia y Pedro están hablando por teléfono para comprobar que los sistemas que han resuelto les dan los resultados. Solo hay uno donde los resultados son diferentes.**

Para Julia las soluciones de ese sistema son $x = \dfrac{\lambda + 8}{7}$, $y = \dfrac{11\lambda + 18}{7}$, $z = \lambda$,

mientras que para Pedro son $x = \dfrac{\mu + 10}{11}$, $y = \mu$, $z = \dfrac{7\mu - 18}{11}$. Después de cerciorarse de que ambos han escrito el enunciado del problema de la misma manera, empiezan a pensar que quizás sean dos maneras diferentes de resolverlo. Decídelo tú.

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\lambda + 8}{7} \\ y = \dfrac{11\lambda + 18}{7} \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 7x = z + 8 \\ 7y = 11z + 18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x - z = 8 \\ 7y - 11z = 18 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\mu + 10}{11} \\ y = \mu \\ z = \dfrac{7\mu - 18}{11} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 11x = y + 10 \\ 11z = 7y - 18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11x - y = 10 \\ 7y - 11z = 18 \end{array}\right\}$$

Si formamos un sistema con las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 7x - z = 8 \\ 7y - 11z = 18 \\ 11x - y = 10 \end{array}\right\}$$

comprobamos que ambas soluciones son correctas.

080 **El encargado de un almacén desea saber lo que pesan un frigorífico y una lavadora. Como no tiene báscula solicita ciertas informaciones a otros empleados:**

- **Sr. Moreno: un frigorífico y una lavadora juntos pesan 120 kg.**
- **Sr. Arce: el otro día llevé en el camión 3 frigoríficos y 4 lavadoras. La camioneta vacía pesa 1.250 kg y con la carga pesaba 1.550 kg.**
- **Sr. Puente: yo llevé 4 frigoríficos y 5 lavadoras y todo pesaba 480 kg.**

Realiza los cálculos para determinar los pesos. ¿Qué sucede? Busca alguna explicación de esos resultados.

Sea x el peso de un frigorífico y sea y el peso de una lavadora.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 120 \\ 3x + 4y = 1.550 - 1.250 \\ 4x + 5y = 480 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 120 \\ 3x + 4y = 300 \\ 4x + 5y = 480 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 120 \\ 3 & 4 & 300 \\ 4 & 5 & 480 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A^*) = 3 \neq \text{Rango } (A) = 2 \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

El sistema no tiene solución; por tanto, los datos recogidos no pueden ser correctos.

081 **Los 176 niños de una población rural están distribuidos en tres colegios: *A*, *B* y *C*. Los matriculados en *C* suponen la cuarta parte de los matriculados en *A*, y la diferencia entre el número de alumnos de *A* y el de alumnos de *B* es inferior en una unidad al doble de matriculados en *C*. Averiguar cuántos niños recibe cada uno de los colegios.**

(País Vasco. Julio 2005. Apartado A. Ejercicio 1)

Sean x, y, z el número de niños matriculados en cada colegio, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=176 \\ z=\dfrac{x}{4} \\ x-y=2z-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rl} x+y+z &= 176 \\ x-4z &= 0 \\ x-y-2z &= -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rl} x+y+z &= 176 \\ y+5z &= 176 \\ 2y+3z &= 177 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rl} x+y+z &= 176 \\ y+5z &= 176 \\ -7z &= -175 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=100 \\ y=51 \\ z=25 \end{array}\right.$$

En el colegio A hay 100 alumnos, 51 en B y 25 en C.

082 **El propietario de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino, por un importe total de 3.000 € (sin impuestos), siendo el valor de los refrescos igual al valor conjunto de la cerveza y el vino. Tras añadir los impuestos, la factura asciende a 3.260 €. Hallar el valor inicial de cada una de las bebidas, sabiendo que los impuestos sobre los refrescos, la cerveza y el vino eran el 6 %, el 10 % y el 14 %, respectivamente.**

(País Vasco. Junio 2007. Apartado A. Ejercicio 1)

Sean x, y, z el valor de los refrescos, la cerveza y el vino, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3.000 \\ x=y+z \\ 0{,}06x+0{,}1y+0{,}14z=260 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rl} x+y+z &= 3.000 \\ x-y-z &= 0 \\ 3x+5y+7z &= 13.000 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rl} x+y+z &= 3.000 \\ 2y+2z &= 3.000 \\ 2y+4z &= 4.000 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rl} x+y+z &= 3.000 \\ 2y+2z &= 3.000 \\ 2z &= 1.000 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1.500 \\ y=1.000 \\ z=500 \end{array}\right.$$

Los valores iniciales eran de 1.500 € de refrescos, 1.000 € de cerveza y 500 € de vino.

