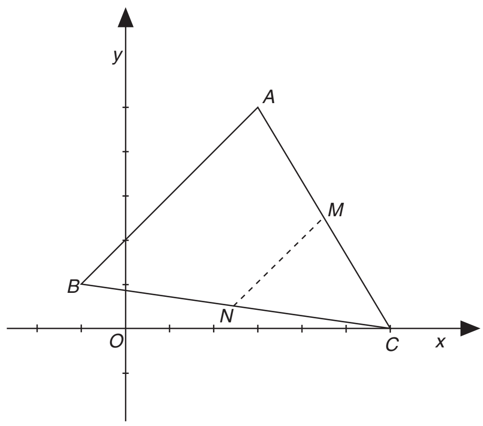
Actividades iniciales

1. Comprueba que el segmento que une los puntos medios de los lados *AC* y *BC* del triángulo *A* (3, 5); *B*(–1, –1); *C*(6, 0) es paralelo al lado *AB* y de módulo su mitad.



Las coordenadas de los puntos medios de los lados *AC* y *BC*, *M* y *N*, son, respectivamente:
M (9/2, 5/2) y *N* (5/2, 1/2).

Los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ tienen por coordenadas:
$\overline{AB} = (4, 4)$ y $\overline{MN} = (2, 2)$
Ambos son paralelos, ya que $\overline{AB} = 2\overline{MN}$.

Los módulos de ambos vectores son:
$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 2\sqrt{8}$
$|\overline{MN}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$
Por tanto, $|\overline{AB}| = 2|\overline{MN}|$

2. Sabiendo que los vectores *u* y *v* son unitarios, demuestra que *u* + *v* es ortogonal a *u* – *v*.

Veamos que $(u + v)\cdot(u - v) = 0$.
Tenemos que,
$(u + v)\cdot(u - v) = u\cdot u + v\cdot u - u\cdot v - v\cdot v = 1 + v\cdot u - u\cdot v - 1 = 0$
ya que $u\cdot u = 1$, $v\cdot v = 1$ y $u\cdot v = v\cdot u$

3. Dados los vectores *u* = (1, 5), *v* = (–3, 4) y *w* (5, 12), halla los ángulos que forman dos a dos.

Aplicando la definición de producto escalar, obtenemos:

$$cos\,(\widehat{u,\ w}) = \frac{u\cdot v}{|u|\,|v|} = \frac{-3 + 20}{\sqrt{26}\,\sqrt{25}} = \frac{17}{25{,}5} = 0{,}667$$

luego $(\widehat{u,\ v}) = 48°10'47{,}4''$

$$cos\,(\widehat{u,\ w}) = \frac{u\cdot w}{|u|\,|w|} = \frac{5 + 60}{\sqrt{26}\,\sqrt{169}} = \frac{65}{66{,}3} = 0{,}98$$

luego $(\widehat{u,\ w}) = 11°18'35{,}8''$

$$cos\,(\widehat{v,\ w}) = \frac{v\cdot w}{|v|\,|w|} = \frac{-15 + 48}{\sqrt{25}\,\sqrt{169}} = \frac{33}{65} = 0{,}51$$

luego $(\widehat{v,\ w}) = 59°29'23{,}2''$

4. Dados los vectores *u* = (1, 5) y *v* = (3, –1), halla el vector *w* de manera que se verifique *x*·*u* = 1 y *w* sea pendicular a *v*.

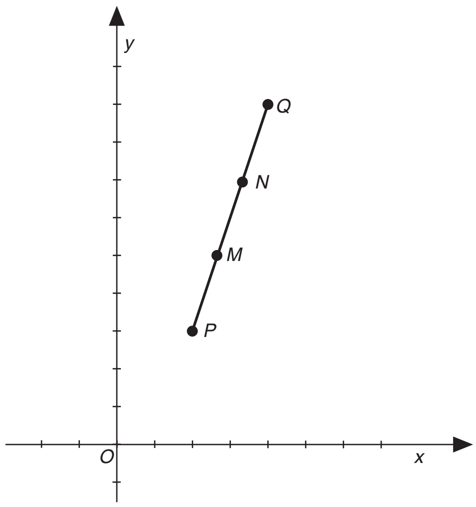
El vector $w = (a, b)$ debe cumplir $w\cdot u = 1$ y $w\cdot v = 0$.

Operando se obtiene el sistema $\begin{cases} a + 5b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$

La solución del sistema es $a = \frac{1}{16}$, $b = \frac{3}{16}$

El vector *w* buscado es *w* = (1/16, 3/16)

5. Un vector tiene por extremos los puntos *P*(2, 3) y *Q* (4, 9). Calcula las coordenadas de los puntos que lo dividen en tres partes iguales.



Las coordenadas del vector $\overline{PQ}$ son $\overline{PQ} = (2, 6)$.

El punto *M* (*a*, *b*) debe cumplir $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overline{PQ}$

Por tanto, $(a - 2, b - 3) = \frac{1}{3}(2, 6)$. Operando, $a = \frac{8}{3}$, $b = 5$

El punto *N* (*a*', *b*') debe cumplir $\overrightarrow{PN} = \frac{2}{3}\overline{PQ}$

Por tanto, $(a' - 2, b^t - 3) = \frac{2}{3}(2, 6)$. Operando, $a' = \frac{10}{3}$, $b' = 7$

Los puntos buscados son: *M* (8/3, 5) y *N* (10/3, 7)

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Dados en R^3 los puntos *A* = (2, 3, 5) y *B* = (1, 0, 8), se pide:

a) Halla las componentes de los vectores fijos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$.

b) Halla dos puntos C y D, tales que $\overline{CD}$ sea equipolente a $\overline{AB}$.

c) Halla el extremo F de un vector fijo $\overline{EF}$ tal que sea equipolente a $\overline{AB}$, siendo $E = (-3, 6, -9)$

d) Halla el origen G de un vector fijo $\overline{GH}$ tal que sea equipolente a $\overline{AB}$, siendo $H = (3, 2, 9)$.

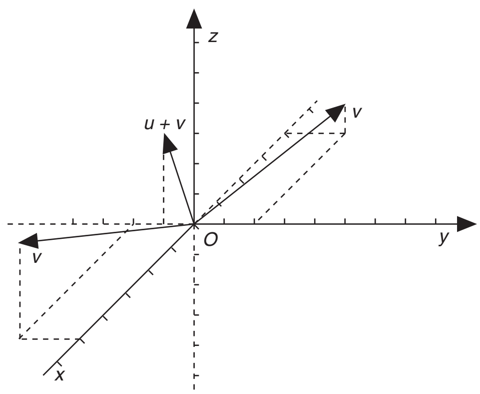
a) Las componentes de los vectores pedidos son $\overline{AB}$ = = (–1, –3, 3) y $\overline{BA}$ = (1, 3, –3)

b) Existen infinitas parejas de puntos C y D que cumplan la condición pedida. Por ejemplo, C (0, 0, 0) y D (–1, –3, 3).

c) Sea F (a, b, c), debe cumplirse: $(a + 3, b - 6, c + 9) =$ $= (-1, -3, 3)$. Luego $a = -4$, $b = 3$ y $c = -6$.

d) Sea G (a', b', c'), debe cumplirse: $(3 - a', 2 - b', 9 - c') =$ $= (-1, -3, 3)$. Por tanto, $a' = 4$, $b' = 5$ y $c' = 6$.

