MATRICES COU

1. Dadas la matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Calcular a) 2A + B, b) B - C, c) 2A + 3C.
2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Calcular: (A +B)·C
3. Siendo $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Hallar: $M\cdot N-N\cdot M$
4. Encontrar una base del espacio vectorial (M_2 , + , R), es decir del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2.
5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \\ 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ Hallar el producto A · B
6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Hallar las matrices M, triangular inferior, y N, triangular superior, con n_{ii} = 1, $\forall$ i $\in$ {1,2,3}, tales que A= M·N.
7. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ y \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ Calcular x, y, z sabiendo que $A\cdot B=C$
8. Resolver la ecuación matricial $A\cdot X=B$ siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$
9. Resolver la ecuación $X\cdot A=B+C$ siendo: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
10. Dada la matriz cuadrada de orden 2, $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, ver si es regular o singular, intentando calcular su inversa a partir de la definición.
11. Concepto de matriz inversa. ¿Es invertible la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y por qué?
12. Calcular el rango de matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

13. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, hallar los valores de *a* y *b* para que se verifique la ecuación: $A^2 + aA + bI = 0$, siendo *I* la matriz identidad.
14. Calcular las potencias sucesivas y la potencia enésima de la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
15. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Hallar A^n, para $n \in \mathbb{N}$
16. Concepto de rango de una matriz. y utilizarlo para determinar si son linealmente independientes los vectores: $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 0, 1, 1)$, $u_4 = (1, 1, 1, 2)$.
17. Demostrar que el espacio vectorial de las matrices que tienen la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ es de dimensión 3.
18. Determinar las matrices *X* que conmutan con la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, es decir, tales que $AX = XA$.
19. Dadas las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ hallar la matriz inversa de A y utilizarla para resolver el sistema de ecuaciones AX = B

DETERMINANTES COU

1. Determinante de una matriz cuadrada. Propiedades.
2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; Hallar $|A|$ y $|A|^t$.
3. Aplicar las propiedades 9 y 10 para transformar el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ en otro más sencillo de igual valor.
4. Obtener, simplificando, el desarrollo de determinante: $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$
5. Utilizando las propiedades de los determinantes, resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$
6. Utilizando las propiedades de los determinantes, resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 2 & 1 & 2x & 2x \\ 2 & 2 & 1 & 2x \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

7. Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & x & 1 \\ x & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se llaman "valores propios" de dicha matriz a los valores de l , tales que el determinante de la matriz A - lI sea nulo. Hallar los valores propios de A.

9. Dar el concepto de matriz inversa. Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, Averiguar para que valores de m existe A^{-1} . Calcular A^{-1} para m = 2.

11. Dada la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Estudiar si tiene inversa y en caso afirmativo calcularla. Los vectores $\vec{v_1} = (1,1,0)$, $\vec{v_2} = (0,1,1)$ $\vec{v_3} = (1,0,1)$¿forman una base de R^3 ?

SISTEMAS DE ECUACIONES COU

1. Sea un sistema de tres ecuaciones lineales y tres incógnitas. Discutir todas las posibilidades de compatibilidad e incompatibilidad así como el número de soluciones si éstas existen
2. Resolver aplicando el método de gauss el sistema:

$$\begin{array}{lllll} x & -2y & +z & -3w & = 0 \\ x & -3y & +z & +2w & = -2 \\ 5x & -3y & +2z & +2w & = 5 \\ 3x & -2y & -4z & & = -13 \end{array}$$

Sol (1,2,3,0)

3. a) Resolver aplicando el método de Gauss y escribir en forma matricial el sistema:

$$\begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{array}$$

b) Resolverlo también por la regla de Cramer.

4. Discutir el siguiente sistema para los distintos valores de "a":

$$\left.\begin{array}{rcl} 2ax + y + 2z & = & a \\ (a-1)x + 2y + 3z & = & 5 \\ 2x + y + 2az & = & 2-a \end{array}\right\}$$

5. Discutir y resolver en los casos que proceda el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & + & kz & = & k \\ (k-2)x & + & y & + & 3z & = & 5 \\ & & (k-1)y & & & = & 1-k \end{array}\right\}$$

6. Resolver y discutir en cada caso el sistema :

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & my & & & = & 0 \\ x & & & + & mz & = & m \\ x & + & y & + & 3z & = & 5 \end{array}\right\}$$

7. Hallar el valor de t para que el sistema siguiente sea compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ tx & + & y & + & 3z & = & 4 \\ tx & + & y & - & 7z & = & 3 \end{array}\right\}$$

y resolverlo para el valor hallado de t.

8. Estudiar, según el valor de t, el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} tx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ty & + & z & = & t \\ x & + & y & + & tz & = & t^2 \end{array}\right\}$$

9. Estudiar y resolver en función del parámetro "a" el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2ay & + & z & = & 0 \\ ax & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 5y & + & az & = & 0 \end{array}\right\}$$

10. Condiciones para que un sistema de ecuaciones sea de Cramer. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

11. Resolver la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Enunciar el teorema de Rouché - Frobenius. Estudiar el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & -1 \\ 3x & + & 5y & + & z & = & -5 \end{array}\right\}$$

13. Discutir para los distintos valores de t y resolver en los casos que sea posible el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & (1+t)y & + & z & = & 0 \\ (2+t)x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & & & - & z & = & t \end{array}\right\}$$

14. Enunciar el teorema de Rouché y aplicarlo a la discusión según los posibles valores de $t \in \mathbb{R}$, del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & t \\ x & + & (1+t)y & + & z & = & 2t \\ x & + & y & + & (1+t)z & = & 0 \end{array}\right\}$$

15. Estudiar y resolver si ello es posible el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

16. Consideremos el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} tx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & ty & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & tz & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Estúdiese según los valores de t.

b) Resuélvase en los casos en que sea compatible.

17. a) Estudiar según los valores del parámetro "a" el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & ay & + & z & = & a+2 \\ x & + & y & + & az & = & -2(a+1) \\ ax & + & y & + & z & = & a \end{array}\right\}$$

b) Resolverlo por la regla de Cramer en el caso a = -1.

18. Estudiar según los valores de "a" y resolver, cuando sea posible, el sistema:

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 0 \\ x & -2y & -z & = 0 \\ x & +4y & +3z & = 0 \\ x & +10y & +7z & = a \end{array}$$

19. Discutir y resolver, en los casos en que ello sea posible, según los valores de los parámetros "a" y "b" el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ ay + z &= 2 \\ y + az &= b \end{aligned}$$

20. Analizar y resuelve en su caso, según los valores de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ y - z &= -1 \\ 2x - y + az &= b \end{aligned}$$

21. (a) Estudiar según los valores del parámetro *t* el sistema

$$\begin{aligned} tx + 2y + z &= 1 \\ x + 2ty - z &= -1 \\ tx - ty + z &= 2 \end{aligned}$$

(b) Resolver el sistema anterior cuando éste resulte indeterminado y también en el caso *t* = 1 (Comprobar que para este valor de *t* el sistema es compatible y determinado).

22. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) Estudiar según los valores de *a* el rango de la matriz A.
(b) Resolver la ecuación matricial A · X = O.

23. (a) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro *a*:

$$\begin{aligned} ax - ay + z &= 2 + a \\ x + y &= 1 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

(b) Determinar si el plano $ax - ay + z = 2 + a$ es perpendicular a la recta $x + y = 1, \quad y + z = 0$

24. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones, y resolverlo cuando sea indeterminado:

$$\begin{aligned} \lambda x + 2y + z &= 1 \\ (1-\lambda^2)x - (1+\lambda)z &= -1-\lambda \\ (2+\lambda)y &= -1 \end{aligned}$$

25. Discutir según los valores l y resolver cuando sea indeterminado, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x + y + z &= 0 \\ \lambda y + (1-\lambda)z &= 0 \\ x + y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

26. Enunciar la Regla de Crámer, justificarla razonadamente y aplicarla para resolver el sistema:

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x - \lambda y &= 0 \\ 2\lambda x + (1+\lambda)y &= 1 \end{aligned}$$

.

27. Enunciar el teorema de Rouché-Frobenius y usarlo para discutir el sistema:

$$\begin{aligned} x + (1-\lambda)y &= \lambda \\ (1+\lambda)x - 3y &= -\lambda \end{aligned}$$

ESPACIOS VECTORIALES COU

1. Definir dependencia e independencia lineal de vectores.
   Probar que si los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente independientes, también lo son **y_1** = $\vec{u}$, **y_2** = $\vec{u}+\vec{v}$, **y_3** = $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
2. Si un conjunto de vectores contiene el vector nulo ¿es dependiente o independiente? Razona tu contestación con un ejemplo.
3. Comprobar que los vectores (1, 1, 0) , (0, 1, 1) y (1, 0, 1) son linealmente independientes.
4. Determinar los valores de a y b para que el vector (1, 4, a, b) sea combinación lineal de los vectores (1, 2, -1, 2) y (0, 1, 2, 1).
5. Determinar los valores de "a" para que resulten linealmente dependientes los vectores (-2, a, a) , (a, -2, a) y (a, a, -2). Obtener en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.
6. Calcular los valores del parámetro *t* para que los vectores de coordenadas (*t*,2,1 -t),(2+*t*,1,-*t*) , (*t* , 3 , 1 - *t*) sean linealmente dependientes y, en tal caso, hallar una relación de dependencia lineal.
7. Determinar el valor de l para que los vectores de coordenadas (1,1,l), (0,l,1-l), (1,-2,l) sean linealmente independientes.
8. Definir los siguientes conceptos: **Sistema generador, y base de un espacio vectorial.**
9. Dados los vectores $\vec{u_1}=(2,1,0)$, $\vec{u_2}=(-1,0,1)$, $\vec{u_3}=(6,2,-2)$¿Forman base del espacio vectorial R^3 ? ¿Se puede expresar alguno como combinación lineal de los demás?
10. ¿Forman base de R^3 los vectores $\vec{v1}$= (1, -3, 2), $\vec{v2}$= (0, 4, -1), $\vec{v3}$= (2, -14, 6)?
11. Probar que los vectores u = (-1, 1, 1), v = (1,-1, 1), w = (1, 1, -1) forman una base de R^3 . Determinar las coordenadas del vector (2, 4, -2) en dicha base.
12. Si los vectores v_1, v_2 y v_3 constituyen una base de R^3 , ¿sucede lo mismo con los vectores $v_1 - v_2$,$- v_2 + 2v_1$, $v_3 - v_1 + v_2$? ¿Y con $v_1 + v_2 - v_3$, $v_1 - v_2 + v_3$, $2v_1 + 3v_2 - 3v_3$?
13. Si tres vectores e_1 , e_2 , e_3 son linealmente independientes, ¿también lo son los vectores $e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_1 + 2e_2 - e_3$, $e_1 + 3e_2$? , ¿ y los vectores $e_1 + e_2$, $e_1 - 2e_2$?
14. Sean ***e*** y ***v*** dos vectores, de módulo 1 y 2 respectivamente, que forman un ángulo de 60 °. Hallar todas las combinaciones lineales de ***e*** y ***v*** que sean ortogonales a ***e*** y tengan de módulo 3.

GEOMETRIA COU

1. Sean los puntos A (x_1 , y_1 , z_1) y B (x_2 , y_2 , z_2) referidos a un sistema ortonormal $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento AB
2. Hallar las distintas formas de la ecuación de la recta determinada por los puntos A (1, -2, 3) y B (-3, 1, 4).
3. a) Ecuación de la recta que pasa por dos puntos del espacio.
   b) ¿Existe alguna recta que pase por los tres puntos (1, 2, 3) , (2, 4, 1) y (1, 1, 1)
4. Obtener razonadamente las ecuaciones paramédicas de la recta en el espacio.
5. Dados los puntos A (3, -4, 1), B (5, 1, 3) y C (4, -3, 0), determinar si el punto C pertenece o no a la recta AB.
6. Hallar las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por los puntos A(1, 1, 1) y B(3, -2, 4) y que es paralela a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-2}$
7. Determinar si existe alguna recta que pase por el origen de coordenadas y corte a las rectas

   $$r: \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

8. Obtener las coordenadas del punto simétrico del A (1, -3, 7) respecto de la recta $r: x - 1 = y + 3 = \frac{z-4}{3}$
9. Calcular la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P (1, -1, 2) y es perpendicular al plano determinado por los puntos A (1, 0, 1), B (3, 2, 1) y C (2, -1, 0) .
10. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2, 0, 1) y contiene a la recta

    $$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-1}$$

11. Hallar las ecuaciones de todos los planos que pasan por los puntos: (1, 0, 0), (2, 0, 0).
12. Obtener la ecuación de la única recta que corta perpendicularmente a las rectas

    $$r: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-5}; \quad s: \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}$$

13. Escribir la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas:

    r: x = y = z y s: x + 1 = y + 1 = 3z

14. Son coplanarias r y s , donde $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$
    Hallar el plano que las contiene.
15. Determinar las coordenadas del punto simétrico del (-3, 1, -7) respecto de la recta

    $$r: \frac{x:+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

16. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular al plano 2x + y + 2z + 1 = 0 y que contiene a la recta de ecuación $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$
17. Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto P = (1, 1, 1) y contiene a la recta $r: \begin{cases} 11x + y - 11 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.
18. Hallar la ecuación de la recta paralela al plano determinado por los puntos (0, 0, 0) , (1, 4, 1) y (-1, -1, 1), que pasa por el punto (1, 1, 1) y corta a la recta $r: \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - 3z = 5 \end{cases}$
19. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$
20. Hallar la ecuación continua de la recta que es paralela a los planos x - 3y + z = 0; 2x - y + 3z = 0 y pasa por el punto (2, -1, 5).
21. Hallar la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos 2x + y - z = 0, x - y + z + 3 = 0 y pasa por el punto (3, 2, 1).
22. Encontrar la recta paralela al plano 2x - y + z = 0 que pasa por el punto (1,1,1) y corta al eje Z
23. (a) Hallar la ecuación de la recta **r** que pasa por el punto A = (0,8,1) y es perpendicular al plano **p** : x - y + z = 2.
    (b) Hallar el área del triángulo ABC, siendo B = (2,-1,3) y C la intersección de **r** y **p**.
24. Determina si existe algún plano que contenga las dos rectas $r: \begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = 1 \\ z = 3 + 3\alpha \end{cases}$ y $s: \dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-9}{4} = \dfrac{z+2}{-1}$

    y en caso afirmativo obtener una de sus ecuaciones.