083 **Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones que permita encontrar la solución del siguiente problema:**

«En un examen de Matemáticas que constaba de tres problemas, un alumno obtuvo una calificación total de 7,2. La puntuación del primer problema fue un 40 % más que la del segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones del primero y el segundo. ¿Cuál fue la puntuación de cada problema?».

(Andalucía. Año 2006. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 1)

Sean x, y, z el valor de las puntuaciones de cada uno de los tres problemas.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=7{,}2 \\ x=1{,}4y \\ z=2(x+y) \end{array}\right\}$$

084 **En un hotel hay un total de 240 turistas ingleses, alemanes y franceses. Si los franceses son la tercera parte de la suma de alemanes e ingleses y el 200 % de los ingleses igualan a la suma de alemanes y franceses:**

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Determinar cuántos turistas de cada nacionalidad hay en el hotel.

(Canarias. Junio 2008. Prueba A. Pregunta 5)

a) Sean x el número de turistas ingleses que hay en el hotel, y el número de alemanes y z el número de franceses.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=240 \\ z=\dfrac{x+y}{3} \\ 2x=y+z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=240 \\ x+y-3z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=240 \\ x+y-3z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=240 \\ 4z=240 \\ 3y+3z=480 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=80 \\ y=100 \\ z=60 \end{array}\right.$$

Hay 80 turistas ingleses, 100 alemanes y 60 franceses.

085 **Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el 20 % del total, Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas.**

Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 céntimo por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.

(Castilla y León. Junio 2007. Bloque 1. Ejercicio A)

Sean x, y, z el número de hojas de propaganda que reparte cada uno.

$$\left.\begin{array}{r} y=0{,}2(x+y+z) \\ z=x+100 \\ x+y=850 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-4y+z=0 \\ x-z=-100 \\ x+y=850 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-4y+z=0 \\ 2x-4y=-100 \\ x+y=850 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x-4y+z=0 \\ 2x-4y=-100 \\ 6x=3.300 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=550 \\ y=300 \\ z=650 \end{array}\right.$$

Julia reparte 550 hojas; por tanto recibe 550 cent = 5,50 €.
Clara reparte 300 hojas y recibe 300 cent = 3 €.
Miguel reparte 650 hojas, por lo que recibe 650 cent = 6,50 €.

086 **Una empresa ha invertido 73.000 € en la compra de ordenadores portátiles de tres clases *A*, *B* y *C*, cuyos costes por unidad son de 2.400 €, 1.200 € y 1.000 €, respectivamente. Sabiendo que, en total, ha adquirido 55 ordenadores y que la cantidad invertida en los de tipo *A* ha sido la misma que la invertida en los de tipo *B*, averiguar cuántos aparatos ha comprado de cada clase.**

(País Vasco. Julio 2004. Apartado A. Ejercicio 1)

Sean x, y, z el número de ordenadores de cada tipo que se han comprado.

$$\left.\begin{array}{r} 2.400x+1.200y+1.000z=73.000 \\ x+y+z=55 \\ 2.400x=1.200y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 12x+6y+5z=365 \\ x+y+z=55 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 12x+6y+5z=365 \\ 7x+y=90 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 12x+6y+5z=365 \\ 7x+y=90 \\ 9x=90 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=10 \\ y=20 \\ z=25 \end{array}\right.$$

La empresa ha comprado 10 ordenadores de clase *A*, 20 de clase *B* y 25 de clase *C*.

087 El cajero de un banco solo dispone de billetes de 10, 20 y 50 €. Hemos sacado 290 € del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 € que nos ha dado es el doble del de 20 €.

Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero.