2 **Sean $u = (5, -2, 3)$ y $v = (-4, 2, 1)$ dos vectores libres. Se pide:**



a) Dibuja un representante de cada uno de ellos y de su suma.

b) ¿Cuál es el extremo de $\overline{AB}$ si $\overline{AB} = u - v$ y $A = (0, 2, 0)$

c) ¿Cuáles son las componentes de los vectores $2u$ y $3u - 5v$?

a) El vector suma $u + v$ el $u + v = (1, 0, 4)$. Un representante de u, v y $u + v$ puede verse en el dibujo.

b) Las coordenadas de $\overline{AB} = u - v$ son: $\overline{AB} = (9, -4, 2)$

Llamando $B = (a,b,c)$, se tiene: $(a - 0, b - 2, c - 0) =$ (9, –4, 2). Por tanto, $a = 9$, $b = -2$, $c = 2$.

c) Las coordenadas de los vectores bucados son:
$2u = 2\,(5, -2, 3) = (10, -4, 6)$
$3u - 5v = 3(5, -2, 3) - 5\,(-4, 2, 1) = (15, -6, 9) - (20, 10, 5) =$ $= (35, -16, 4)$.

3 **Hallar dos vectores u y v tales que $(5, 3, 5) = 2u + 3v$ y $(3, 2, 3) = u + 2v$.**

Resolvemos el sistema vectorial $\begin{cases} 2u + 3v = (5, 3, 5) \\ u + 2v = (3, 2, 3) \end{cases}$

Multiplicando la segunda ecuación por –2 y sumando a la primera se obtiene el vector $v = (1, 1, 1)$.
Con este vector sustituido en la segunda ecuación se obtiene $u = (1, 0, 1)$.
Por tanto, los vectores buscados son $u = (1, 0, 1)$ y $v = (1, 1, 1)$.

4 **Dados los vectores $u = (2, -5, 3)$; $v = (4, -3, 2)$ y $w = (0, 2, -7)$, se pide:**
a) Calcula los productos escalares $u \cdot v$, $u \cdot w$ y $v \cdot w$.
b) Determina el módulo de cada uno de los vectores anteriores.
c) Halla los ángulos de los vectores anteriores, tomados dos a dos.

a) Operando,
$u \cdot v = 8 + 15 + 6 = 29$, $u \cdot w = 0 - 10 - 21 = -31$, $v \cdot w =$ $= 0 - 6 - 14 = -20$.

b) Los módulos de los vectores son:
$|u| = \sqrt{4 + 25 + 9} = 6{,}15$; $|v| = \sqrt{16 + 9 + 4} = 5{,}4$,
$|w| = \sqrt{0 + 4 + 49} = 7{,}28$

c) Los ángulos de los vectores, tomados dos a dos, son:

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{29}{\sqrt{38}\,\sqrt{29}} = \frac{29}{33{,}2} = 0{,}87$$

luego $(\widehat{u, v}) = 29°17'7''$

$$\cos(\widehat{u, w}) = \frac{u \cdot w}{|u| \cdot |w|} = \frac{-31}{\sqrt{38}\,\sqrt{53}} = \frac{-31}{44{,}88} = 0{,}69$$

luego $(\widehat{u, w}) = 133°41'27{,}2''$

$$\cos(\widehat{v, w}) = \frac{-20}{\sqrt{29}\,\sqrt{53}} = \frac{-20}{39{,}2} = 0{,}51$$

luego $(\widehat{v, w}) = 120°40'\,24{,}4''$

5 **Se consideran los vectores $u = (2, 2, 2)$ y $v = (1, 0, 1)$. Halla todos los vectores, con módulo unidad, y que forman un ángulo de 30° con u y de 45° con v.**

Sea $w = (x, y, z)$ el vector buscado. Debe cumplir:

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- $\cos(\widehat{u, w}) = \cos 30° = \dfrac{u \cdot w}{|u|\,|w|} = 0{,}866$

  luego $\dfrac{2x + 2y + 2z}{\sqrt{12}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0{,}866$

- $\cos(\widehat{v, w}) = \cos 45° = \dfrac{v \cdot w}{|v|\,|w|} = 0{,}707$

  luego $\dfrac{x + z}{\sqrt{2}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0{,}707$

La solución del sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 4\,(x + y + z)^2 = 3\,(x^2 + y^2 + z^2) \\ (x + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$

son los vectores (0,99; –0,14 ;0,01) y (0,01; –0,14; 0,99).

6 **Halla dos vectores de módulo unidad y ortogonales a (1, 2, 3) y (4, 5, 6).**

Sea $u = (a, b, c)$ el vector buscado, las condiciones conducen al sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + 2b + 3c = 0 \\ 4a + 5b + 6c = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

$$a = -\frac{\sqrt{54}}{18},\ b = \frac{\sqrt{54}}{9},\ c = -\frac{\sqrt{54}}{18}$$

o

$$a = \frac{\sqrt{54}}{18},\ b = -\frac{\sqrt{54}}{9},\ c = \frac{\sqrt{54}}{18}$$

7 **Comprueba que son una base los siguientes vectores de R^3: $u = (1, 0, 2)$; $v = (-1, 1, 2)$ y $w = (0, 2, -3)$. Calcula las coordenadas de los vectores $x = (1, 1, 1)$ e $y = (1, 2, 3)$ respecto de la base anterior.**

Los vectores u, v y w forman una base, ya que el rango de la matriz formada por sus filas es tres, al ser

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

Las coordenadas del vector $x = (1, 1, 1)$ respecto de la base anterior son los escalares a, b y c, que cumplen:

$$(1, 1, 1) = a\,(1, 0, 2) + b\,(-1, 1, 2) + c\,(0, 2, -3)$$

Operando y resolviendo el sistema resultante se obtiene:

$$a = 12/11,\ b = 1/11,\ c = 5/11.$$

Análogamente, el vector $y = (1, 2, 3)$ tiene las siguientes coordenadas respecto de la base anterior:

$$a = 19/11,\ b = 8/11 \text{ y } c = 7/11$$

8 **Prueba que los vectores $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 0, 1)$ y $w = (4, 4, 4)$ son linealmente dependientes. Expresa uno de ellos como combinación de los otros.**

El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ es dos, al ser $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Puede ponerse el vector w como combinación de los otros en la forma:

$$w = 2u + (-2)\,v$$

9 **Indica para qué valores de t los vectores $u = (1, 1, 1)$; $v = (2, 2, t)$ y $w = (t, 0, 0)$ no forman una base de R^3.**

El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = vale $t^2 - 2t$.