25. Determinar el plano que pasa por la recta de ecuaciones

    $r: \begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$ y es paralelo a la recta de ecuación: $\dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{-z+174}{2}$

26. a) Determinar el plano que contiene a la recta $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ y pasa por el origen de coordenadas.
    b) Calcular la distancia entre ese plano y el paralelo a él que pasa por el punto (3,1,1)
27. (a) Obtener la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,-1,-3) y es paralelo al plano p que determina los puntos (1,1,1), (2,-2,1), (1,1,2).
    (b) Calcular la distancia entre estos dos planos paralelos.
28. Paralelismo de rectas en el espacio . Dada la recta 2x = 1 - y = -z , encontrar una paralela a ella.

29. Dadas las rectas de ecuaciones $r:\begin{cases} 3x-2z=-3 \\ 3x-kz=3-4k \end{cases}$; y $s:\begin{cases} 3y-2z=-2 \\ kx-2y=k-4 \end{cases}$ determinar los valores de **k** para que las rectas r y s estén en un mismo plano y buscar una ecuación de este plano.
30. a) Posiciones relativas de una recta y un plano.

    b) ¿Cual es la posición de la recta de ecuación $x-1=\frac{y}{2}=-(z+1)$ respecto al plano x - y - z - 2 = 0?
31. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio afín tridimensional.
32. Dadas las rectas $r:\begin{cases} x+3y-3=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$; y $s:\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$
    a) ¿Son paralelas?
    b) Si la respuesta es si, determinar el plano que las contiene.
33. Dadas las rectas $r:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{-2}$; y $s:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$
    Estudiar su posición y, si fuese posible, calcular la ecuación del plano que las contiene.
34. Estudiar la posición relativa de las rectas $r:\frac{x-8}{1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-3}{-2}$ y $s:\begin{cases} x+y-13== 0 \\ -x+3y+z=10 \end{cases}$

    ¿Existe alguna recta que corte perpendicularmente a las anteriores? En caso afirmativo hallar una de sus ecuaciones paramétricas
35. Explíquese como se puede calcular la distancia de un punto a una recta. Hállese la distancia del punto A(1, -1, 0) a la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{3}$
36. Sean A,B,C, los puntos de corte del plano x + 5y - z = 5 con los ejes de coordenadas. Calcular el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo ABC y por vértice el punto (3,-1,1). [Volumen de la Pirámide = 1/3 (área de la Base x Altura)].
37. Considerar la recta r que pasa por el punto P(1,1,-1) y tiene como vector director v = (1,2,-2); (a) Calcular la distancia de esta recta al origen. (b) Obtener la ecuación de la recta proyección de r sobre el plano z = 0.
38. Explique como se puede calcular la distancia entre dos rectas.

    Hállese la distancia entre las recta: $r:\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-1 \\ z=8+2\lambda \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=2+3\mu \\ y=2-\mu \\ z=-1+4\mu \end{cases}$
39. Angulo de dos rectas . Calcular el ángulo que forman las rectas

    $r:\begin{cases} x+y-4=0 \\ 3x-2z-1=0 \end{cases}$ y $s:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$
40. Angulo de recta y plano. Calcular el ángulo que forman la recta

$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: x - y - z = 0$

41. Explique como se puede calcular la distancia de un punto a un plano.
    Hállese la distancia del punto A(1, 0, -1) al plano $\begin{cases} x = 1 - 2t + 3s \\ y = t + s \\ z = 2 + 3s \end{cases}$
42. Hallar la distancia del punto Q(5, 5, 3) al plano
    $\pi: (x,y,z) = (0,0,4) + \alpha(2,2,-1) + \beta(-3,2,0)$.
43. Explicar la fórmula para calcular el ángulo entre una recta y un plano. Hallar el ángulo que forma la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-3}$ y el plano $x + y + z + 1 = 0$.
44. Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano determinado por los puntos A (1, 1, 1) , B (0, 1, 0) y C (3, 2, 1).
45. Hallar la distancia del punto P = (3, 1, 1) a la recta: $r: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.
46. Dado el plano $\pi: 2x + 2y + z - 3 = 0$ y el punto A (1, 0, 2), sea B el pie de la perpendicular de A a p y C (1, 1, -1) un punto del plano. Se pide el área del triángulo ABC.
47. Calcular el área de triángulo cuyos vértices son : A(1,2,3), B(3, 2, 1) y C(-1, 2, 1).
48. (a) Definir el producto vectorial de dos vectores y justificar razonadamente su expresión analítica (es decir , su expresión en coordenadas).
    (b) Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $2x + y + z = 4$
49. (a) Determinar el plano π que pasa por los puntos de coordenadas (0, 0, 3) , (2, 0, -3) , (2, -2, 0).
    (b) Calcular el área del triángulo que forman los puntos en que el plano π corta a los tres ejes de coordenadas.
50. (a) Probar que, cualquiera que sea el valor de *t* , los puntos de coordenadas (1,1,*t*), (0,*t*,1 - *t*), (1,-2,*t*) nunca están alineados.
    (b) Obtener en función de *t* , el área del triángulo que determinan estos tres puntos.

ANALISIS COU

1. Calcular cuanto debe valer **a** para que la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \le 1 \\ 3 - ax^2 & si\ x > 1 \end{cases}$

   sea continua:

2. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ a & si\ x = 2 \end{cases}$ que valor se debe dar al número real **a** para que la función f(x) sea continua en todo R. Justifíquese.
3. Sea $f(x) = \frac{senx}{x}$ si *f*(0) = **k** . ¿Cuánto debe valer **k** para que la función f(x) sea continua en x = 0?

4. Calcular **a, b, c** para que sea continua la función: $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{2}{3} & si\ x \leq -1 \\ ax+3 & si\ -1<x\leq 2 \\ -x+b & si\ 2<x\leq 5 \\ c & si\ 5<x \end{cases}$

   $f(0)$ para que la función $f(x)=1-x\,sen\left(\frac{1}{x}\right)$ sea continua en el punto x = 0?

