2 Determinantes

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Los viajes de Gulliver

«Su Sublimísima Majestad [el Rey de Liliput] propone al Hombre-Montaña [Gulliver], recientemente llegado a nuestros celestiales dominios, los siguientes artículos, que dicho Hombre-Montaña se compromete a observar bajo solemne juramento:

– El Hombre-Montaña no partirá de nuestros dominios sin nuestra licencia autorizada por nuestro gran sello.

– No entrará en nuestra capital sin nuestra orden expresa, y cuando lo haga, los habitantes serán advertidos con dos horas de anticipación para no salir de sus casas.

– El dicho Hombre-Montaña paseará solamente por nuestros más anchos caminos reales y no andará ni se tenderá en ninguna pradera o campo de grano. […]

– Será nuestro aliado contra nuestros enemigos de la isla de Blefuscu y hará cuanto esté en su mano para destruir su flota, que a la sazón se prepara a invadirnos.

– El sobredicho Hombre-Montaña, en sus ratos de ocio, ayudará y asistirá a nuestros trabajadores, auxiliándolos a levantar ciertas grandes piedras, a erigir el muro del parque principal y a otras obras de nuestros reales edificios.

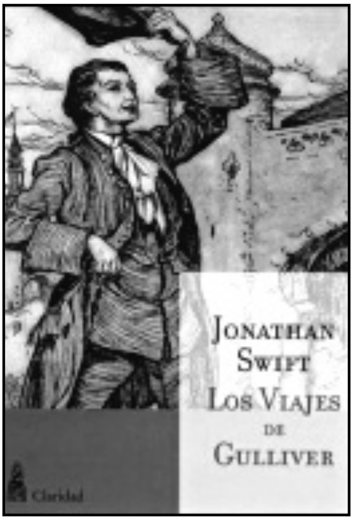
– El mencionado Hombre-Montaña deberá, en el término de dos lunas, ejecutar una exacta medición del perímetro de nuestros dominios mediante un cómputo de sus propios pasos en torno a la costa.

Finalmente, y previo su solemne juramento de observar todos los enunciados artículos, el dicho Hombre-Montaña recibirá una consignación diaria de viandas y bebidas suficiente al mantenimiento de 1.728 de nuestros súbditos, así como libre acceso a nuestra persona y otras señales de nuestro favor. Dado en nuestro palacio de Belfaborac, el día 12 de la luna 91 de nuestro reinado».

El lector puede tener el gusto de observar que en la última de las normas necesarias para recobrar la libertad, el Emperador estipula que se me conceda una cantidad de comida y bebida suficiente para mantener a 1.728 liliputienses. Algún tiempo después, habiendo preguntado a un amigo de la Corte cómo se las arreglaron para fijar una cifra tan concreta, me dijo que los matemáticos de Su Majestad, tras medir la altura de mi cuerpo usando un cuadrante, descubrieron que era 12 veces más grande que la de uno de ellos.

JONATHAN SWIFT

Los viajes de Gulliver
Jonathan Swift



El argumento de esta novela clásica es muy conocido, pero quizá no sea tan popular el hecho de que, a lo largo de sus páginas, aparecen numerosas referencias a las matemáticas, especialmente en los capítulos dedicados a las «visitas» que hace Gulliver a Liliput y Laputa.

El párrafo elegido pertenece a la primera de ellas, una aventura que comienza cuando Gulliver, después de naufragar, llega a una playa y, mientras duerme, es apresado por los liliputienses. Aunque era un prisionero, el Emperador trata a Gulliver con mucha dignidad: ordena que cada mañana, como sustento, le suministren seis reses vacunas, cuarenta ovejas y otras provisiones, además de una «cantidad proporcional de pan, vino y otros licores», siendo todo ello, como es natural, de tamaño liliputiense. Ordena también que trescientos sastres le confeccionen un traje a la moda del país y que seis de los más grandes sabios de Su Majestad se ocupen de instruirlo en su lengua. Encarga, además, que le hagan un colchón formado por cuatro capas de ciento cincuenta colchones liliputienses cada una, cosidos entre sí, aunque, a pesar de todo, Gulliver no dejaba de sentir la dureza del suelo, que era de piedra bruñida.

El Emperador, convencido finalmente de que el Hombre-Montaña podía serle muy útil, sobre todo para luchar contra los enemigos, decide concederle la libertad bajo unas ciertas condiciones estipuladas en un documento que se reproduce en el texto anterior.

Puesto que la altura media de los liliputienses es la doceava parte de la de Gulliver, ese dato le permite al novelista cuantificar el tamaño del colchón donde ha de dormir «el gigante» la cantidad de comida que deben darle en relación a la de un liliputiense, la «superficie» de su vestido, etc. Todos estos números aparecen distribuidos por el texto y son una fuente de actividades didácticas muy interesantes.

Forma una matriz cuadrada de orden 2 con los números que aparecen en el texto. Calcula el valor de la expresión $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ para esa matriz, para su traspuesta y para la que resulta de sumarle a la primera columna la segunda. ¿Qué observas? ¿Por qué crees que ocurre esto?