Si la expresión anterior es nula, los tres vectores no forman base de R^3.
Por tanto, $t^2 - 2t = 0$, es decir, para $t = 0$ y $t = 2$.

10 **Si los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ son linealmente independientes, comprueba que también son linealmente independientes los vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$, siendo:**

$$v_1 = u_1,\ v_2 = u_1 + u_2 \text{ y } v_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

Veamos que la combinación lineal nula de los vectores $v_1 \cdot v_2 \cdot v_3$, $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ conduce a que $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.
De $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, pasamos a $au_1 + b\,(u_1 + u_2) + c\,(u_1 + u_2 + a_3) = 0$.
Operando, se obtiene $(a + b + c)\,u_1 + (b + c)\,u_2 + cu_3 = 0$.
Al ser u_1, u_2, u_3 linealmente independientes, se cumple:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \quad\ \ b + c = 0 \\ \qquad\ \ c = 0 \end{cases}$$

La única solución del sistema anterior es $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

11 **Dados los vectores $u = (3, -1, 4)$ y $v = (-2, 3, -2)$, hallar el módulo de los vectores $u + v$ y $u - v$.**

Tenemos que,

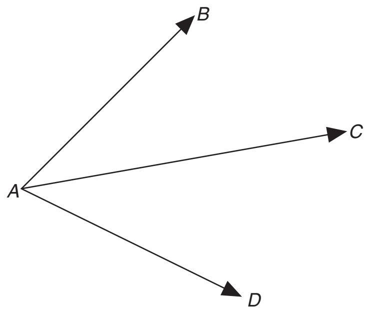
$$u + v = (1, 2, 2) \text{ y } |u + v| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$u - v = (5, -4, 6) \text{ y } |u - v| = \sqrt{5^2 + (-4^2) + 6^2} = \sqrt{77} = 8{,}78$$

12 **Demuestra que dados cuatro puntos, A, B, C, D, cualesquiera de un plan, se verifica que**

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{0}$$

Entre los cuatro puntos A, B, C y D pueden establecerse las siguientes relaciones vectoriales, que pueden observarse en el dibujo adjunto.



$$\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC}$$
$$\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD}$$
$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

Con las relaciones anteriores obtenemos:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot (\overline{AD} - \overline{AC}) +$$
$$+ \overline{AC} \cdot (\overline{AB} - \overline{AD}) + \overline{AD} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{AB} \cdot \overline{AD} -$$
$$- \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \cdot \overline{AB} - \overline{AC} \cdot \overline{AD} + \overline{AD} \cdot \overline{AC} -$$
$$- \overline{AD} \cdot \overline{AB} = 0$$

13 **Dados los vectores unitarios u, v y w, que satisfacen la condición $u + v + w = 0$, calcula el valor de la expresión $u \cdot v + v \cdot w + w \cdot u$.**

Se cumple que $u \cdot v = v \cdot v = w \cdot w = 1$ y $w = -u - v$. Sustituyendo en la expresión $u \cdot v + v \cdot w + w \cdot u$, se obtiene:

$$u \cdot v + v \cdot w + w \cdot u = u \cdot v + v \cdot (-u - v) + (-u - v) \cdot u =$$
$$= u \cdot v - v \cdot u - v \cdot v - u \cdot u - v \cdot u =$$
$$= - v \cdot v + u \cdot u - v \cdot u = -1 - 1 - u \cdot v = -u \cdot v - 2.$$

14 **¿Es posible que dos vectores u y v de R^3 verifiquen $u \cdot v = 7$, $|u| = 1$ y $|v| = 2$? ¿Por qué?**

No es posible, ya que $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos(\widehat{u, v})$, y en la situación del problema el coseno del ángulo formado por los vectores u y v debe valer 3, 5, situación que es imposible.

15 **Dados los vectores $u = (2, -1, 3)$; $v = (1, 2, 2)$, y w $(3, -1, 1)$, calcula:**

a) $u \cdot v$ ***b)*** $(u \cdot v) \cdot w$ ***c)*** $(u \cdot v) \cdot w$

$$a)\ u \cdot v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8i - j + 5k$$

$$b)\ (u \cdot v) \cdot w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4i + 23j + 11k$$

$c)\ (u \cdot v) \cdot w = (-8, -1, 5) \cdot (3, -1, 1) = -24 + 1 + 5 = -18$

16 **Dados los vectores $u = (3, -1, -2)$ y $v = (1, 2, -1)$, calcula los productos vectoriales que siguen.**

a) $u \cdot v$ ***b)*** $(2u + v) \cdot v$ ***c)*** $(2u - v) \cdot (2u + v)$

$$a)\ u \cdot v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5i + j + 7k$$

$$b)\ (2u + v) \cdot v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 10i + 2j + 14k$$

$$c)\ (2u - v) \cdot (2u + v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & -3 \\ 7 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 20i + 4j + 28k$$

17 **Dados los vectores $u = (3, -1, 4)$; $v = (-2, 3, -2)$, y $w = (5, 0, 2)$, se pide:**

a) **Calcula los productos vectoriales, $u \cdot v$, $u \cdot w$ y $v \cdot w$.**

b) **Calcula el producto mixto de los tres vectores anteriores.**

$$a)\ u \cdot v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -10i - 2j + 7k$$

$$u \cdot w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 14j + 6k$$

$$v \cdot w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6i - 6j - 15k$$

$$b)\ [u, v, w] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -36$$

18 **Sean los vectores $u = (2, 0, 1)$; $v = (1, 2, 2)$, y $2 = (3, -1, 1)$. Realizar las operaciones que siguen.**

a) $(u \cdot v)\, w$ ***b)*** $(v \cdot w)\, u$

c) $(u \cdot v) \cdot w$ ***d)*** $(v \cdot w) \cdot u$

e) $(u \cdot v) \cdot w$ ***f)*** $(v \cdot w) \cdot u$

$a)\ (u \cdot v)\, w = 4\,(3, -1, 1) = (12, -4, 4)$

$b)\ (v \cdot w)\, u = 3\,(2, 0, 1) = (6, 0, 3)$

$$c)\ (u \cdot v) \cdot w = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$d)\ (v \cdot w) \cdot u = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$e)\ (u \cdot v) \cdot w = (1, 14, 11)$

$f)\ (v \cdot w) \cdot u = (5, -14, -10)$

19 **Demuestra que el producto vectorial no es asociativo y no tiene elemento unidad en R^3.**

Para los vectores $u = (0, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ y $w = (1, 1, 0)$ se tiene que:

$$u \cdot (v \cdot w) = (0, -1, 1) \text{ y } (u \cdot v) \cdot w = (1, -1, 0)$$

Por tanto, se observa que el producto vectorial no es asociativo.

Supongamos que dado un vector cualquiera $u = (a, b, c)$, existe un vector $e = (x, y, z)$ que cumple $u \cdot e = u$.