5. Enuncia el teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que la ecuación $x^3+x^2-7x+1=0$ tiene una solución en el intervalo [0, 1].
6. Definir el concepto de función continua. Enunciar el teorema de Bolzano y utilizarlo para demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene alguna solución entre 1 y 2.
7. Cumple la función $f(x)=\frac{2}{x-3}+2$ las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo [2, 4]. Averiguar si se anula en algún punto de (2, 4).
8. Sea $f(x)=x^7-3x^6+2sen(\frac{\pi}{2}x)$ ¿Es cierto que la función f se anula en algún punto x comprendido entre 3 y 4? Enunciar el resultado teórico en el que se basa la respuesta.
9. Sea $f(x)=x^7-3x^6+2sen(\frac{\pi}{2}x)$ ¿Es cierto que la derivada de la función f se anula en algún punto x comprendido entre 0 y 1? Enunciar el resultado teórico en el que se basa la respuesta.
10. Concepto de derivada de una función en un punto. Dar un ejemplo de una función que no sea derivable en el punto 0.
11. (a) Concepto de función derivable en un punto.
    (b)¿Es derivable en el punto x = 0 la función $f(x)=|senx|$? Justificar la respuesta.
12. (a) Concepto de función derivable en un punto. Derivadas laterales.
    (b)?Es derivable en el punto x = 1 la función $f(x)=x+|x-1|$? Justificar la respuesta.
13. (a) Definir el concepto de función en un punto y explicar su significado geométrico.
    (b)?En qué puntos no es derivable la función $f(x)=|x^3(x-1)|$?
14. Dada la función $f(x)=4+3x-x^2$. Calcular los puntos en que la tangente a su gráfica es paralela al eje OX y aquéllos en que es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
15. Calcular el punto de la curva $y=(1+x^2)^{-1}$ en que la pendiente de la recta tangente sea máxima.
16. Hallar los puntos de la curva $x=y^2+y$ en que la recta tangente sea perpendicular a la recta $x+y=2$.
17. (a) Utilizar la definición de derivada de una función en un punto para calcular la derivada en x = 0 de la función $f(x)=xL(1+\frac{1}{1+x^2})$ (L = Logaritmo Neperiano).
    (b)? Tiene alguna asíntota esta función?
18. Explica razonadamente, la relación que existe entre que una función sea derivable en un punto y el crecimiento o decrecimiento de esta función en ese punto.
19. Crecimiento y decrecimiento de una función en un punto.
    Determinar los intervalos en los que la función $f(x)=\ln(x^2-9),\quad |x|>3$ es creciente o decreciente.
20. Condiciones de máximo y mínimo relativo de una función en un punto.
    Encontrar los máximos o mínimos de la función $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.
21. Enunciar y demostrar una condición necesaria para que una función $f(x)$ posea un máximo local en un punto "a" en el que sea derivable. ?Es condición suficiente?

22. Estudiar los máximos y mínimos de la función $f(x)=\frac{x}{x^2-6x+9}$.
23. (a)¿Presenta la función $f(x)=e^x+L(1-x)$ algún extremo en el punto x = 0?.
    (b) Enunciar el resultado teórico en que se basa la respuesta.
24. Se considera la función $f(x)=x(1+\cos x)$
    (a) Estudiar si *f* presenta un máximo o mínimo relativo en el punto x = π
    b) ¿tiene alguna asíntota?
    (c)?Cuántas veces, cómo mínimo, se anula la derivada de esta función en el intervalo $[0,2\pi]$?
    Justificar las respuestas. Si éstas se basan en algún resultado teórico, enunciarlo.
25. (a) Definir el concepto de máximo relativo de una función *f*(x) en un punto x = a y enunciar su relación con las derivadas sucesivas de f(x) en x = a.
    (b) Determinar si la función $f(x)=x^2-sen^2x$ tiene un máximo relativo en x = 0.
26. Enunciado del teorema de Rolle. Dar una explicación gráfica del mismo. (Justifíquese geométricamente).
27. Enunciar el teorema de Rolle. La ecuación $e^{2x}=2x+1$ tiene, evidentemente, una solución (x = 0). Demuéstrese que no tiene mas soluciones.
28. Comprobar que la función $f(x)=-x^2+2x+5$ cumple las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,3]$ y que efectivamente verifica dicho teorema.
29. Verificar que la función $f(x)=x-x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en los segmentos [-1, 0] y [0, 1].
30. (a) Enunciar el teorema de Rolle. (b) Utilizar este teorema para demostrar que la función $f(x)=x-L(1+x)$ no se anula en el intervalo $[0,+\infty]$, más que en el punto x = 0.
31. (a) Si la derivada de una función *f* es mayor que 0 en todo punto, probar que no puede haber dos puntos distintos *x, y* tales que *f* (x) = *f* (y). Teniendo en cuenta esto, demostrar que la función $f(x)=2x-e^{-2x}+1$ solamente se anula en el punto x = 0.
    (b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función anterior el eje X y las rectas verticales x = -1
    y x = 1.
32. (a) Enunciar el teorema de Rolle.
    (b) Determinar a, b, c para que la función $f(x)=\begin{cases} asenx+b\cos x+c, & si\ x<\frac{\pi}{2} \\ sen^2x-a\cos x, & si\ x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$ satisfaga la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,\pi]$
33. (a) Enunciar y demostrar el Teorema de Rolle.
    (b) Comprobar si la función $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [-1,1]
34. Dadas las funciones $f(x)=3x^2+5x+2,\quad g(x)=x+3$. Aplicar el teorema del valor medio generalizado a esta funciones en el intervalo $[0,3]$.
35. Comprobar que las funciones $f(x)=x^2+4,\quad g(x)=x^3-2,$ cumplen las condiciones del teorema del valor medio generalizado en el intervalo [0, 6] y determinar el punto ó los puntos del interior del intervalo cuya existencia asegura dicho teorema.
36. Enunciar el teorema del valor medio del cálculo diferencial y analizar si puede aplicarse a la función $f(x)=x^2-6x+8$ en el intervalo $[-2,4]$. En caso negativo decir por qué. En caso afirmativo, calcular el punto en el que se verifica el teorema.
37. Enunciar el teorema del valor medio (Lagrange). Aplicar este teorema para calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{9}$.

38. Enunciar el teorema del valor medio del cálculo diferencial. Aplicar este teorema para calcular un valor aproximado de $\sqrt[3]{28}$.
39. Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 de la función *f* (x) = *cos x* en un entorno del origen, $p_4(x)$, y , posteriormente, comprobar que: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - P_4(x)}{x^4} = 0$
40. Haz un desarrollo de Taylor con término complementario de cuarto grado, de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, en un punto adecuado para desarrollar el apartado b).
    b) Hallar un valor aproximado de la raíz cúbica de 9.
    c) Acotar el error cometido.
41. Calcular el desarrollo de Taylor de orden 2 de la función $f(x) = (1 + \sqrt{x})^2$ en un entorno del punto x = 4.
42. (a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \ln(senx)$ en el punto $x = \pi/2$. (ln indica logaritmo neperiano).
    (b) Calcular $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln(senx)}{\cos^2 x}$
43. Enunciar las condiciones que deben cumplir dos funciones para poder aplicar la regla de L'Hopital.