(Andalucía. Año 2006. Modelo 2. Opción B. Ejercicio 1)

Sean x, y, z el número de billetes de 10, 20 y 50 €, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} 10x + 20y + 50z = 290 \\ x + y + z = 8 \\ x = 2y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 5z = 29 \\ x + y + z = 8 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 5z = 29 \\ 4x + 3y = 11 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 5z = 29 \\ 4x + 3y = 11 \\ 11x = 22 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

Hemos sacado 2 billetes de 10 €, 1 billete de 20 € y 5 billetes de 50 €.

088 Un individuo realiza fotografías con una cámara digital. Sabe que cada fotografía de calidad normal ocupa siempre 0,2 megabytes de memoria. Cada fotografía de calidad óptima ocupa siempre una cantidad A de megabytes, pero el individuo no la conoce. Esta semana ha llevado a revelar 24 fotografías que le han ocupado un total de 9,2 megabytes de memoria.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de A) donde las incógnitas sean el número de fotos de cada clase que ha realizado. Estudia la compatibilidad del sistema.

b) ¿Hay alguna cantidad de megabytes que es imposible que ocupe cada foto de calidad óptima?

c) La semana pasada también hizo 24 fotos y ocupó 9,2 megabytes de memoria en total. ¿Es posible que el número de fotos de cada tipo fuera diferente al de esta semana?

(Asturias. Junio 2004. Bloque 1)

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 24 \\ 0{,}2x + Ay = 9{,}2 \end{array}\right\}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}2 & A \end{pmatrix}$ $\qquad B^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0{,}2 & A & 9{,}2 \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}2 & A \end{vmatrix} = A - 0{,}2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 0{,}2 & 9{,}2 \end{vmatrix} = 4{,}4 \neq 0$$

- Si $A \neq 0{,}2 \rightarrow$ Rango (B) = Rango (B^*) = n.º incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $A = 0{,}2 \rightarrow$ Rango (B) = 1 ≠ Rango (B^*) = 2
  Sistema incompatible

b) Por el contexto del problema, no puede ser una cantidad negativa, y para que exista solución tiene que ser distinta de 0,2.

c) Al ser un sistema compatible determinado, salvo para $A = 0{,}2$, el número de fotos de cada tipo para un valor de A es único, por lo que no podría ser otro número de fotos.

089 **Un museo tiene tres salas de exposiciones: *A*, *B* y *C*. Los precios de las entradas son, respectivamente, 2, 4 y 7 €. Un determinado día entraron a las tres salas un total de 210 personas, siendo la recaudación conjunta igual a la séptima parte de los visitantes de la sala *B*. Determinar el número de visitantes de cada sala. Justificar la respuesta.**

(Canarias. Junio 2002. Prueba A. Pregunta 5)

Sean x, y, z el número de visitantes de cada sala.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 210 \\ 2x + 4y + 7z = \dfrac{y}{7} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 210 \\ 14x + 27y + 49z = 0 \end{array}\right\}$$

El sistema tiene dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que no puede ser compatible determinado. No hay suficientes datos para poder determinar los visitantes de cada sala.

090 **A primera hora de la mañana en un cajero automático se desea que haya 800 billetes (de 10, 20 y 50 €) con un valor total de 16.000 €. Sabiendo que por cada 3 billetes de 50 € son necesarios 4 de 20 €, plantee un sistema de ecuaciones lineales para averiguar cuántos billetes de cada cantidad ha de haber y resuélvalo por el método de Gauss.**

(Aragón. Septiembre 2007. Opción A. Cuestión 1)

Sean x, y, z el número de billetes de 10, 20 y 50 €, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 800 \\ 10x + 20y + 50z = 16.000 \\ 4z = 3y \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & 2 & 5 & 1.600 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 800 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 800 \\ 0 & 0 & -16 & -2.400 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 800 \\ y + 4z = 800 \\ -16z = -2.400 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 450 \\ y = 200 \\ z = 150 \end{array}\right.$$

Hay 450 billetes de 10 €, 200 billetes de 20 € y 150 billetes de 50 €.

091 Un tren transporta 70 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 999 €. Calcule cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 27 €, cuántos han pagado el 30 % del billete y cuántos el 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 30 % es el doble del número de viajeros que pagan el billete entero.