La matriz que forman los números que aparecen en el texto es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1.728 \\ 12 & 91 \end{pmatrix}$

$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 182 - 20.736 = -20.554$

La matriz traspuesta es: $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1.728 & 91 \end{pmatrix}$ $\quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 182 - 20.736 = -20.554$

La matriz que resulta de sumarle a la primera columna la segunda es: $\begin{pmatrix} 1.730 & 1.728 \\ 103 & 91 \end{pmatrix}$

$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 157.430 - 177.984 = -20.554$

El valor de la expresión es siempre el mismo, porque en el caso de la matriz traspuesta solo hemos variado el orden de los factores, y esto no varía el resultado, y en el segundo caso, porque al utilizar una combinación lineal de las columnas la relación entre los términos no cambia.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Comprueba si existen combinaciones lineales entre las filas de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Para comprobarlo estudiamos si: $F_1 = k_1F_2 + k_2F_3$

Consideramos los elementos de las columnas primera y tercera, ya que los de la segunda columna son todos nulos, y por tanto, verifican cualquier combinación.

$$\left.\begin{array}{r} -1 = 5k_1 + 3k_2 \\ 2 = -2k_1 - 2k_2 \end{array}\right\} \rightarrow k_1 = 1 \quad k_2 = -2$$

Entonces: $F_1 = F_2 - 2F_3 \rightarrow$ Existe una combinación lineal entre las filas de esta matriz.

b) Para comprobarlo estudiamos si: $F_1 = k_1F_2 + k_2F_3 + k_3F_4$

Tomamos los elementos de las tres primeras columnas:

$$\left.\begin{array}{r} -2 = -3k_1 - k_2 - 4k_3 \\ 0 = 2k_1 + 2k_2 \\ 1 = k_1 + 2k_3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2 = -3k_1 - k_2 - 4k_3 \\ 0 = 2k_1 + 2k_2 \\ 0 = -k_1 - k_2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 = -k_2 \\ k_3 = -\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Si $k_1 = 1 \rightarrow k_2 = -1 \rightarrow k_3 = 0 \rightarrow F_1 = F_2 - F_3$

Esta combinación lineal entre las filas también se verifica con los elementos de la última columna; por tanto, existe una combinación entre las filas de esta matriz.

002 **Calcula la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, y comprueba que se cumple que $AA^{-1} = I$ y que $A^{-1}A = I$.**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDADES

001 Calcula el valor de los determinantes de estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A| = -24 - 7 = -31$

b) $|A| = 30 - 6 - 20 - 4 = 0$

002 Calcula x para que estos determinantes valgan cero.

a) $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 8 & x^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix}$

a) $-2x^2 + 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

b) $3x^2 - 2 - 2x - 6 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

003 Halla el determinante de la matriz traspuesta de estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A^t| = |A| = -10 + 4 = -6$

b) $|A^t| = |A| = 8 + 24 - 4 = 16$

004 Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$

b) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1$

c) $\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$

005 Calcula el determinante de A y, a partir de él, halla $|B|$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 8 & 10 & 14 \\ -8 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -60 - 56 + 42 - 24 = -98$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 8 & 10 & 14 \\ -8 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -8 & 10 & 14 \\ 8 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-98) = 196$$

006 Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -2$, calcula:

a) $\begin{vmatrix} a & -2b \\ c & -2d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 3b \\ 0 & 3d \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & -2b \\ c & -2d \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$

b) $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 3b \\ 0 & 3d \end{vmatrix} = 0$

007 Halla los siguientes determinantes aplicando sus propiedades.

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & -2a \\ b & -2b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -a & 3a \\ -b & 3b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a & -2a \\ b & -2b \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} -a & 3a \\ -b & 3b \end{vmatrix} = 0$

008 Comprueba que las dos matrices cumplen que $|AB| = |A| \cdot |B|$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |AB| = 36$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \\ |B| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -12 \end{array}\right\} \rightarrow |A| \cdot |B| = 36$$

009 **Determina el menor complementario de a_{21}.**

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\alpha_{21} = 1$ b) $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10$

010 **Halla los elementos cuyo adjunto es negativo.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A_{12} = -1, A_{21} = -3$ y $A_{22} = -1$

b) $A_{11} = -1, A_{21} = -1, A_{23} = -2, A_{32} = -2$ y $A_{33} = -2$

011 **Resuelve estos determinantes, aplicando la definición y desarrollando por alguna de sus columnas.**

a) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$

a) Utilizando la definición: $|A| = -21 - 4 = -25$

Desarrollando por la primera columna: $|A| = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 21 = -25$

b) Utilizando la definición: $|A| = 15 + 7 - 6 + 10 = 26$

Desarrollando por la segunda columna:

$$|A| = 5 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 25 + 1 = 26$$

c) Utilizando la definición: $|A| = -24 - 7 = -31$

Desarrollando por la primera columna: $|A| = -2 \cdot 12 + 7 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 1 = -31$

012 **Resuelve estos determinantes.** a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (-13) = 41$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$

013 Halla todos los menores de esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Menores de orden 1: 0, 2, −3, −1, −3, −3, 2, 0, −2, 0, 3, −2, −1, −2, 0 y −1

Menores de orden 2: $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -9, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3,$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3, \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -5,$

$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4,$

$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3,$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -6, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4,$

$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 9, \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4,$

$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4$ y $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$

Menores de orden 3: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 28, \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6,$

$\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5, \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -13,$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -9, \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 7, \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3,$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -18, \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9,$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -24, \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 12,$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9 \text{ y } \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 17$$

Menor de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 15$$

014 **Calcula el rango de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

015 **Calcula el rango de estas matrices.**

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

b) $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

016 **Calcula x para que el rango de estas matrices sea 3.**

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & x & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & x & 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ Para que el rango de la matriz sea 3, el otro menor de orden 3 tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & x \end{vmatrix} = 6x - 36 \neq 0 \rightarrow x \neq 6$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 32 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3 para cualquier valor de x.