    Calcular, $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - senx}{x^3}$.

44. Enunciar las condiciones que deben cumplir dos funciones para poder aplicar la regla de L'Hopital.

    Calcular, $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x^2 - 9}$
    (Hacerlo también descomponiéndolo en factores).

45. Hallar $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$
46. Calcular $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x}\right]^{tgx}$
47. (a) Enunciar el teorema de L ' Hopital.

    (b) Calcular $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - senx}{(\pi - 2x)\cdot \cos x}$.

48. Calcular $\lim_{x\to 0} x \cdot Lx$ (L = logaritmo neperiano).
49. (a) Enunciar el teorema de L'Hopital.

    (b) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^2 senx}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - sen^2 x}{x^4}$.

50. (a) Enunciar el teorema de L' Hopital.

    (b) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x - L(1+x)}{(x + L(1+x))^2}$ (L = Logaritmo Neperiano).

51. Estudiar: máximos y mínimos, concavidad, convexidad y asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

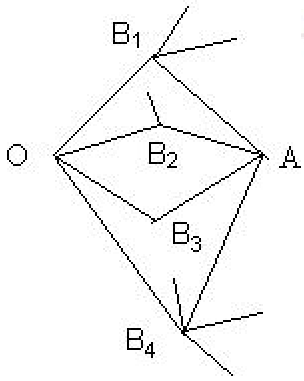
52. Sea *y = f(x)* una función derivable en un punto x_0 . Escriba la ecuación de su recta tangente en el punto x_0 . Si $y = (x^2 - x)e^x$ hállese la ecuación de la tangente en un punto de inflexión de la curva.
53. Dibujar la curva $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 6}$.
54. (a) Demostrar que la función $f(x) = x^3 + 2x - 3$ es estrictamente creciente.
    (b) Hallar el área limitada por la gráfica de la función *f*, el eje X y las rectas verticales x = 0 y x = 2.
55. Calcular la altura del cono inscrito en una esfera de 4 cm de diámetro que tiene volumen máximo.
56. Representar gráficamente la función $f(x) = x^{-1}e^x$ en el intervalo $0{,}5 \le x \le 2$.

PROBABILIDAD

1. Dados tres sucesos A, B y C relativos a un determinado experimento aleatorio se consideran los sucesos $s_1 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ y $s_2 = (A \cup B) \cap C$.
   Explicar lo que significa y estudiar si son compatibles.
2. En el experimento aleatorio lanzar tres veces una moneda, se pide escribir:
   a) El espacio muestral.
   b) El suceso "sacar al menos una cara".
   c) El suceso " no sacar cruz en ninguna tirada".
   d) El suceso " que salgan más cruces que caras "
   .
3. Se considera el experimento consistente en lanzar un dado dos veces. Se pide:
   a) Describir el espacio muestral.
   b) Describir los sucesos siguientes y calcular el numero de elementos que lo componen (cardinal).
   A: " La suma es cinco "
   B: " La suma es 10 "
   C: "La suma es menor o igual que 5.
4. En una urna hay cinco bolas de colores distintos y se sacan dos a la vez.
   a) Determinar el espacio muestral.
   b) Determinar los sucesos : A = " una de las bolas es de un determinado color" y B = " Ninguna de las bolas sea de un determinado color ".
5. En una urna hay cinco bolas de distinto color y se sacan dos bolas en dos extracciones sucesivas. Considerar separadamente los casos en los que hay reemplazamiento de la primera bola extraída (es decir, se introduce de nuevo en la urna) y en los que no hay reemplazamiento, para calcular :
   a) Los espacios muestrales.
   b) El suceso A " no obtener un determinado color "
6. Sea el experimento extraer una carta de una baraja española, sea los sucesos : A = " obtener una espada " y B = " obtener un caballo"
   Se pide escribir : $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$
7. Se lanzan dos dados. Calcular la probabilidad de obtener:
   a) Suma igual a 6.
   b) Suma impar.
   c) Suma mayor que 3.
   d) Sólo un 4 en algún dado.
   e) Al menos un 4 en algún dado.

8. Supongamos que la probabilidad de que mañana llueva es 0,4 , y la de que llueva pasado mañana es 0,3; supongamos que la probabilidad de que llueva los dos días es 0,2. Calcular:
   a) La probabilidad de que llueva uno, al menos de los dos días.
   b) La probabilidad de que no llueva ningún día.
   c) La probabilidad de que sólo llueva mañana.
   d) La probabilidad de que sólo llueva un día.
9. Calcular la probabilidad de que al lanzar tres monedas al aire:
   b) Salga al menos una cruz.
   c) Salgan más cruces que caras.
10. Una bolsa contiene bolas numeradas del uno al ocho. Se realiza un experimento que consiste en extraer una bola de la bolsa y anotar su número. Consideremos los siguientes sucesos. A = "salir par "; B = " salir impar "; C = "salir múltiplo de 4 ".
    Calcular la probabilidad de $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$.
11. Se realiza un experimento que consiste en la extracción de una carta de una baraja española. Consideremos los siguientes sucesos : A = " Obtener un oro" ; B = " Obtener un rey "; C = "Obtener un as de espadas " . Hallar las probabilidades
    $A \cup B$ y $A \cup C$.
12. Se lanza un dado dos veces. Calcular la probabilidad de los sucesos A = " que la suma de las caras sea 5 ", B = " que la suma de las caras sea 10 " y C = " que la suma sea menor o igual que 5 ".
13. Se lanzan dos dados, hállese la probabilidad de los siguientes sucesos:
    a) A = " el producto de tantos obtenidos vale 17 "
    b) B = " La suma de tantos obtenidos es mayor que el producto "
14. Un dado esta trucado, de modo que la probabilidad de obtener las distintas caras es directamente proporcional a los números de estas. Se pide :
    a) La probabilidad de cada una de las caras.
    b) La probabilidad de sacar número par.
15. Se ha trucado una moneda de tal forma que la probabilidad de obtener cara es triple que la probabilidad de obtener cruz. ¿cuál es la probabilidad de cada suceso elemental?
16. Se elige al azar una ficha de domino. Hállese la probabilidad de que :
    a) Sea un seis. b) Sea blanca. c) Sea blanca o seis.
17. Hállese la probabilidad de que al elegir al azar una ficha de dominó la suma de puntos de la misma sea 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor que 10?
18. Se extraen sucesivamente dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos reyes?
19. De una urna que contiene nueve bolas rojas y cinco negras se extraen sucesivamente dos bolas. Hallar la probabilidad de los siguientes suceso:
    a) Que las dos bolas sean negras.
    b) Que las dos bolas sean rojas.
    c) Que la primera sea roja y la segunda negra.
20. En un examen de sociología, un alumno sólo ha estudiado 15 temas de los 25 que contiene el cuestionario. El examen consiste en contestar a dos temas extraídos al azar del total . Hallar la probabilidad de que los dos temas sean de los que el alumno ha estudiado.
21. Una caja A contiene 2 bola blancas y 3 negras. Otra caja B contiene 3 bolas blancas y 2 negras. Sacamos una bola de la caja A y la introducimos en la caja B, razona cual es la probabilidad de que sea blanca.
22. Se tiene una bolsa con 10 bolas rojas y 6 negras, de las que se extraen dos bolas. Hallar la probabilidad de que ambas sean negras:
    a) con devolución a la bolsa de la primera bola extraída.
    b) Sin devolución.