(Cantabria. Septiembre 2006. Bloque 1. Opción A)

Sean x, y, z el número de viajeros que han pagado el importe total, el 30 % del billete y el 50 % del billete, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ 27x+0{,}3\cdot 27y+0{,}5\cdot 27z=999 \\ y=2x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ 90x+27y+45z=3.330 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ 45x-18y=180 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ 45x-18y=180 \\ 9x=180 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=20 \\ y=40 \\ z=10 \end{array}\right.$$

Los viajeros que pagaron el importe total han sido 20, los que pagaron el 30 % han sido 40 y los que pagaron el 50 % han sido 10.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 En una fábrica de artículos deportivos se dispone de 10 cajas de diferente tamaño: Grandes, Medianas y Pequeñas para envasar las camisetas de atletismo producidas, con capacidad para 50, 30 y 25 camisetas, respectivamente. Si una caja grande fuera mediana, entonces habría el mismo número de grandes y de medianas. En total se envasan 390 camisetas. Determina el número de cajas que hay de cada clase.

(Castilla-La Mancha. Junio 2008. Bloque 1. Ejercicio B)

Sean x, y, z el número de cajas para camisetas grandes, medianas y pequeñas, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ 50x+30y+25z=390 \\ x-1=y+1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ 10x+6y+5z=78 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ 5x+y=28 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ 5x+y=28 \\ 6x=30 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=3 \\ z=2 \end{array}\right.$$

Hay 5 cajas de camisetas grandes, 3 de medianas y 2 de pequeñas.

2 Discute, en función del parámetro a, la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales. Resuélvelo cuando sea posible.

$$\left.\begin{array}{r} x+4y+z=2 \\ 3x-y+2z=1 \\ 2x-5y+az=-a \end{array}\right\}$$

(La Rioja. Junio 2008. Parte B. Problema 1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & a & -a \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 13 - 13a$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -a \end{vmatrix} = 13a - 13$$

- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + az = -a \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 4y + z = 2 \\ -13y - z = -5 \\ -13y + (a-2)z = -a-4 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 4y + z = 2 \\ -13y - z = -5 \\ (a-1)z = 1-a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{13} \\ y = \dfrac{6}{13} \\ z = -1 \end{cases}$$

- Si $a = 1 \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible indeterminado

  Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 2 - z \\ 3x - y = 1 - 2z \end{array}\right\}$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2-z & 4 \\ 1-2z & -1 \end{vmatrix} = 9z - 6$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 3 & 1-2z \end{vmatrix} = z - 5$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{6-9z}{13} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{5-z}{13}$$

La solución es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{6-9\lambda}{13} \\ y = \dfrac{5-\lambda}{13} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

3 Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+\ \ z=5 \\ 2x+\ 3y+\ \ z=3 \\ ax+10y+4z=2 \end{array}\right\}$$

a) Halle los valores de a para los cuales el sistema no es compatible determinado.

b) Halle el valor de a para el cual el valor de $x=2$. Determine también los valores de y y de z en ese caso.

(Cataluña. Año 2008. Serie 2. Cuestión 4)

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ a & 10 & 4\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 3\\ a & 10 & 4 & 2\end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ a & 10 & 4\end{vmatrix}=14-2a$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0 \qquad \begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 2 & 10 & 4\end{vmatrix}=24\neq 0$$

- Si $a\neq 7 \rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3=$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a=7 \rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema incompatible

b) Si $x=2$:

$$\left.\begin{array}{r} 2\ +\ \ y+\ \ z=5 \\ 4\ +\ 3y+\ \ z=3 \\ 2a+10y+4z=2 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} y+\ \ z=3 \\ 3y+\ \ z=-1 \\ a+5y+2z=1 \end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r} y+\ \ z=3 \\ 2y\qquad =-4 \\ a+5y+2z=1 \end{array}\right\}\rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2 \\ z=5 \\ a=1 \end{array}\right.$$

4 Discuta y resuelva el siguiente sistema para todos los valores del parámetro a. (Utilice el método de Gauss para su resolución.)