017 **Determina la matriz de los adjuntos de las siguientes matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\text{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\text{Adj}\,(B) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\text{Adj}\,(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

018 **Comprueba que se cumple que $A \cdot \text{Adj}\,(A)^t = |A| \cdot I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.**

$|A| = -4$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 12 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

019 **Calcula la matriz inversa de estas matrices.**

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{Adj}\,(A)^t = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 12 & 9 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -3 & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

b) $$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\,\text{Adj}\,(B)^t = \frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 & 2 \\ 12 & -2 & -4 & -8 \\ 11 & -11 & -11 & 0 \\ -21 & 9 & 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{22} & -\frac{5}{22} & \frac{1}{22} & \frac{1}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{21}{22} & \frac{9}{22} & \frac{7}{22} & -\frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

020 Halla x para que estas matrices tengan inversa. Determina la inversa cuando exista.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & x & x \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4x + 8$

La matriz A tiene inversa si $|A| \neq 0 \rightarrow x \neq -2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}\,(A)^t = \frac{1}{4x+8} \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & 2x+2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -x-4 & 2 & 2x+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{x}{4x+8} & \dfrac{1}{2x+4} & \dfrac{x+1}{2x+4} \\ -\dfrac{1}{x+2} & \dfrac{1}{x+2} & -\dfrac{1}{x+2} \\ -\dfrac{x+4}{4x+8} & \dfrac{1}{2x+4} & \dfrac{x+1}{2x+4} \end{pmatrix} \text{ si } x \neq -2$$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & x & x \end{vmatrix} = -5x - 5$

La matriz B tiene inversa si $|B| \neq 0 \rightarrow x \neq -1$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adj}\,(B)^t = \frac{1}{-5x-5} \cdot \begin{pmatrix} -x & -x & -1 \\ -2x+5 & 3x+10 & -7 \\ 2x & -3x-5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{x}{5x+5} & \dfrac{x}{5x+5} & \dfrac{1}{5x+5} \\ \dfrac{2x-5}{5x+5} & -\dfrac{3x+10}{5x+5} & \dfrac{7}{5x+5} \\ -\dfrac{2x}{5x+5} & \dfrac{3x+5}{5x+5} & -\dfrac{2}{5x+5} \end{pmatrix} \text{ si } x \neq -1$$

021 Calcula los siguienaátes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ 6 & a-3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1-a & a+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$ c) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -3 \end{vmatrix} = -3a - 2b$ e) $\begin{vmatrix} a-4 & 2 \\ 6 & a-3 \end{vmatrix} = a^2 - 7a$

b) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$ f) $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ 1-a & a+1 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2$

022 Calcula *a*, *b*, *c* y *d* para que se cumplan las igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 26$ b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix} = 45$ c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix} = 32$ d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7$

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & a \end{vmatrix} = 4a + 6 = 26 \rightarrow a = 5$

b) $\begin{vmatrix} b & 4 \\ 3b & -3 \end{vmatrix} = -15b = 45 \rightarrow b = -3$

c) $\begin{vmatrix} c & 3c-1 \\ 4 & c \end{vmatrix} = c^2 - 12c + 4 = 32 \rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = 14 \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{2}{d} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = \frac{14}{d} = 7 \rightarrow d = 2$

023 Obtén el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 11$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} a & 2 & 4 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

e) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4x$

f) $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -b & c & a \\ -c & a & b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

024 Calcula el determinante de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

(La Rioja. Junio 2004. Parte B. Problema 1)

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$ $|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$

025 Halla los valores reales de a, b y c para que se cumplan las igualdades.

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -197$

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -18$

a) $\begin{vmatrix} 3 & a & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3a = 2 \rightarrow a = 2$

b) $\begin{vmatrix} -2 & b & -1 \\ b & 1 & b \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = b^2 + 5b - 1 = -5 \rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = -4 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} c-1 & c+2 & 0 \\ c & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = c^2 + 23c + 3 = -197 \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\begin{vmatrix} d & d^2 & d-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ d & 0 & d \end{vmatrix} = -d - 2d^3 = -18 \rightarrow d = 2$

026 Calcula el valor del determinante de la matriz $A + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |A + B| = 1$$

027 Halla el valor del determinante de la matriz AB.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 13 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 34 \\ 11 & -16 & 231 \\ 9 & -4 & 108 \end{pmatrix} \rightarrow |AB| = 10$$

028 Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}6 & -3\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

Comprueba si se verifican las siguientes igualdades. Si alguna se verifica, decide si se trata de alguna propiedad general de los determinantes.

a) $|2A| = 2|A|$

b) $|A+B| = |A| + |B|$

c) $|C-2B| = |C| - 2|B|$

d) $|AB| = |A|\cdot|B|$

a) $|2A| = \begin{vmatrix}6 & 10\\ -2 & 4\end{vmatrix} = 44 \qquad 2|A| = 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix} = 2\cdot 11 = 22$

La igualdad no se cumple.

b) $|A+B| = \begin{vmatrix}1 & 9\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -15$

$|A| + |B| = \begin{vmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 11 - 14 = -3$

La igualdad no se cumple.

c) $|C-2B| = \begin{vmatrix}10 & -11\\ -10 & 1\end{vmatrix} = -100$

$|C| - 2|B| = \begin{vmatrix}6 & -3\\ -4 & 3\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 6 - 2\cdot(-14) = 34$

La igualdad no se cumple.

d) $|AB| = \begin{vmatrix}9 & 17\\ 8 & -2\end{vmatrix} = -154$

$|A|\cdot|B| = \begin{vmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 11\cdot(-14) = -154$

La igualdad se cumple, porque es una de las propiedades de los determinantes.

029 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 9 & 1\end{pmatrix}$$

comprueba que se cumple que $|A+B| = |A| + |B|$. ¿Es siempre cierto para cualesquiera dos matrices cuadradas de la misma dimensión?

En caso afirmativo, justifícalo y, en caso negativo, facilita un contraejemplo.

$|A+B| = \begin{vmatrix}6 & 1\\ 13 & 3\end{vmatrix} = 5$

$|A| + |B| = \begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 0\\ 9 & 1\end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$

La igualdad se cumple en este caso, pero no siempre; el apartado b) de la actividad anterior es un contraejemplo.