23. En cierto hotel el 40% de los huéspedes del año 1984 fueron hombres y el resto mujeres. Del total de mujeres el 65% fueron extranjeras y el resto nativas. Si se elige al azar un huésped del hotel, del año 1984, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y nativa?
24. Se ha comprobado que el 48% de los alumnos de COU de cierta región son aficionados a la música clásica y a la pintura, y que el 60% de los aficionados a la pintura, también son aficionados a la música clásica. Si elegimos al azar a un alumno de COU de esa región, ¿que probabilidad hay de que no sea aficionado a la pintura?. Justificar la respuesta .
25. En el COU de cierto Instituto hay un total de 100 alumnos, de los cuales: 40 son varones, 30 usan gafas, y 15 son varones y usan gafas. Si seleccionamos al azar un alumno de dicho curso: a). ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use gafas? b). Si sabemos que el alumno seleccionado no usa gafas ¿qué probabilidad hay de que sea varón? Justificar la respuesta.
26. Se ha comprobado que el 35% de los alumnos de cierto Instituto son aficionados al teatro y a la música clásica, y que el 30% de los aficionados al teatro no son aficionados a la música clásica. Si un alumno es seleccionado al azar en dicho Instituto, ¿qué probabilidad hay de que sea aficionado al teatro?. Justificar la respuesta.
27. Sabiendo que el 40% de los residentes en cierta localidad son consumidores de pescado y que con probabilidad 0,25 un consumidor de pescado no es consumidor de carne, ¿cuál sería la probabilidad de que seleccionado al azar un residente en esa localidad, resulte ser consumidor de carne y de pescado? Justificar la respuesta.
28. En una ciudad se publican dos periódicos: A y B. Sabiendo que un 10% de los residentes en esa ciudad leen ambos periódicos y que el 60% de los lectores de B no son lectores de A, ¿cuál sería la probabilidad de que seleccionado al azar un residente en esa ciudad resulte lector de B? Justificar la respuesta.
29. El 30% de las ratas inyectadas con cierta sustancia mueren antes de los dos días, y el 60% sobreviven tres días. Calcular la probabilidad de que una rata que ha sobrevivido dos días, sobreviva tres.
30. En un espacio probabilístico, consideremos los sucesos A y B, ambos de probabilidad no nula. Razonar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
    a) Si A y B son incompatibles, entonces son independientes.
    b) Si A y B son independientes, entonces son incompatibles.
    c) Si A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B/A)$
31. Considérese el experimento que consiste en extraer una carta de una baraja española de 40 cartas. Decir si los sucesos A = { extraer oros} y B = {extraer figura} son independientes.
32. Un juego consiste en extraer, simultáneamente, dos cartas de una baraja española de 40 cartas. Si se obtienen dos copas o dos figuras, se gana; si no es así se pierde. ¿cuál es la probabilidad de ganar en este juego?
33. Supongamos que un móvil sale del punto O y elige un camino al azar (véase la figura). En cada cruce, elige también un camino al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue a A?



34. Un ratón huye de un gato, puede entrar por cada uno de los callejones A , B ó C. En cada uno de ellos el gato puede alcanzarlo o no. Se dan las siguientes probabilidades P(entre por A) = P(A) = 0,3 ; P(B) = 0,5 ; P(C) = 0,2.
    P(Lo cace habiendo entrado en A) = P(+/A) = 0,4 ; P(+/B) = 0,6 y P(+/C) = 0,1
    Calcular la probabilidad de que el gato cace al ratón.
35. En una casa hay tres llaveros A, B y C, el primero con tres llaves, el segundo con cinco llaves y el tercero con siete, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y de él una llave para intentar abrir el trastero. Se pide :
    a) ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte con la llave?
    b) ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?
36. Un vehículo es sometido a una inspección técnica. En el proceso de inspección tiene que pasar por tres controles: A, B y C (en este orden). Por la experiencia acumulada, se sabe que el control A informa negativamente en el 15% de los casos o bien pasa el vehículo al control B, quien a su vez, informa negativamente en el 8% de los casos o bien pasa el vehículo al control C. Finalmente, C informa negativamente con probabilidad 0,02 o emite informe favorable. Cuando un control emite informe negativo el vehículo es declarado "No apto para circular". ¿Cuál será la probabilidad de que un vehículo sometido a dicha inspección técnica sea declarado "No apto para circular"? Justificar la respuesta.
37. De una baraja de 48 cartas se extraen simultáneamente dos de ellas. Calcular la probabilidad de que :
    a) Las dos sean copas.
    b) Al menos una sea copas.
    c) Una sea copas y la otra espadas.
38. Se lanza un dado 4 veces y se considera la variable aleatoria X, que indica el número de veces que se obtiene una puntuación divisible entre 3.
    Establecer la distribución de probabilidad y la función de distribución de la variable X y representarlas gráficamente.
39. ¿Qué tablas, entre las siguientes, podrían ser la distribución de probabilidad de una cierta variable aleatoria X? Razonar la respuesta.

a

X	1	2	3
Prob.	0,4	0,4	0,2

b

X	1	2	3
Prob.	0,2	0,4	0,3

c

X	1	2	3
Prob.	0,5	-0,1	0,6

d

X	1	2	3
Prob.	0,3	0,4	0,4

e

X	-2	-1	0	+1	+2
Prob.	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

40. Hallar la probabilidad de que una familia con 4 hijos tenga
    a) al menos 1 varón.
    b) al menos 2 hembras.
41. Se sabe que la probabilidad de que un habitante de cierto país sea rubio es 0,4, y la de que tenga ojos negros, 0,3. Calcular las probabilidades de que:
    a) Elegida una persona sea rubia y de ojos negros.
    b) Elegida una persona, no sea rubia o tenga los ojos negros.
    c) Elegidas tres personas, sean rubias.
    d) Elegidas dos personas, sean rubias o tengan los ojos negros.