Operando, se obtiene el sistema $\begin{cases} bz - cy = a \\ -az + cx = b \\ ay - bx = c \end{cases}$

El sistema es incompatible, ello supone que no existe elemento unidad para el producto vectorial.

20 **Encuentra una base ortonormal de R^3 que contenga un vector proporcional al vector $(1, -1, 2)$.**

El módulo del vector dado $u = (1, -1, 2)$ es $|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$.

Un vector unitario y proporcional a u es $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

Otro vector unitario y ortogonal al anterior es $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Otro vector unitario y ortogonal a los dos anteriores es $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Por tanto, la base buscada está formada por los vectores:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

21 Los vectores u y v son perpendiculares. Sabiendo que $|u| = 3$, $|v| = 4$, calcula:

a) **$|(u + v) \cdot (u - v)|$** ***b)*** **$|(3u - v) \cdot (u - 2v)|$**

a) Se tiene que $(u + v) \cdot (u - v) = u \cdot u + v \cdot u - u \cdot v - v \cdot v = 2u \cdot v$.

Por tanto, $|(u + v) \cdot (u - v)| = |2u \cdot v| = 2|u \cdot v| = 2|u|\,|v|\, sen\, 90° = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 24$

b) Se tiene que $(3u - v) \cdot (u - 2v) = 3u \cdot u - 6u \cdot v - v \cdot u + v \cdot 2v = -5u \cdot v$.

Por tanto, $|(3u - v) \cdot (u - 2v)| = |-5u \cdot v| = 5|u|\,|v|\, sen\, 90° = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$

22 Los vectores u y v forman un ángulo de 120°. Sabiendo que $|u| = 1$, $|v| = 2$, calcula:

a) **$(u \cdot v)\cdot(u \cdot v)$**

b) **$[(2u + v) \cdot (u + 2v)]^2$**

c) **$[(u + 3v) \cdot (3v - v)]^2$**

a) $(u \cdot v)\cdot(u \cdot v) = |u \cdot v|^2 = (|u|\,|v|\, sen\, 120)^2 = (1 \cdot 2 \cdot 0{,}866)^2 = 3$.

b) $[(2u + v) \cdot (v + 2v)]^2 = [2u \cdot u + 4u \cdot v + v \cdot v + v \cdot 2v]^2 = [3u \cdot v]^2 = 9\,|u \cdot v|^2 = 9\,(1 \cdot 2 \cdot 0{,}866)^2 = 27$.

c) $[(u + 3v) \cdot (2u - v)]^2\ [u \cdot 3u - u \cdot v + 3v \cdot 3u - 3v \cdot v]^2 = [-10u \cdot v]^2 = 100\,|u \cdot v|^2 = 100\,[1 \cdot 2 \cdot 0{,}866]^2 = 300$.

23 Los vectores u, v y w satisfacen la condición $u + v + w = 0$. Demuestra que $u \cdot v = v \cdot w = w \cdot u$.

Al ser $u + v + w = 0$ se cumple $w = -u - v$.

Por tanto,

$v \cdot w = v \cdot (-u - v) = -v \cdot u - v \cdot v = -v \cdot u = u \cdot v$.

$w \cdot u = (-u - v) \cdot u = -u \cdot u - v \cdot u = -v \cdot u = u \cdot v$.

24 Para los vectores $u = (2, -3, 1)$; $v = (-3, 1, 2)$ y $w = (1, 2, 3)$, calcular $(u \cdot v) \cdot w$ y $u \cdot (v \cdot w)$.

Al ser $u \cdot v = (-7, -7, -7)$, se tiene que $(u \cdot v) \cdot w = (-7, 14, -7)$.

Como $v \cdot w = (-1, 12, -7)$, por tanto $u \cdot (v \cdot w) = (9, 13, 21)$.

25 Dados los vectores $u = (1, -1, 3)$; $v = (-2, 2, 1)$, y $w = (3, -2, 5)$. Calcula $u \cdot (v \cdot w)$.

Se tiene que

$$u \cdot (v \cdot w) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -8$$

26 Encuentra un vector que sea perpendicular a $u = (3, -2, 5)$ y que dependa linealmente de $v = (1, -1, 3)$ y $w = (2, 2, 1)$.

Todos los vectores de la forma (a, b, c) que cumplen las condiciones del problema están sujetos a las siguientes condiciones:

$(a, b, c)\cdot(3, -2, 5) = 0$.

$(a, b, c) = m\,(1, -1, 3) + n\,(-2, 2, 1)$

Operando, se encuentra que todos los vectores (a, b, c) que cumplen las condiciones anteriores son de la forma $(-7, 7t, 7t)$ con $t \in R$.

Para encontrar uno de ellos basta fijar un valor del parámetro t.

27 Sean u y v dos vectores arbitrarios. Comprueba que si $(u + v)\cdot(u - v) = 0$, entonces $|u| = |v|$

Si $(u + v)\cdot(u - v) = 0 \Rightarrow u\cdot u - u\cdot v + v\cdot u - v\cdot v = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u\cdot u - v\cdot v = 0 \Rightarrow u\cdot u - v\cdot v \Rightarrow |u|^2 = |v|^2 \Rightarrow |u| = |v|$

28 Prueba que si dos vectores tienen el mismo módulo, entonces su suma y su diferencia son vectores ortogonales.

Se tiene que,

$(u + v)\cdot(u - v) = u\cdot u - u\cdot v + v\cdot u - v\cdot v = u\cdot u - v\cdot v = |u|^2 - |v|^2$

Si $|u|^2 = |v|^2$ entonces, según el resultado anterior, $(u + v)\cdot(u - v) = 0$

29 Calcula un vector u que satisfaga, en cada caso, las siguientes condiciones:

a) **Que sea proporcional al vector $v = (2, -1, 1)$ y además cumpla que $u\cdot v = 3$.**

b) **Que sea perpendicular a los vectores $v = (2, -1, 1)$ y $w = (18, -22, -5)$ y además $|u| = 14$.**

c) **Que sea perpendicular al eje OZ y cumpla $u\cdot v = 9$, $u\cdot w = -4$, siendo $v = (3, -1, 5)$ y $w = (1, 2, -3)$.**

d) **Que cumpla $u\cdot a = -5$, $u\cdot b = 11$, $u\cdot c = 20$, siendo los vectores $a = (2, -1, 3)$, $b = (1, -3, 2)$ y $c = (3, 2, -4)$.**

a) El vector u es de la forma $u = (2k, -k, k)$ y como cumple $u\cdot v = 3$ se tiene $4k + k + k = 3$; $6k = 3$; $k = 1/2$

Por tanto, el vector u buscado es $\overline{u} = (1, -1/2, 1/2)$

b) El vector u será proporcional a $v \cdot w$ al ser perpendicular a ambos. Luego $u = k\,(v \cdot w) = (27k, 28k, -26k)$. Además cumple $|u| = 14$, lo cual conduce a $729k^2 + 784k^2 + 676k^2 = 196$. Por tanto, $k = 0{,}3$.