030 Calcula cada uno de estos determinantes para comprobar que:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 0 \\ b+2 & 1 & 4 \\ 3+c & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ b & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3 & 0 \\ b+2 & 1 & 4 \\ 3+c & 2 & -1 \end{vmatrix} = -a-1+36+12c-8a-8+3b+6 = 33-9a+3b+12c$$

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ b & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ c & 2 & -1 \end{vmatrix} = (36-9a+3b)+(12c-3) = 33-9a+3b+12c$$

031 Si M es una matriz cuadrada y $|M| = 6$, ¿qué puedes decir del determinante de M^3? ¿Y del determinante de $2M$?

$|M^3| = |M| \cdot |M| \cdot |M| = |M|^3 = 6^3 = 216$

Si n es el orden de la matriz cuadrada M, entonces: $|2M| = 2^n|M| = 2^n \cdot 6 = 2^{n+1} \cdot 3$

032 Halla el valor de los siguientes determinantes, desarrollando por la fila o columna que más te interese.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -(-6) = 6$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 2 \cdot 6 = -12$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 + (-2) = 0$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

033 Calcula el siguiente determinante $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$

a) Usando la regla de Sarrus.

b) Desarrollando por los elementos de la primera columna.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 7 + 6 - 9 - 84 = -80$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 2(-39) + 7 = -80$

034 Obtén el valor del determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$$

035 Calcula el rango de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

036 Comprueba que la siguiente matriz es de rango 2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & -2 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 3 \\ 12 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0$ $\quad\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -1 \\ 12 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

037 **Estudia el rango de estas matrices.**

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 24 & 3 & 19 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & -8 & -24 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 12 & -18 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad 6 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 1.

c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

d) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -39 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 3.

e) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 24 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

f) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

038 **Comprueba que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rasngo 2. Añade dos filas que no sean nulas ni iguales a las anteriores de modo que el rango siga siendo 2.**

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \rightarrow$ El rango de la matriz es 2.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

039 **Dada la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, añade una columna de modo que el rango sea 3. Demuésralo.**

Respuesta abierta, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 3.}$$

040 **¿Para qué valor de m el rango de esta matriz es 2?**

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Para que el rango de la matriz sea 2, el menor de orden 3 tiene que ser igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -7m - 120 + 72 + 30m - 18 + 112 = 0$$
$$\rightarrow 23m + 46 = 0 \rightarrow m = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 2.}$$

041 **Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real. Calcular el rango de A según los valores del parámetro a.**

(Aragón. Junio 2003. Opción B. Cuestión 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = a - 6$$

Si $a \neq 6$: El menor de orden 3 es distinto de cero.
El rango de la matriz es 3.

Si $a = 6$: El menor de orden 3 es nulo.
El rango de la matriz es 2.

042 **Obtén el valor de *a* para que el rango de la matriz *A* sea igual a 2.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

Para que el rango de la matriz sea 2, los menores de orden 3 tienen que ser iguales a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -12 + 6 - 6a = 0 \rightarrow -6 - 6a = 0 \rightarrow a = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz es 2.}$$

043 **Calcula el rango de cada matriz en función de cada uno de los parámetros.**

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & c & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -48 - 16a$$

- Si $a \neq -3 \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $a = -3 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \geq 2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & c & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 3c$$

- Si $c \neq 2 \rightarrow$ El menor de orden 3 es distinto de cero. El rango de la matriz es 3.
- Si $c = 2 \rightarrow$ El menor de orden 3 es nulo. El rango de la matriz es 2.

044 Halla la matriz inversa de estas matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-7 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 3 & -5 & 4\end{pmatrix}$$

a) $|A| = 2 \neq 0$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

b) $|B| = 1 \neq 0$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ -2 & 7 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

c) $|C| = -20 \neq 0$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{20} & \frac{7}{20}\end{pmatrix}$$

d) $|D| = 10 \neq 0$

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{11}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

045 Calcular la matriz inversa de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

(Murcia. Junio 2007. Bloque 1. Cuestión 1)

$|A| = 42 \neq 0$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{42} & \frac{11}{42} & \frac{1}{6}\\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

046 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

determinar la matriz $X = (A^{-1}B^t)^2$, donde A^{-1} es la matriz inversa de A y B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

(Extremadura. Junio 2003. Opción A. Problema 1)

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^{-1}B^t)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -6 & -6 & 16 \end{pmatrix}$$

047 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

con a un parámetro real no nulo, compruebe que $A^{-1}B = A$.

(Aragón. Junio 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$|A| = -a^2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

048 Encuentre el valor de a que hace que la siguiente matriz no tenga inversa.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$$

(La Rioja. Junio 2006. Parte A. Cuestión 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = 6 - a$$ Si $a = 6$, la matriz no tiene inversa.

049 Encuentre el valor de a que hace que la siguiente matriz no tenga inversa.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(La Rioja. Septiembre 2007. Parte A. Cuestión 1)

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 40 - 4a$ Si $a = 10$, la matriz no tiene inversa.

050 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) Determine para qué valores del parámetro m existe A^{-1}.
b) Calcule A^{-1} para $m = 2$.

(Andalucía. Año 2002. Modelo 1. Opción B. Ejercicio 1)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + m + 6$

$-m^2 + m + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases}$

Si $m \in \mathbb{R} - \{-2, 3\} \rightarrow |A| \neq 0$, y por tanto, la matriz A tiene inversa.

b) Si $m = 2 \rightarrow |A| = 4 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

051 ¿Para qué valores del parámetro a la siguiente matriz no tiene inversa?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Halla la matriz inversa cuando $a = 2$.

$|M| = a - a^2$

La matriz no tiene inversa si su determinante es nulo, es decir, si $a = 0$ o $a = 1$.

Si $a = 2 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |M| = -2 \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

052 Se considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de x para los que no existe la inversa de A.
b) Para $x = 3$, calcule, si es posible, A^{-1}.

(Andalucía. Año 2001. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 1)

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = x^2 - x$ Si $x = 0$ o $x = 1$, no existe la inversa de A.

b) Si $x = 3 \rightarrow |A| = 6 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

053 ¿Es posible que una matriz de tamaño 3×3 coincida con su traspuesta? ¿Y con su inversa?

(La Rioja. Junio 2005. Parte A. Cuestión 4)

Sí, cuando los elementos situados en lugares simétricos respecto a la diagonal principal son iguales.