42. En un monedero hay 5 monedas: una de peseta, dos de *duro*, y dos de cinco *duros*. Sacamos una moneda al azar y anotamos su valor en pesetas. Establecer las funciones de probabilidad y de distribución de la correspondiente variable aleatoria y representarlas gráficamente.
43. El 5% de los habitantes de una gran ciudad poseen titulo universitario. ¿Cuál es la probabilidad de que elegidas al azar 50 de dichas personas haya a lo sumo 4 con titulación universitaria?
44. El 5% de los habitantes de una gran ciudad son analfabetos. ¿Cuál es la probabilidad de que elegidas al azar 50 de dichas personas haya a lo sumo 4 que sean analfabetas ?
45. La probabilidad de nacimientos de niños varones en España es de 51'7% . Hallar la probabilidad de que una familia de 5 hijos tenga:
    a) Por lo menos una niña.
    b) Por lo menos un niño.
46. Calcular la probabilidad de que en una colectividad de 30 individuos 10 hayan nacido el día de Navidad.
47. Una caja contiene 5 lámparas eléctricas. Se sabe que dos de ellas están defectuosas. Si probamos una tras otra hasta localizar las dos defectuosas, ¿cual es la probabilidad de suspender el proceso en la tercera prueba?
48. Es conocido que en cierto país la probabilidad de que un hombre de 25 años llegue a los 75 años, es de 0,8. Si elegimos a 3 hombres de 25 años de dicho país, calcular la probabilidad de que:
    a). Sólo uno llegue a los 75 años.
    b). Al menos uno llegue a los 75 años.
49. Explica cual es la fórmula de la probabilidad de que al lanzar 3 monedas se obtengan " x " caras. Aplicando dicha fórmula se pide:
    a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 cara?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?
    c) Si sabemos que se ha obtenido un número impar de caras ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenidas sea 1?
50. El 4% de los frigoríficos fabricados en determinada cadena de montaje son defectuosos. Si la producción mensual de dicha cadena es de 2.000 frigoríficos, ¿cuál es la probabilidad de que en un mes cualquiera el número de frigoríficos defectuosos esté comprendido entre 60 y 100
51. Se admite que la probabilidad de que una cierta vacuna produzca reacción alérgica es de 0,0001. ¿Qué probabilidad hay de que en una campaña de vacunación extendida a 26.000 personas, se den más de 4 casos alérgicos?
52. En cierta población de varones se ha determinado que el porcentaje de fumadores es del 40%. Si 10 personas son seleccionadas al azar en dicha población, calcular : a) La probabilidad de que no haya entre ellas ningún fumador. b) La probabilidad de que al menos haya entre ellas un fumador. c) El número esperado de fumadores en esas 10 personas. Justificar las respuestas.
53. El Ministerio de Educación y Ciencia ha determinado que el 30% de los alumnos que inician un determinado nivel sufren el llamado fracaso escolar. Elegidos 8 alumnos al azar de ese nivel, hallar : a) La probabilidad de que ninguno fracase escolarmente , b) La probabilidad de que fracase la mitad. c) La media y la varianza de la distribución.
54. El 75% de la población considera que los tratamientos de psicoterapia son caros. Elegidos una muestra al azar formada por 6 individuos, hallar : a) La probabilidad de que los 6 los consideren caros. b) La probabilidad de que ninguno los considere caros. c) La probabilidad que al menos dos lo consideren caros.
55. En una celebración familiar, 15 personas (9 adultos y 6 niños) comieron alimentos contaminados con cierta bacteria. Es conocido que una vez se entra en contacto con esa

bacteria, hay un 25% de posibilidades de que un adulto manifieste cierta enfermedad intestinal y un 40% de que la manifieste un niño. a) ¿Cuál es la probabilidad de que no más de 3 adultos manifiesten la enfermedad? b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 niños manifiesten la enfermedad? c) ¿Qué número de personas (entre las 15) cabe esperar manifiesten esa enfermedad?

56. Se ha comprobado que determinada prueba cultural es superada por el 70 % de las personas con estudios de grado medio y por el 55% de las personas con estudios primarios. Un total de 10 personas (6 con estudios de grado medio y 4 con estudios primarios) realizan dicha prueba cultural. Se pide: a) La probabilidad de que exactamente 4 de las personas con estudio de grado medio superen la prueba. b) La probabilidad de que al menos 1 de las personas con estudios primarios superen la prueba. c) Si consideramos la variable "Número de personas que superan la prueba entre las 10 que la realizan", ¿seguiría dicha variable un modelo binomial de probabilidad? Justificar las respuestas.
57. En la fabricación en serie de bombillas en cierta fábrica, se estima que cada partida de 1.000, cinco son defectuosas. Si en un año se han fabricado 50.000 bombillas , ¿cuántas cabe esperar que presenten defectos? ¿cuál es la varianza y la distribución típica de la distribución?
58. Cuando se administra a una madre sifilítica cantidad suficiente de penicilina en el curso del embarazo, se tiene la probabilidad de 0'95 de que la criatura nazca sana. Determinar la probabilidad de que en un grupo de 6 madres sifilíticas que están embarazadas y se les suministra penicilina regularmente a) 4 de ellas tengan criaturas sanas. b) 4 de ellas tengan criaturas no sanas.
59. Si el 20% de los cerrojos producidos por una maquina son defectuosos, determinar la probabilidad de que de 4 cerrojos elegidos al azar, (a) 1 sea defectuoso. (b) a lo más 2 sean defectuosos.
60. En una factoría se produce un nuevo objeto formado por 4 piezas. En la producción de 1.000 de tales objetos se han obtenido las siguientes frecuencias de objetos defectuosos:

Componentes defectuosos	0	1	2	3	4
Nº de juguetes	767	172	50	8	3

61. Ajustar una distribución binomial y calcular la probabilidad de que, elegido un juguete al azar, tenga exactamente un componente defectuoso.
62. Una moneda fue lanzada al aire 1000 series de 5 veces cada serie, y se observo el número de caras de cada serie:

nº de caras	0	1	2	3	4	5
nº de series	38	144	342	287	164	25

63. Ajustar una distribución binomial a estos datos.
64. Se ha determinado que la probabilidad de que cierta semilla germine, es de 3/4 si es plantada en terreno húmedo, y de 1/5 si es plantada en terreno seco. Un agricultor planta 12 de tales semillas en terreno húmedo y 15 en terreno seco. Contestar, justificando la respuesta: a) ¿Qué probabilidad hay de que germine 8 de las 12 semillas plantadas en terreno húmedo?. b) ¿Qué probabilidad hay de que no germine ninguna de las 15 semillas plantadas en terreno seco?. c) ¿Qué número total, (entre los dos terrenos), de semillas cabe esperar que germinen?. d) ¿La variable "Nº de semillas que germinan entre las 27 plantadas", seguiría un modelo Binomial de probabilidad