Por tanto, el vector u buscado es $u = (8; 8{,}4; -7{,}8)$

c) El vector $u = (a, b, c)$ debe cumplir:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 3a - b + 5c = 9 \\ a + 2b - 3c = -4 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = 2$, $b = -3$, $c = 2$.

Por tanto, el vector u buscado es $u = (2, -3, 0)$.

d) El vector $u = (a, b, c)$, debe cumplir:

$$\begin{cases} 2a - b + 3c = -5 \\ a - 3b + 2c = -11 \\ 3a + 2b\text{b} - 4c = 20 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = \frac{18}{5}$, $b = \frac{19}{5}$, $c = 2$

Por tanto, el vector u buscado es $u = \left(\frac{18}{5}, \frac{19}{5}, 2\right)$

30 **Los vectores $u = (1, 0, 1)$; $v = (0, 1, 1)$, y $w = (1, 2, 4)$ forman una base de R^3.**
a) Prueba que los conjuntos de vectores $\{u \cdot v, v, w\}$ y $\{u \cdot v, v \cdot w, w\}$ forman bases.
b) Calcular el producto mixto de los vectores $u \cdot v$, $v \cdot w$ y $w \cdot u$.

a) El conjunto de vectores $\{u \cdot v, v, w\}$ está formado por $\{(-1, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 4)\}$. Forman base al ser

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

El conjunto de vectores $\{u \cdot v, v \cdot w, w\}$ está formado por $\{(-1, -1, 1), (2, 1, -1), (1, 2, 4)\}$. Forman base al ser

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

b) El producto mixto de los vectores pedidos es:

$$(u \cdot v) \cdot [(v \cdot w) \cdot (w \cdot u)] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 9$$

31 **Los vectores u y v cumplen $|u| = 10$, $|v| = 2$ y $u \cdot v = 12$. Calcula $|u \cdot v|$.**

Como $u \cdot v = 12$, el ángulo α que forman u y v es

$cos\,\alpha = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{12}{10 \cdot 2}$; luego $\alpha = 53°7'48{,}37''$

Por tanto, $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|. = sen\,\alpha = 10 \cdot 2 \cdot sen\,(53°7'\,48{,}37'')$ $= 16$.

32 **Dado el vector $u = (3, -4, 12)$, calcula los vectores unitarios en la dirección del vector u y los ángulos que forma el vector u con los semiejes *OX, OY, OZ*.**

Al ser $|u| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$, los vectores de módulo
uno en la dirección de u son $(^3/_{13}, ^{-4}/_{13}, ^{12}/_{13})$ y $(^{-3}/_{13}, ^4/_{13}, ^{12}/_{13})$.
Los ángulos que forma u con los semiejes son:

$cos\left(\widehat{u, OX}\right) = \frac{3}{13} = 0{,}23$, luego $\left(\widehat{u, OX}\right) = 73°39'27{,}5''$.

$cos\left(\widehat{u, OY}\right) = \frac{-4}{13} = -0{,}31$, luego $\left(\widehat{u, OY}\right) = 107°55'12{,}7''$.

$cos\left(\widehat{u, OZ}\right) = \frac{12}{13} = -0{,}921$, luego $\left(\widehat{u, OZ}\right) = 227°37'11{,}5''$.

33 **Sean u y v dos vectores tales que $|u| = 1$, $|v| = 2$ y el ángulo que forman es de 45°. Calcula:**
***a)* $u \cdot v$ *b)* $(u + 2v) \cdot v$ *c)* $|u + v|$ *d)* $|u - v|$ *e)* El ángulo que forman $u + v$ y $u - v$.**

a) $u \cdot v = |u| \cdot |v|\, cos\,45° = 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = 1{,}414$

b) $(u + 25) \cdot v = u \cdot v + 2\, v \cdot v = 1{,}414 + 2 \cdot 2^2 = 9{,}414$.
c) $|u + v| = |u|^2 + |v|^2 - 2\,|u|\,|v|\, cos\,135° = 1 + 4 + 2{,}828 =$ $= 7{,}828$.
d) $|u - v| = |u|^2 + |v|^2 - 2\,|u|\,|v|\, cos\,45° = 1 + 4 - 2{,}828 =$ $= 2{,}172$.

e) $cos\,(\widehat{u + v, u - v}) = \frac{(u + v)\,(u - v)}{|u + v|\,|u - v|} = \frac{1 - 4}{7{,}828 \cdot 2{,}172} = \frac{-3}{17} =$
$= 0{,}176$; luego $(\widehat{u + v, u - v}) = 100°9'51{,}3''$

34 **Sean u, v, w y z dos vectores de R^3. Demuestra las igualdades siguientes:**
***a)* $(u \cdot v)^2 + (u \cdot v)^2 = u^2v^2$**
***b)* $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w$**
***c)* $(u \cdot v) \cdot (w \cdot z) = (u \cdot w)\,(v \cdot z) = (u \cdot z)\,(v \cdot w)$**
***d)* $u \cdot (v \cdot w) + v \cdot (w \cdot u) + w \cdot (u \cdot v) = 0$**

a) Sean los vectores $u = (a_1, b_1, c_1)$ y $v = (a_2, b_2, c_2)$. Calculamos por separado los dos miembros de la igualdad.
$(u \cdot v)^2 + (u \cdot v)^2 = (b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (c_1a_2 - a_1c_2)^2 +$
$+ (a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 = a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 +$
$+ a_1^2c_2^2 + b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + b_1^2c_2^2 + c_1^2a_2^2 + c_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2$

$u^2v^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) =$
$= a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2c_2^2 + b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + b_1^2c_2^2 +$
$+ c_1^2a_2^2 + c_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2$.
Se observa que ambos miembros son iguales.

b) Sean los vectores $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$ y $w =$ $= (a_3, b_3, c_3)$. Calculamos por separado los dos miembros de la igualdad.

$$u \cdot (v \cdot w) = u \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$= u \cdot [\,(b_2c_3 - c_2b_3)\bar{i} - (a_2c_3 - c_2a_3)\,\bar{j} + (a_2b_3 - b_2a_3)\bar{k}] =$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ b_2c_3 - c_2b_3 & -a_2c_3 + c_2a_3 & a_2b_3 - b_2a_3 \end{vmatrix} =$$

$= [b_1\,(a_2b_3 - b_2a_3) - c_1(-a_2c_3 + c_2a_3)]\,\bar{i}\, +$
$+ [a_1\,(a_2b_3 - b_2a_3) - c_1(-b_2c_3 - c_2b_3)]\,\bar{j}\, +$
$+ [a_1\,(-a_2c_3 + c_2a_3) - b_1(-b_2c_3 - c_2b_3)]\,\bar{k}$.