Si $A = A^{-1} \rightarrow A \cdot A = I \rightarrow A^2 = I$

La matriz identidad verifica esta relación.

054 Calcula las matrices X, Y, Z y T que cumplen las siguientes ecuaciones.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

c) $Z \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix}$

d) $T \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

b) $Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $Z = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $T = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

055 Resuelve la ecuación matricial $AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Baleares. Septiembre 2001. Opción B. Cuestión 5)

$$AX = B \to A^{-1}AX = A^{-1}B \to IX = A^{-1}B \to X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

056 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule AB.

b) Calcule la matriz inversa de B y utilícela para resolver la ecuación $XB = B + A$.

(Aragón. Junio 2008. Cuestión A1)

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $|B| = -6 \neq 0 \to B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$XB = B + A \to X = (B + A)B^{-1} = BB^{-1} + AB^{-1} = I + AB^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

057 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz inversa de A.

b) Resuelve la ecuación matricial $XA = A + B$.

c) Calcula la matriz X.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2003. Bloque 1. Ejercicio A)

a) $|A| = 3 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) $XA = A + B \rightarrow X = (A + B)A^{-1} = AA^{-1} + BA^{-1} = I + BA^{-1}$

c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

058 Resuelve la ecuación matricial $MX = M + M^t$, siendo X una matriz desconocida de tamaño 2×2, $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y M^t la traspuesta de M.

(La Rioja. Junio 2008. Parte A. Cuestión 1)

$MX = M + M^t \rightarrow X = M^{-1}(M + M^t) = M^{-1}M + M^{-1}M^t = I + M^{-1}M^t$

$|M| = -2 \neq 0 \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

059 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & -6 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

calcular una matriz X tal que $XA = 2B + C$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2000. Bloque 3. Ejercicio A)

$XA = 2B + C \rightarrow X = (2B + C) \cdot A^{-1}$

$$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -2 & -8 & -6 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

060 Determina la matriz X que verifica la ecuación $2AX = B$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Extremadura. Septiembre 2000. Opción B. Problema 1)

$$2AX = B \rightarrow AX = \frac{1}{2}B \rightarrow X = A^{-1} \cdot \frac{1}{2}B$$

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -6 & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ -2 & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

061 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcular la matriz X tal que $A^{-1} = XB$.

(Cantabria. Septiembre 2008. Bloque 1. Opción A)

$A^{-1} = XB \rightarrow X = A^{-1}B^{-1}$

$$|A| = -9 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$|B| = 2 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{5}{18} & \frac{23}{18} \\ -\frac{1}{9} & \frac{7}{18} & -\frac{25}{18} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

062 **Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, razone si posee solución la ecuación matricial $AX = B$ y, en caso afirmativo, resuélvala.**

(Andalucía. Año 2001. Modelo 3. Opción A. Ejercicio 1)

Como A es una matriz de 3×3, para obtener una matriz B de 3×2, X tiene que tener dimensión 3×2.

$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

063 **Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine, si existe, la matriz X que verifique: $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.**

(Andalucía. Año 2002. Modelo 2. Opción A. Ejercicio 1)

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

064 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar los valores de m para los cuales tiene inversa.

b) Haciendo $m = 2$, encontrar la matriz X que cumple:

$$XA = (1 \quad 0 \quad -1)$$

(País Vasco. Junio 2008. Apartado A. Ejercicio 2)

a) $|A| = 5 - m^2$

La matriz tiene inversa si $m \neq \pm\sqrt{5}$.

b) $XA = (1 \quad 0 \quad -1) \rightarrow X = (1 \quad 0 \quad -1) \cdot A^{-1}$

Si $m = 2 \rightarrow |A| = 1 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

$$X = (1 \quad 0 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 1)$$

065 Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.

b) Haciendo $m = 4$, resuelva la ecuación matricial:

$$XA = (3 \quad 1 \quad 1)$$

(Andalucía. Año 2002. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 1)

a) $|A| = m^2 - 2m - 15$ $\qquad m^2 - 2m - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -3 \end{cases}$

Si $m \in \mathbb{R} - \{-3, 5\} \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ La matriz A tiene inversa.

b) $XA = (3 \quad 1 \quad 1) \rightarrow X = (3 \quad 1 \quad 1) \cdot A^{-1}$

Si $m = 4 \rightarrow |A| = -7 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

$$X = (3 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{15}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{10}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} = (-1 \quad 0 \quad 1)$$

066 Determina el valor de X, Y y Z en las ecuaciones.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix}$

b) $Y \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot Z = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

a) $$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 9 \\ -17 & -10 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $$Y = \left[\begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -8 \\ -23 & 12 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & \frac{3}{2} \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $$Z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

067 Determine la matriz X, de orden 2, que verifica la igualdad:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Andalucía. Año 2003. Modelo 6. Opción B. Ejercicio 1)

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

068 Resolver la ecuación matricial $A + BX = I$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e I es la matriz identidad de orden tres. Justificar la respuesta.

(Extremadura. Junio 2002. Opción B. Problema 1)

$$A + BX = I \rightarrow BX = I - A \rightarrow X = B^{-1}(I - A)$$

$$|B| = 1 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 14 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

069 Resuelva la siguiente ecuación matricial: $AX - 2B = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(Andalucía. Año 2001. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 1)

$$AX - 2B = C \rightarrow AX = C + 2B \rightarrow X = A^{-1}(C + 2B)$$

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 15 \end{pmatrix}$$

070 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcular A^2.

b) Resolver la ecuación matricial $A^2X + AB = B$.