$$\left.\begin{array}{r} 4x+ay-\qquad 2z=-1 \\ x+\ \ y-\qquad az=-1 \\ x+\ \ y+(2a+2)z=6-a \end{array}\right\}$$

(Aragón. Junio 2006. Opción B. Cuestión 1)

$A=\begin{pmatrix}4 & a & -2\\ 1 & 1 & -a\\ 1 & 1 & 2a+2\end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & a & -2 & -1\\ 1 & 1 & -a & -1\\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a\end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & a & -2\\ 1 & 1 & -a\\ 1 & 1 & 2a+2\end{vmatrix}=-3a^2+10a+8$$

$$-3a^2+10a+8=0\rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=4 \\ a=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}, 4\right\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$ = n.º de incógnitas

  Sistema compatible determinado

$$\begin{pmatrix} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & -1 \\ 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & -1 \\ 0 & a-4 & 4a-2 & 3 \\ 0 & 0 & 3a+2 & 7-a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - az = -1 \\ (a-4)y + (4a-2)z = 3 \\ (3a+2)z = 7-a \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3-a^2}{3a+2} \\ y = \dfrac{4a-5}{3a+2} \\ z = \dfrac{7-a}{3a+2} \end{array}\right.$$

- Si $a = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Rango (A) = Rango $(A^*) = 2 <$ n.º de incógnitas
Sistema compatible indeterminado

Consideramos el sistema: $\left.\begin{array}{r} 4x - 2z = -1 - 4y \\ x - 4z = -1 - y \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1-4y \\ 1 & -4 & -1-y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1-4y \\ 0 & 14 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x - 2z = -1 - 4y \\ 14z = 3 \end{array}\right\}$$

La solución es: $x = -\frac{1}{7} - \lambda,\ y = \lambda,\ z = \frac{3}{14}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

- Si $a = -\frac{2}{3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{2}{3} & -2 \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{2}{3} & -2 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{14}{3} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{16}{3} \end{vmatrix} = \frac{266}{9} \neq 0$$

Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3$
Sistema incompatible

5 El sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+3y=1 \\ 5u+3v=2 \\ 3x+2y=-1 \\ 3u+2v=3 \end{array}\right\}$$

se puede expresar en la forma $AX = B$, donde A, X y B son matrices cuadradas 2×2. Encontrar dicha expresión y resolver el sistema matricialmente.

(País Vasco. Junio 2006. Apartado A. Ejercicio 1)

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \to X = A^{-1}B$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

6 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar los valores de x, y, z que hacen posible la igualdad matricial $AB = A + C$. Justificar la respuesta.

(Extremadura. Junio 2006. Opción B. Problema 1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+y & 1 & 2 \\ -x+9 & -6 & -1+3z \\ x+y-6 & 5 & -2z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ -x+9=10 \\ -1+3z=2 \\ x+y-6=-5 \\ -2z+1=-1 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right.$$

7 **Para la compra de un artículo de precio 10,70 € se utilizan monedas de 1 €, de 50 céntimos de euro y de 20 céntimos de euro. El número total de monedas excede en una unidad al triple de monedas de 1 €. El 30 % de la suma del número de monedas de 1 € con el doble del número de monedas de 50 céntimos coincide con el número de monedas de 20 céntimos.**
Halla el número de monedas que se utilizan de cada clase.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 1. Ejercicio B)

Sean x, y, z el número de monedas de 1 €, de 50 céntimos y de 20 céntimos, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x + 0{,}5y + 0{,}2z = 10{,}7 \\ x + y + z = 3x + 1 \\ 0{,}3(x + 2y) = z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 10x + 5y + 2z = 107 \\ -2x + y + z = 1 \\ 3x + 6y - 10z = 0 \end{array}\right\}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -10 \end{vmatrix} = -275$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 107 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -10 \end{vmatrix} = -1.650 \rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|} = 6$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 10 & 107 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -10 \end{vmatrix} = -1.925 \rightarrow y = \frac{|A_y|}{|A|} = 7$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 10 & 5 & 107 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -1.650 \rightarrow z = \frac{|A_z|}{|A|} = 6$$

Se utilizan 6 monedas de 1 €, 7 monedas de 50 céntimos y 6 monedas de 20 céntimos.