65. La duración en segundos, de los discos que ponen en cierta emisora de radio sigue una distribución Normal de media 180 sg. y desviación 30 sg.
    a) ¿Qué porcentaje de discos tendrá una duración comprendida entre 170 y 200 segundos?
    b) ¿Cuál es la probabilidad de que un disco elegido al azar dure más de 180 sg.?
66. ¿Que relación guardan tres curvas de distribución normal con la misma media y distinta desviaciones? ¿ y con la misma desviación típica y distintas medias? Justifíquese la respuesta.
67. Se ha aplicado a 300 alumnos de un instituto un test de memorización y se ha observado que los resultados se distribuyen normalmente, con media 30 y desviación típica 12. Responder razonadamente las siguientes cuestiones:
    a) ¿Qué porcentaje de alumnos tendrá una puntuación, en dicho test, comprendida entre 20 y 30?
    b) ¿Cuántos alumnos tendrán puntuación superior a 42?
68. Se llama cociente intelectual (C.I.) al coeficiente entre la edad mental y la edad real. Se sabe que la distribución del C.I. se distribuye normalmente con media 0,95 y desviación típica 0,22. En una población con 2.600 personas se desea saber:
    a) ¿Cuántas tendrán un C.I. superior a 1,37?
    b) ¿Cuántas tendrán un C.I. inferior a 0,07?
    c) ¿Cuántas tendrán un C.I. entre 0,8 y 1,15?
69. Se sabe que las calificaciones del profesor A se distribuyen N(4'4 , 2'5) y las del profesor B, N(4'8 , 0'9). Sabiendo que ambos profesores aprueban al alumno cuando su calificación es igual o superior a 5, ¿con cual de ellos es más fácil aprobar?
70. El peso de los toros de determinada ganadería se distribuye como una distribución normal 500 kg. de media y 45 kg. de desviación típica. Si la ganadería 2.000 toros,
    a) ¿Cuántos pesarán más de 540 kg.?
    b) ¿Cuántos pesarán menos de 480 kg.?
    c) ¿Cuántos pesarán entre 490 y 510 kg.?
71. Tras aplicar un examen a un gran colectivo de estudiantes, se comprobó que las calificaciones obtenidas se ajustaban bastante a una distribución normal. La calificación media de la distribución fue 5,8 y la distribución típica 1. Elegido al azar un estudiante, ¿cual es la probabilidad de que su calificación esté comprendida entre 6,7 y 6,85
72. La vida media de una cierta población es de 45 años, con una desviación típica de 5 años. Calcular la probabilidad de que elegido un elemento de esta población al azar, tenga más de 52 años. (se supone que la vida de una población sigue una ley normal).
73. Supongamos que la distribución de estaturas de una población es una distribución normal de media 160 cm. y desviación típica 10 cm. Hallar la probabilidad de que una persona elegida al azar tenga una estatura comprendida entre 166,5 y 167,5 cm.
74. Una población de personas sigue una ley normal en la distribución de sus pesos, se sabe que el 90% de la población pesa más de 50 kg. y que el 80% pesan menos de 80 kg. Calcular la media y desviación típica de la distribución de pesos.
75. La presión sanguínea de ciertos enfermos sigue una ley normal de media 90 mm. Hg y de desviación típica 12 mm. Hg. Hallar la probabilidad de que elegido un paciente al azar:
    a) Su presión sea mayor que 115 mm. Hg.
    b) Su presión este comprendida entre 80 y 110 mm. Hg.
76. Los estudiantes de una Universidad fueron sometidos a un test de inteligencia. Suponiendo que las puntuaciones alcanzadas siguen una ley normal con media igual a 100 puntos y desviación típica igual a 10 puntos, se pide hallar las probabilidades de que: (a) un estudiante obtenga más de 120 puntos, (b) un estudiante obtenga menos de 80 puntos.

77. El peso en toneladas de los rollos de acero fabricados en una planta se distribuyen según una ley normal N(10 ; 0,5). Sólo se admiten los rollos con peso comprendido entre 9,5 y 11 toneladas. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar un rollo dado?
78. Se ha aplicado a 300 alumnos un test y se ha obtenido que los resultados se distribuyen normalmente con media 30 y desviación típica 12.
    a) ¿Qué porcentaje de alumnos tendrá una puntuación comprendida entre 20 y 30?
    b) ¿ Cuántos alumnos tendrán puntuación mayor de 42?
79. Se ha comprobado que el Tiempo de tramitación , (en días) , de cierta documentación, sigue una N(12 , 2) en la oficina A, y una N(12 , 1) en la oficina B. Indicar, justificando la respuesta, en cuál de las dos oficinas, es más probable que la documentación tarde en tramitarse : a) mas de 12 días. b) menos de 10 días.
80. La cantidad de sustancia S contenida en una dosis de cierta vacuna se distribuye según un modelo Normal de probabilidad con una media de 50 unidades. Se ha comprobado que la vacuna surte efecto, (inmuniza), si la dosis administrada contiene una cantidad de S comprendida entre 46 y 54 unidades. Sabiendo que el 2,5% de las dosis contienen una cantidad de S superior a 54 unidades, a) ¿Qué probabilidad hay de que un individuo, al que se le administre una dósis elegida al azar, no se inmunice? justificar la respuesta. a) aproximadamente ¿cuánto vale la desviación típica?
81. En una población de deportistas se ha comprobado que el tiempo de recuperación tras determinado esfuerzo físico, sigue un modelo Normal de probabilidad con una media de 5 minutos. Sabiendo que el 2,5% de tales deportistas tardan en recuperarse de ese esfuerzo físico más de 7 minutos, contestar justificando la respuesta : a) ¿Qué porcentaje de deportistas tardan en recuperarse entre 3 y 5 minutos?. b) Aproximadamente, ¿cuál sería la desviación típica?
82. En una población de estudiantes se ha comprobado que la calificación obtenida en Inglés sigue un modelo Normal de probabilidad con una media de 5 si se ha seguido el método de trabajo A y con una media de 6 si se ha seguido el método de trabajo B. Sabiendo que el 4% de los alumnos que han seguido el método A obtienen una calificación inferior a 3,5 y que el 2% de los alumnos que han seguido el método B superan el 8, contestar razonadamente las respuestas: a). ¿Qué porcentaje de estudiantes adiestrados con el método A no superan la calificación de 6,5? b). ¿Qué porcentaje de estudiantes adiestrados con el método B obtienen calificación comprendida entre 4 y 6?
83. Cierto fármaco se comercializa en tabletas de 100 mg. En su composición intervienen la sustancia S y se ha comprobado que la cantidad de S por tableta sigue un modelo Normal con media 20 mg y varianza 4 mg^2.
    Sabiendo que una tableta surte efecto para cierta dolencia únicamente si contiene entre 19 y 22 mg de S, se pide: a)¿ Cuál sería la probabilidad de que una tableta no surta efecto para esa dolencia? b) ¿Qué cantidad de S por tableta sería superada por el 67% de la producción?. Justificar la respuestas.