(Galicia. Junio 2002. Bloque 1. Ejercicio 2)

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

b) $A^2X + AB = B \xrightarrow{A^2 = I} X + AB = B \rightarrow X = B - AB = B(I - A)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

071 Resuelve la ecuación matricial $A^2X - B = A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2X - B = A^2 \rightarrow A^2X = A^2 + B \rightarrow X = A^{-2}(A^2 + B) \rightarrow X = I + A^{-2}B = I + (A^{-1})^2B$$

$$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

072 Halla las posibles matrices X que cumplen la ecuación $XC + A = C + A^2$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$XC + A = C + A^2 \rightarrow XC = C + A^2 - A \rightarrow X = (C + A^2 - A)C^{-1} \rightarrow X = I + (A^2 - A)C^{-1}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$X = I + (A^2 - A)C^{-1} = I + 0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

073 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de a y b para que:

$$AB = BA$$

b) Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación matricial:

$$XB - A = I_2$$

(Andalucía. Junio 2008. Opción A. Ejercicio 1)

a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

Para que $AB = BA$ los valores deben ser: $\begin{cases} 3a = 3 \rightarrow a = 1 \\ 12 = 3b \rightarrow b = 4 \end{cases}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+6y & y \\ z+6t & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+6y & y-2 \\ z+6t-3 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+6y = 1 \\ y-2 = 0 \\ z+6t-3 = 0 \\ t = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 2 \\ z = -3 \\ t = 1 \end{cases}$$

Por tanto, resulta que: $X = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

074 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Realice, cuando sea posible, los siguientes productos de matrices:

$$AB \qquad BC \qquad CA$$

b) Resuelva la ecuación matricial $AX + B = C$.

(Andalucía. Año 2002. Modelo 5. Opción A. Ejercicio 1)

a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

El producto BC no es posible, porque la matriz B tiene tres columnas, y la matriz C solo tiene dos filas. Del mismo modo, el producto CA no es posible, ya que la matriz C tiene tres columnas y la matriz A solo tiene dos filas.

b) $AX + B = C \rightarrow AX = C - B \rightarrow X = A^{-1}(C - B)$

$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 6 \\ -11 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

075 Determina la matriz X tal que $A + 2XB = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Castilla-La Mancha. Junio 2001. Bloque 1. Ejercicio A)

$$A + 2XB = C \rightarrow 2XB = C - A \rightarrow XB = \frac{1}{2} \cdot (C - A) \rightarrow X = \frac{1}{2} \cdot (C - A)B^{-1}$$

$$|B| = 4 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

076 Sean las matrices: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad N = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $A = MM^t - 5M$ (M^t indica la traspuesta de M).

b) Calcule la matriz $B = M^{-1}$ y resuelva la ecuación $N + XM = MB$, donde X es una matriz 2×2.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 2. Opción B. Ejercicio 1)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $|M| = -2 \neq 0 \rightarrow B = M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$N + XM = MB \rightarrow N + XM = I \rightarrow XM = I - N \rightarrow X = (I - N)M^{-1}$

$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

077 Resolver la ecuación matricial $A^tX - B = 0$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

en donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

(Galicia. Junio 2003. Bloque 1. Ejercicio 2)

$A^tX - B = 0 \rightarrow A^tX = B \rightarrow X = (A^t)^{-1}B$

$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A^t| = 1 \neq 0 \rightarrow (A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

078 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halla su inversa.

b) Resuelve la siguiente ecuación: $XA^2 + 4A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$

a) $|A| = -10 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$

b) $XA^2 + 4A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} \rightarrow XA^2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} - 4A$

$\rightarrow X = \left[\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} - 4A\right] \cdot (A^2)^{-1}$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&9\\12&16\end{pmatrix}$$

$$|A^2|=100\neq 0\rightarrow (A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{25}&-\frac{9}{100}\\-\frac{3}{25}&\frac{13}{100}\end{pmatrix}$$

$$X=\left[\begin{pmatrix}6&8\\10&-20\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}\frac{4}{25}&-\frac{9}{100}\\-\frac{3}{25}&\frac{13}{100}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&-4\\-6&-28\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{4}{25}&-\frac{9}{100}\\-\frac{3}{25}&\frac{13}{100}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{7}{10}\\\frac{12}{5}&-\frac{31}{10}\end{pmatrix}$$

079 Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-2\\0&2\\-2&0\end{pmatrix}$$

Calcule la matriz P que verifica $BP-A=C^t$. (C^t indica traspuesta de C.)

(Andalucía. Año 2004. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 1)

$$BP-A=C^t\rightarrow BP=C^t+A\rightarrow P=B^{-1}(C^t+A)$$

$$|B|=2\neq 0\rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-2&4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3&-\frac{3}{2}\\-5&5&1\end{pmatrix}$$

080 Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\0&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz inversa de A.
b) Resuelve la ecuación matricial $AX-B=C$.
c) Calcula la matriz X.

(Castilla-La Mancha. Junio 2003. Bloque 1. Ejercicio A)

a) $|A| = 4 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

b) $AX - B = C \rightarrow AX = C + B \rightarrow X = A^{-1}(C + B)$

c) $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

081 Sean las matrices:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $(A - I_2)B$, siendo I_2 la matriz identidad de orden 2.
b) Obtenga la matriz B^t (matriz traspuesta de B) y calcule, si es posible, B^tA.
c) Calcule la matriz X que verifica $AX + B = C$.

(Andalucía. Año 2004. Modelo 2. Opción A. Ejercicio 1)

a) $(A - I_2)B = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $AX + B = C \rightarrow AX = C - B \rightarrow X = A^{-1}(C + B)$

$|A| = -2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

082 Determina la matriz X para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 4 & 28 \\ -8 & 12 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

083 Determinar la matriz X, solución de la ecuación matricial $AXB = I$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Extremadura. Septiembre 2008. Opción B. Problema 1)

$$AXB = I \rightarrow AX = IB^{-1} \rightarrow AX = B^{-1} \rightarrow X = A^{-1}B^{-1}$$

$$|A| = -3 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$|B| = 1 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

084 Calcula la matriz:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

que verifica la ecuación matricial $AXB = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

(C. Valenciana. Septiembre 2005. Ejercicio B. Problema 1)

$AXB = C \rightarrow AX = CB^{-1} \rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$|B| = 5 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{6}{5} & -\frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

085 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

se pide:

a) Calcular la matriz inversa de A y la matriz inversa de B.

b) Hallar la matriz X tal que $AXB = C$.

c) Calcular la matriz X.