La otra parte de la igualdad es:
$(u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w = (a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3)\,(a_2\,\bar{i} + b_2\,\bar{j} + c_2\,\bar{k}) -$
$- (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)\,(a_3\,\bar{i} + b_3\,\bar{j} + c_3\,\bar{k}) =$
$= [b_1\,(a_2b_3 - b_2a_3) - c_1\,(b_2c_3 - c_2a_3)]\,\bar{i}\, +$
$+ [a_1\,(a_2b_3 - b_2a_3) - c_1(b_2c_3 - c_2b_3)]\,\bar{j}\, +$
$+ [a_1\,(-a_2c_3 + cc_2a_3) - b_1(-b_2c_3 - c_2b_3)]\,\bar{k}$.

Por tanto, la igualdad se cumple.

c) Consideramos $w \cdot z$ como un vector único y teniendo en cuenta la definición de producto mixto, podemos escribir:

$(u \cdot v) \cdot (w \cdot z) = u \cdot [v \cdot (w \cdot z)] = u \cdot [(v \cdot z)w - (v \cdot w)z]$, al tener presenta la igualdad del apartado b).

Operando en la última igualdad, obtenemos la identidad de Lagrange:

$(u \cdot v) \cdot (w \cdot z) = (u \cdot w)\,(v \cdot z) - (u \cdot z)\,(v \cdot w)$

d) Teniendo en cuenta la igualdad del apartado b),

$u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot w)\,v - (u \cdot v)\,w$, se obtiene:

$u \cdot (v \cdot w) + v \cdot (w \cdot u) + w \cdot (u \cdot v) = (u \cdot w)\,v - (u \cdot v)\,w +$

$+ (v \cdot u)\,(w \cdot v)\,u - (w \cdot u)\,v = 0$

Esta igualdad es conocida como identidad de Jacobi.

35 **Si los vectores *u, v,* y *w* de R^3 forman una base del mismo, analiza si los vectores *u + v, v + w* y *w + u* también forman una base de R^3.**

Los tres vectores $u + v$, $v + w$ y $w + u$ forman base, ya que son linealmente independientes al cumplir:

Si $a\,(n + v) + b\,(v + w) + c\,(w + u) = 0 \Rightarrow$

$(a + c)\,u + (a + b)\,v + (b + c)\,w = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$, ya que *u, v* y *w* son linealmente independientes.

La solución del sistema anterior es $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$, lo cual confirma que los vectores $u + v$, $v + w$ y $w + u$ son linealmente independientes y, por tanto, base.

36 **Para los vectores *u* = (1, 0, 1) y *v* = (0, 1, 1), halla todos los vectores que sean perpendiculares a *v* y que dependan linealmente de *u* y de *v*.**

Los vectores buscados, que son de la forma $mu + nv = (m, n, m + n)$, deben cumplir: $(m, n, m + n)\cdot(0, 1, 1) = 0$.

Luego $2n + m = 0$.

Todos los vectores son $(-2n, n, -n)$, con $n \in R$.

37 **Sean los vectores *u* = (1, 1, 0); *v* = (1, 0, 1), y *w* (0, 1, 1). Realiza las operaciones que siguen.**

***a)* $(u \cdot v)\,w$**   ***b)* $(v \cdot w)\,u$**

***c)* $(u \cdot v) \cdot w$**   ***d)* $(v \cdot w) \cdot u$**

***e)* $(u \cdot v) \cdot w$**   ***f)* $(v \cdot w) \cdot u$**

Los resultados de las operaciones son:

a) $(u \cdot v)\,w = (0, 1, 1)$

b) $(v \cdot w) = (1, 1, 0)$

c) $(u \cdot v) \cdot w = -2$

d) $(v \cdot w) \cdot u = -2$

e) $(u \cdot v) \cdot w = (0, -1, 1)$

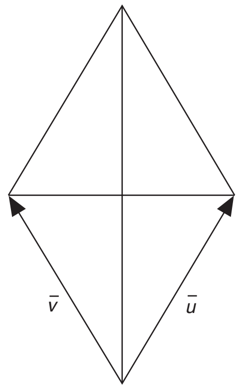
f) $(v \cdot w) \cdot u = (-1, 1, 0)$

38 **Sean *a, b* y *c* tres números reales cualesquiera. Prueba que los vectores (1, *a, b*), (0, 1, *c*) y (0, 0, 1) son linealmente independientes.**

Son linealmente independientes, ya que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es tres, al ser } \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

39 **Prueba, haciendo uso de los vectores, que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.**



Las dos diagonales del rombo son los vectores $\bar{u} + \bar{v}$ y $\bar{u} - \bar{v}$.

Para probar que son perpendiculares, hay que probar que los vectores $\bar{u} + \bar{v}$ y $\bar{u} - \bar{v}$ son ortogonales, es decir, su producto escalar es cero.

Tenemos que, $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{u} - \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{u} - \bar{v} \cdot \bar{v} =$

$= \bar{u} \cdot \bar{u} - \bar{v} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2 = 0$

El producto escalar es cero, al ser los lados del rombo iguales.

40 **Razona que si los vectores *u, v,* y *w* del espacio R^3 son perpendiculares dos a dos, el producto escalar $(u + v) \cdot (w + v)$ no puede ser negativo.**

El producto escalar $(u + v) \cdot (w+v)$ vale:

$(u + v)\cdot(w + v) = u\cdot w = u\cdot w + u\cdot v + v\cdot w + v\cdot v = v\cdot v = |v|^2$

El resultado no puede ser negativo de manera obvia.

41 **Calcula algún valor del parámetro *t* para que el producto vectorial (1, 2, *t*) x (1, *t*, 0) tenga la dirección del eje *OZ*.**

$$\text{Se tiene que: } (1, 2t) \cdot (1, t, 0) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & 0 \end{vmatrix} =$$

$= -t^2\bar{i} + t\bar{j} + (t - 2)\bar{k}$

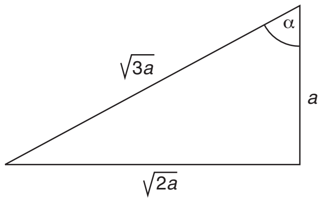
Para que dicho vector tenga la dirección del eje *OZ*, debe ser $t = 0$.

42 **Si *u, v* y *w* son tres vectores no nulos del espacio R^3 que satisfacen la igualdad de productos escalares $u \cdot v = u \cdot w$, ¿se puede deducir que es $v = w$? ¿Por qué?**

Sean los vectores $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, 0)$ y $w\,(1, 0, 1)$. Se tiene que: $u \cdot v = 2$ y $u \cdot w = 2$ y claramente *v* y *w* son distintos.

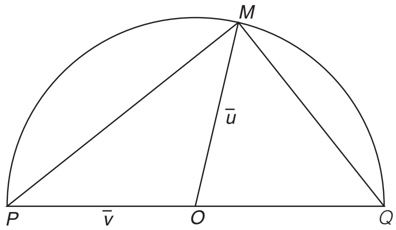
43 **Calcula el ángulo que forman la diagonal de un cubo con uno cualquiera de sus lados o aristas.**

En un cubo de arista a la diagonal y la arista forman el triángulo rectángulo del dibujo adjunto.



el ángulo α cumple que $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{3a}}$, luego α = 54°44' 8,2".

44 Prueba, haciendo uso de los vectores, que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.



Sea M un punto cualquiera de la semicircunferencia, P y Q los extremos del diámetro, 0 el centro, $\bar{u}$ el vector $\overline{OM}$ y $\bar{v}$ el vector $\overline{OP}$. Para que el ángulo inscrito sea recto tiene que cumplirse que el producto escalar $\overline{PM} \cdot \overline{MQ}$ tiene que ser 0.
Se tiene que:
$\overline{PM} \cdot \overline{MQ} = (-v + u) \cdot (-u - v) = v \cdot u + v \cdot v - u \cdot u - u \cdot v =$
$= |v|^2 - |u|^2 = 0.$
ya que los módulos de los vectores u y v coinciden con el radio de la circunferencia.

45 Prueba que los vectores *u* y *v* son perpendiculares si y sólo si se verifica que $|u + v| = |u - v|$.

Sean los vectores $u = (a_1, b_1, c_1)$ y $v = (a_3, b_2, c_2)$. Los vectores suma y diferencia son $u + v = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ y $u - v = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$.
Los módulos de ambos vectores son:

$$|u - v| = \sqrt{(a_1 = a_2)^2 + (b_1 = b_2)^2 + (c_1 = c_2)^2} =$$
$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 = 2a_1a_2 = 2b_1b_2 = 2c_1c_2}$$

$$|u - v| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2} =$$
$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2 - 2c_1c_2}$$

Los módulos anteriores son iguales si y sólo si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$, que es la condición de ortogonalidad de los vectores *u* y *v*.

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

46 ¿Para qué valores de *a* el conjunto de vectores (1, 1, 1), (1, *a*, 1) y (1, 1, *a*) es una base de R^3?

Sean los valores de *a* que hagan el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \text{ distinto de cero.}$$

El determinante anterior vale $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$, es distinto de cero para cualquier valor diferente de uno.

47 Los módulos de tres vectores *u, v* y *w* son 3, 4 y 7, respectivamente. ¿Cómo han de ser los vectores para que se cumpla *u* + *v* + *w* = 0?

Los tres vectores deben tener la misma dirección y el módulo de uno debe ser la suma de los módulos de los otros dos.

48 Dados los vectores *u* = (2, 0, 0), *v* = (0, 1 –3) y *w* = *au* + + *bv*, ¿qué relación deben satisfacer *a* y *b* para que el módulo de *w* sea la unidad?

El vector $w = au + bv$ es $w = (2a, b, -3b)$ y para que el módulo de w sea la unidad, debe cumplirse: $4a^2 + 10b^2 = 1$.

49 Halla el vector perpendicular a *u* = (2, 3, 4) y *v* = (–1, 3, –5), y que sea unitario.

Un vector perpendicular a *u* y *v* debe ser proporcional al producto vectorial de *u* y *v*. Es decir, este vector es de la forma $(27k, 6k, 9k)$.
Para que sea unitario debe cumplirse que $(27k)^2 + (6k)^2 + (9k)^2 = 1$, luego

$$846\,k^2 = 1, k^2 = \frac{1}{846}, \; k = \sqrt{\frac{1}{846}} = 0{,}03$$

El vector buscado es (0,81; 0,18; 0,27).

50 Calcula los valores *x* e *y* para que el vector (*x*, *y*, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2, 1, –1).

$$\text{Debe cumplirse} \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

La solución es $x = 2$, $y = -3$

51 Dados los vectores *u* = (3, 1, –1) y *v* = (2, 3, 4), halla:
a) **Los módulos de *u* y *v*.**
b) **El producto vectorial de *u* y *v*.**
c) **Un vector ortogonal a *u* y *v*.**
d) **El área del paralelogramo que tiene por los lados los vectores *u* y *v*.**

a) $|u| = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11} = 3{,}32$
$|v| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} = 5{,}39$

b) $u \cdot v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7\bar{i} - 14\bar{j} + 7\bar{k}$

c) Cualquier vector proporcional al vector obtenido en el producto vectorial.
d) El área del paralelogramo es el módulo del vector producto vectorial. Por tanto,
$|u \cdot v| = \sqrt{49 + 196 + 49} = \sqrt{294} = 17{,}15$
unidades cuadradas.

52 ¿Puede ser el módulo de la suma de dos vectores de módulos 10 y 5 mayor que 15? ¿Y menor que 4?

El módulo de la suma de dos vectores es menor o igual que la suma de los módulos de dichos vectores. Por tanto, el módulo de la suma de dos vectores de módulos 10 y 5 no puede superar a 15.
Por una propiedad análoga para la diferencia de módulos, los módulos de los vectores propuestos no pueden tener una suma menor que cuatro.

53 Siendo *u* y *v* dos vectores cualesquiera del espacio, prueba que $(u - v) \cdot (u + v) = 2u \cdot v$.

Teniendo en cuenta las propiedades del producto vectorial, se obtiene:

$(u - v) \cdot (u + v) = u \cdot (u + v) - v \cdot (u + v) =$
$= u \cdot u + u \cdot v - v \cdot u - v \cdot v = u \cdot v - v \cdot u =$
$= u \cdot v + u \cdot v = 2u \cdot v$

54 Sean *u, v* y *w* tres vectores linealmente independientes. Indica cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen cero:

$$[u + w, u - w, u + v + w], [u + w, v, u + v]$$
$$\text{y } [u - w, v - w, w - u]$$

En cada uno de estos casos, ha de razonarse la contestación.

• $[u + w, u - w, u + v + w] = [u, u, u] + [u, u, v] + [u, u, w] + [u, -w, u] + [u, -w, v] + [u, -w, w] + [w, u, u] + [w, u, v] + [w, u, w] + [w, -w, u] + [w, -w, v] + [w, -w, w] = -[u, w, v] + [w, u, v] = 0$

• $[u + w, v, u + v] = [u, v, u] + [u, v, v] + [w, v, u] + [w, v, v] = [w, v, u] = 0$

• $[u - w, v - w, w - u] = [u, v, w] - [u, v, u] - [w, v, w] - [w, v, u] - [u, w, w] + [u, w, u] + [w, w, w] - [w, w, u] = 0$

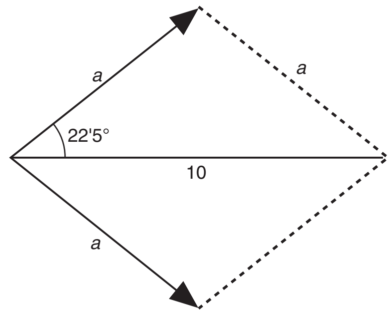
55 Dos vectores *u* y *v* son tales que $|u| = 10$, $|v| = 10\sqrt{3}$, y $|u + v| = 20$. Hallar el ángulo que forman los vectores *u* y *v*.