(Castilla-La Mancha. Junio 2000. Bloque 2. Ejercicio A)

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

$|B| = 3 \neq 0 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

b) $AXB = C \rightarrow AX = CB^{-1} \rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

c) $$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

086 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule los valores de m para que tenga inversa.

b) Haciendo $m = 0$, resuelva la ecuación matricial $AXA = I_2$, donde I_2 es la matriz unidad de orden 2 y X es una matriz cuadrada de orden 2.

(Andalucía. Año 2003. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 1)

a) $|A| = m^2 + 2m + 3$

$m^2 + 2m + 3 = 0 \rightarrow$ No tiene solución. Tiene inversa para cualquier valor de m.

b) $AXA = I_2 \rightarrow AX = I_2A^{-1} \rightarrow AX = A^{-1} \rightarrow X = A^{-1}A^{-1}$

$$m = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{4}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

087 Despeja la matriz X de las siguientes ecuaciones matriciales.

a) $X + A = 3X$
b) $5X + A = X + B$
c) $X + AX = B$
d) $2X + XA = B$
e) $AX + BX = C$
f) $AX + A = BX$

Calcula la matriz X, en cada uno de los casos, sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $X + A = 3X \rightarrow 2X = A \rightarrow X = \frac{1}{2}A$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) $5X + A = X + B \rightarrow 4X = B - A \rightarrow X = \frac{1}{4}(B - A)$

$$X = \frac{1}{4} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

c) $X + AX = B \rightarrow (I + A)X = B \rightarrow X = (I + A)^{-1}B$

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d) $2X + XA = B \rightarrow X(2I + A) = B \rightarrow X = B(2I + A)^{-1}$

$$2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (2I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e) $AX + BX = C \rightarrow (A + B)X = C \rightarrow X = (A + B)^{-1}C$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

f) $AX + A = BX \rightarrow BX - AX = A \rightarrow (B - A)X = A \rightarrow X = (B - A)^{-1}A$

$$B - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

088 a) Despeja la matriz X en la ecuación: $2X - B = AX$

b) Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(Castilla-La Mancha. Junio 2008. Bloque 1. Ejercicio A)

a) $2X - B = AX \rightarrow 2X - AX = B \rightarrow (2I - A)X = B \rightarrow X = (2I - A)^{-1}B$

b) $$2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

089 Determine la matriz X que verifica la ecuación $BX - A = 2X$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(Extremadura. Junio 2004. Opción B. Problema 1)

$$BX - A = 2X \rightarrow BX - 2X = A \rightarrow (B - 2I)X = A \rightarrow X = (B - 2I)^{-1}A$$

$$B - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (B - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

090 Dada la ecuación matricial $AX + 2B = X$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Despejar la matriz X.
b) Calcular la matriz X.

(Navarra. Junio 2003. Ejercicio 1. Opción A)

a) $AX + 2B = X \rightarrow X - AX = 2B \rightarrow (I - A)X = 2B \rightarrow X = (I - A)^{-1} \cdot 2B$

b) $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

091 Resuelve la ecuación matricial $AX = BX + C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(Galicia. Septiembre 2001. Bloque 1. Ejercicio 1)

$$AX = BX + C \rightarrow AX - BX = C \rightarrow (A - B)X = C \rightarrow X = (A - B)^{-1}C$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

092 a) Despeja la matriz X en la ecuación:

$$XA^2 - B = X$$

b) Halla la matriz X sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2006. Bloque 1. Ejercicio A)

a) $XA^2 - B = X \rightarrow XA^2 - X = B \rightarrow X(A^2 - I) = B \rightarrow X = B(A^2 - I)^{-1}$

b) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

093 Resolver la ecuación matricial $AX + X = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Galicia. Septiembre 2002. Bloque 1. Ejercicio 2)

$$AX + X = B \rightarrow (A + I)X = B \rightarrow X = (A + I)^{-1}B$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

094 a) Despeja la matriz X en la ecuación: $AX + A^{-1}X = I$, siendo A^{-1} la matriz inversa de A.

b) Halla la matriz X sabiendo que: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 1. Ejercicio A)

a) $AX + A^{-1}X = I \rightarrow A^2X + X = A \rightarrow (A^2 + I)X = A \rightarrow X = (A^2 + I)^{-1}A$

b) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (A^2 + I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

095 a) Despeja la matriz X en la ecuación: $AX - X = B^t$

b) Halla la matriz X de la ecuación anterior sabiendo que las matrices A y B son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

a) $AX - X = B^t \rightarrow (A - I)X = B^t \rightarrow X = (A - I)^{-1}B^t$

b) $$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

096 Considerar la ecuación matricial $X + XA + B^t = 2C$, en donde las matrices A, B y C vienen dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

a) Despejar la matriz X en la ecuación matricial, ¿qué orden tiene?

b) Calcular la matriz $2C - B^t$ y la inversa de la matriz $I + A$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

c) Resolver la ecuación matricial obteniendo el valor de la matriz X.