Se tiene que:

$|u + v| = |u|^2 + |v|^2 - 2\,|u|\,|v|\,cos\,(\widehat{u, v})$, luego

$$cos\,(\widehat{u, v}) = \frac{|u|^2 + |v|^2 - |u + v|}{2\,|u|\,|v|} = \frac{100 + 300 - 20}{2 \cdot 10 \cdot 10\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{280}{346{,}4} = 0{,}808. \text{ Por tanto, } (\widehat{u, v}) = 36°4'14{,}77''$$

56 Un vector de módulo 10 se descompone en suma de otros dos de módulos iguales y que forman un ángulo de 45°. Halla el módulo de cada uno de los vectores sumandos.



Por el teorema del coseno,
$10^2 = a^2 + a^2 - 2aa\,cos\,135°$
Operando: $3{,}414a^2 = 100$, luego $a = 5{,}41$.

57 ¿Puede haber dos vectores *u* y *v* tales que $u \cdot v = -3$, $|u| = 1$, $|v| = 2$? ¿Qué se puede decir del ángulo de dos vectores que verifican $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$? Justifica las respuestas.

No puede ocurrir que $|u| = 1$, $|v| = 2$ y $u \cdot v = -3$, ya que $|u \cdot v| = |u| \cdot |v| \cdot cos\,(\widehat{u, v})$ y entonces $cos\,(\widehat{u, v}) = 1{,}5$.

En la otra cuestión, al verificar $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$, el coseno del ángulo que forman vale 1 y, por tanto, el ángulo es 0° o 180°.

58 Dada la base formada por los vectores:
$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; $\left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ comprueba si es ortogonal u ortonormal.

Los tres vectores son unitarios.
La base no es ortogonal ni ortonormal, ya que, por ejemplo, se cumple que:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \neq 0$$

59 Dados los vectores $u = (3, -1, 1)$ y $v = (2, -3, 1)$, halla el producto $u \cdot v$ y comprueba que este vector es ortogonal a *u* y *v*. Comprueba el vector $v \cdot u$ y compáralo con $u \cdot v$.

El producto $u \cdot v$ es

$$u \cdot v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - \bar{j} - 7\bar{k}$$

Comprobamos que $u \cdot v$ es ortogonal a u y a v:
$u \cdot (u \cdot v) = (3, -1, 1) \cdot (2, -1, -7) = 0$
$v \cdot (u \cdot v) = (2, -3, 1) \cdot (2, -1, -7) = 0$

El vector $v \cdot u$ es:

$$u \cdot v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\bar{i} - \bar{j} + 7\bar{k}$$

Los vectores $u \cdot v$ y $v \cdot u$ son opuestos.

60 **Sea $b = \{u, v, w\}$ una base tal que $|u| = 2$, $|v| = 3$, $|w| = 1$ y $u \cdot v = 4$, $u \cdot w = 3$, $v \cdot w = 3$, calcula el valor de m para que los vectores $x = 11u + mv + 3w$ e $y = u + 2v + w$ sean ortogonales.**

Calculamos el producto escalar x·y. Obtenemos:

$x \cdot y = (11u + mv + 3w) \cdot (u + 2v + w) = 11u \cdot u + 22u \cdot v + 11u \cdot w + mv \cdot v + 2mv \cdot v + mv \cdot w + 3w \cdot u + 6w \cdot v + 3w \cdot w = 11 \cdot 4 + 22 \cdot 4 + 11 \cdot 3 + 4m + 2m \cdot 9 + 3m + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 25m + 195$

Como x e y deben ser ortogonales $25m + 195 = 0$, luego $m = -7{,}8$.

Resolución de problemas

1. LENTEJAS Y GARBANZOS. En un puesto del mercado tienen 5 sacos de garbanzos y uno de lentejas. Un cliente lleva una cierta cantidad de garbanzos, después otro cliente se lleva el doble de garbanzos que el cliente anterior, quedándose sólo el saco de lentejas. El vendedor sólo vende sacos completos. Sabiendo que los pesos de los sacos diferentes son 19, 18, 31, 16, 15 y 20 kg, ¿cuánto pesa el saco de lentejas?

Sumando los kilos de todos los sacos, obtenemos 119 kg.
Como un cliente se lleva cierta cantidad y otro se lleva el doble de esa cantidad quedando sólo el caso de lentejas, entonces al quitar a 119 kg, el saco de lentejas debe quedar un número que es múltiplo de 3, esto se cumple con:

$$119 - 20 = 99.$$

Un cliente lleva 33 kg en los sacos de 18 kg y 15 kg y el otro cliente se lleva 66 kg en los sacos de 19 kg, 31 kg, 16 kg.
El saco de lentejas es el que pese 20 kg.

2. TRES CARTAS. De una baraja española de 40 cartas extraemos 3 y las colocamos en una fila horizontal. Las cartas son tales que verifican las condiciones siguientes: a la derecha del caballo hay 1 ó 2 sotas; a la izquierda de la sota hay 1 ó 2 sotas; a la izquierda de un oro hay una o dos copas; y a la derecha de una copa hay una o dos copas. ¿De qué 3 cartas se trata?

El caballo y las sotas las señalamos con *C S S*.
Para que verifiquen las condiciones han de ser:

$$C_c\ S_o\ S_c$$

Por tanto, las cartas son:

- Caballo de copas.
- Sota de oros.
- Sota de copas.

3. PRIMAS. Dos amigos, Pedro y Luisa, se encuentran una tarde, y Pedro le dice a Luisa: «Ayer estuve con mis tres primas». Luisa le pregunta: «¿qué edad tienen?», a lo que Pedro contesta: «el producto de sus edades es 2.450 y la suma de las mismas es el doble de tu edad». Luisa dijo que con estos datos no podía saber las edades. Pedro añadió: «yo soy por lo menos un año más joven que la más vieja. Por supuesto, Luisa conoce la edad de Pedro. ¿Cuáles son las edades de las primas de Pedro y cuál es la edad de Luisa?

Descomponiendo 2.450 en factores, obtenemos:

$$2.450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

Las posibles edades de las tres primas son:

Prima 1	Prima 2	Prima 3	Suma	Luisa
2	25	49	76	38
5	5	98	108	54
5	10	49	64	32
7	7	50	64	32
2	35	35	72	36
1	49	50	100	50
7	14	25	46	23
7	10	35	52	26
5	14	35	54	27

Una vez hecha la tabla con todas las posibilidades, observamos que hay un resultado suma repetido, por tanto ahí está la razón de que Luisa le dijera a Pedro que con esos datos no podía saber las edades.
La edad de Luisa es de 32 años.
Luisa sabe la edad de Pedro. Si Pedro hubiera tenido 48 años o menos, no quedaría claro, por tanto Pedro ha de tener 49 años y las primas 7, 7 y 50 años.