(Galicia. Septiembre 2008. Bloque 1. Ejercicio 1)

a) $X + XA + B^t = 2C \rightarrow X + XA = 2C - B^t \rightarrow X(I + A) = 2C - B^t$

$X = (2C - B^t)(I + A)^{-1}$

La matriz $2C - B^t$ tiene dimensión 2×3. La matriz $I + A$ es una matriz cuadrada de orden 3; por tanto, la matriz X tiene dimensión 2×3.

b) $$2C - B^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

097 a) Resuelve la ecuación matricial:

$$XA + XA^t = C$$

siendo A^t la matriz traspuesta de A.

b) Halla la matriz X sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2004. Bloque 1. Ejercicio A)

a) $XA + XA^t = C \rightarrow X(A + A^t) = C \rightarrow X = C(A + A^t)^{-1}$

b) $A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A + A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

098 a) Resuelve la ecuación matricial: $XA + A^t = XB$ siendo A^t la matriz traspuesta de A.

b) Halla la matriz X sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Castilla-La Mancha. Junio 2004. Bloque 1. Ejercicio A)

a) $XA + A^t = XB \rightarrow XB - XA = A^t \rightarrow X(B - A) = A^t \rightarrow X = A^t(B - A)^{-1}$

b) $B - A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

099 a) Despeja la matriz X en la ecuación:

$$AX - X = BX + C$$

b) Halla la matriz X sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(Castilla-La Mancha. Junio 2006. Bloque 1. Ejercicio A)

a) $AX - X = BX + C \rightarrow AX - X - BX = C \rightarrow (A - I - B)X = C \rightarrow X = (A - I - B)^{-1}C$

b) $A - I - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A - I - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

100 Determina la matriz X, que es solución de la ecuación matricial:

$$(A - B)X - A^tX = I$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$(A - B)X - A^tX = I \rightarrow (A - B - A^t)X = I \rightarrow X = (A - B - A^t)^{-1}$

$A - B - A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = (A - B - A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

101 **Razona si las soluciones de las siguientes ecuaciones matriciales son correctas. Consideramos 0 como la matriz nula.**

a) $X^2 = 0 \longrightarrow$ **Solución** $X = 0$

b) $XA = 0 \longrightarrow$ **Solución** $X = 0$

c) $X^2 = AX \rightarrow$ **Solución** $X = A$

a) No es correcta, porque hay matrices no nulas que, multiplicadas por sí mismas, dan la matriz cero; por ejemplo, las matrices de orden 2 del tipo $\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Si la matriz A tiene inversa, la única solución es $X = 0$. Si no existe A^{-1} puede haber otras soluciones, tal como sucede en el caso anterior.

c) Escribiendo la ecuación en la forma:

$X^2 - AX = 0 \rightarrow X(X - A) = 0$

se ve que puede haber otras soluciones.

102 **Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 3 y A es diagonal:**

a) **¿Se verifica $AB = BA$ para cualquier matriz B?**

b) **¿Cómo debería ser A para que se cumpliera esta igualdad?**

a) No siempre se verifica $AB = BA$; por ejemplo:

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Veamos cómo debe ser A para que se verifique siempre la igualdad:

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} & ab_{13} \\ bb_{21} & bb_{22} & bb_{23} \\ cb_{31} & cb_{32} & cb_{33} \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & bb_{12} & cb_{13} \\ ab_{21} & bb_{22} & cb_{23} \\ ab_{31} & bb_{32} & cb_{33} \end{pmatrix}$$

La igualdad de estas matrices implica que $a = b = c$. Luego la matriz A debe ser de la forma $A = aI$.

PREPARA TU SELECTIVIDAD

1 a) Despeja la matriz X en la ecuación: $X^{-1}A + A = B$.

b) Halla la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2007. Bloque 1. Ejercicio A)

a) $X^{-1}A + A = B \rightarrow A + XA = XB \rightarrow XB - XA = A \rightarrow X(B - A) = A$

$X = A(B - A)^{-1}$

b) $B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^2X - B = AX$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

(Extremadura. Junio 2007. Opción B. Problema 1)

$A^2X - B = AX \rightarrow A^2X - AX = B \rightarrow (A^2 - A)X = B \rightarrow X = (A^2 - A)^{-1}B$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3 Determinar la matriz A que verifica la ecuación $AB + A = 2B^t$, donde $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y B^t representa la matriz traspuesta de B.

(C. Valenciana. Septiembre 2006. Ejercicio A. Problema 1)

$$AB + A = 2B^t \to A(B+I) = 2B^t \to A = 2B^t(B+I)^{-1}$$

$$B + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \to (B+I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A = 2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

4 Hallar todas las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

que satisfacen la ecuación matricial $X^2 = 2X$.

(Madrid. Junio 2004. Opción B. Ejercicio 1)

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} a^2 = 2a \\ ab + bc = 2b \\ c^2 = 2c \end{cases} \to \begin{cases} a^2 - 2a = 0 \to a(a-2) = 0 \to \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases} \\ (a+c)b = 2b \longrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 - c \end{cases} \\ c^2 - 2c = 0 \to c(c-2) = 0 \to \begin{cases} c = 0 \\ c = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Si $a = b = c = 0 \to X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si $a = 2$ y $b = c = 0 \to X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si $c = 2$ y $a = b = 0 \to X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Si $a = c = 2$ y $b = 0 \to X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Si $b \neq 0 \to a = 2 - c \to \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

5 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con a un parámetro real no nulo, compruebe que $A^{-1}B = A$.

(Aragón. Junio 2007. Opción A. Cuestión 1)

$$|A| = -a^2 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6 Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $BB^t - AA^t$.

b) Halle la matriz X que verifica $(AA^t)X = B$.

(Andalucía. Año 2007. Modelo 6. Opción A. Ejercicio 1)

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (-2 \quad 5) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}$

b) $(AA^t)X = B \rightarrow X = (AA^t)^{-1}B$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(AA^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{21} & \frac{2}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{5}{21} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{5}{21} & \frac{2}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{5}{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Halla su inversa.

b) Resuelve la ecuación $XA^2 + 5A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$.

(C. Valenciana. Septiembre 2008. Ejercicio B. Problema 1)

a) $|A| = -10 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$

b) $XA^2 + 5A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} \rightarrow XA^2 = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} - 5A$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} - 5A\right] \cdot (A^2)^{-1}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$|A^2| = 100 \neq 0 \rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & -\frac{9}{100} \\ -\frac{3}{25} & \frac{13}{100} \end{pmatrix}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & -\frac{9}{100} \\ -\frac{3}{25} & \frac{13}{100} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -10 & -30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & -\frac{9}{100} \\ -\frac{3}{25} & \frac{13}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$