Actividades iniciales

1. Dada la recta del plano de ecuación $2x - 6y + 3 = 0$, escríbela en forma continua, paramétrica, vectorial y explícita.

La recta $2x - 6y + 3 = 0$ pasa por el punto (0, 1/2) y un vector direccional es $\overline{v} = (3, 1)$. Por tanto, las ecuaciones pedidas son:

- Ecuación continua $\frac{x}{3} = \frac{y - 1/2}{1}$
- Ecuación paramétrica $\begin{cases} x = 3t \\ y = t - 1/2 \end{cases}$, $t \in R$
- Ecuación vectorial $(x, y) = (0, 1/2) + t\,(3, 1)$, con $t \in R$
- Ecuación explícita $y = 1/3\, x + 1/2$

2. Calcula el valor de a en la recta de ecuación $ax + 3y - 9 = 0$, para que:
***a)* Pase por el punto (3, 1).**
***b)* Tenga de pendiente –1.**
***c)* Uno de sus vectores directores sea v = (6, –4).**

a) $a = 2$ *b)* $a = 3$ *c)* $a = 2$

3. Estudiar la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} 7x - 2y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x - 6y = -9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x = 2y = 6 \end{cases}$

a) Las rectas se cortan en el punto (2, 1).
b) Las rectas son paralelas.
c) Las rectas son coincidentes.

4. Estudia la posición relativa, según los valores de *a*, de los pares de rectas:

a) $\begin{cases} ax + i = a^2 \\ x + a^2y = 1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x + ay = ax \\ 3x + ay = ay \end{cases}$

a) Si $a = 1$, las rectas son coincidentes.
Si $a \neq 1$, las rectas se cortan en el punto

$$\left(\frac{(a+1)\,(a^2+1)}{a^2 + \text{a} + 1}, -\frac{a}{a^2 + a + 1}\right)$$

b) Si $a = 0$, las rectas son coincidentes.
Si $a \neq 0$, las rectas se cortan en el (0, 0).

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto *P* (1, 2, 3) y tiene como vector direcciona al vector $\overline{v} = (6, 5, 4)$. Obtén seis puntos que pertenecen a dicha recta.

Las distintas expresiones de la recta buscada son:

- Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ con $t \in R$
- Ecuación continua: $\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$
- Ecuación como intersección de dos planos: $\begin{cases} 5x - 6y = -7 \\ 4x - 5z = -7 \end{cases}$

En la ecuación paramétrica pueden obtenerse los puntos dando valores a t. Así,

- $t = 0$ $P_0 = (1, 2, 3)$
- $t = 1$ $P_1 = (7, 7, 7)$
- $t = 2$ $P_2 = (13, 12, 11)$
- $t = -1$ $P_4 = (-5, -3, -1)$
- $t = -2$ $P_5 = (-11, -8, -5)$
- $t = 3$ $P_6 = (19, 17, 15)$

2 Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos *P* (1, 1, 0) y *Q* (1, 0, 1).

La recta viene determinada por el punto P (1, 1, 0) y el vector $\overline{v} = \overline{PQ} = (0, -1, 1)$.
Las ecuaciones de la citada recta son:

- Paramétricas $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t, \quad t \in R \\ z = t \end{cases}$
- Continuas $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$

3 Estudia si los puntos *A* (3, –4, 2), *B* (1, 2, 3) y *C* (–1, 4, 6) están alineados.

La recta determinada por los puntos A y B tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-3}{-1}$$

Al sustituir las coordenadas del punto C en la recta anterior, se tiene:

$$\frac{-1-1}{2} \neq \frac{4-2}{-6} \neq \frac{6-3}{-1}$$

Por tanto, los puntos no están alineados.

4 Una recta pasa por el punto (3, 1, 2) y es paralela al vector $\overline{v} = (1, -2, 3)$. Comprueba si los puntos (4, –1, 5), (2, 3, –1), (6, 7, 4), (0, 1, 3) y (6, –5, 11) pertenecen a la recta anterior.

La ecuación continua de la recta es

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{3}$$

El punto (4, –1, 5) pertenece a la recta al cumplirse:

$$\frac{4-3}{1}=\frac{-1-1}{-2}=\frac{5-2}{3}$$

El punto (2, 3, –1) pertenece a la recta al cumplirse:

$$\frac{2-3}{1}=\frac{3-1}{-2}=\frac{-1-2}{3}$$

El punto (6, 7, 4) no pertenece a la recta al cumplirse:

$$\frac{6-3}{1}\neq\frac{7-1}{-2}\neq\frac{4-2}{3}$$

El punto (0, 1, 3) no pertenece a la recta al cumplirse:

$$\frac{0-3}{1}\neq\frac{1-1}{-2}\neq\frac{3-2}{3}$$

El punto (6, –5, 11) pertenece a la recta al cumplirse:

$$\frac{6-3}{1}=\frac{-5-1}{-2}=\frac{11-2}{3}$$

5 Expresa cada una de las rectas siguientes de todas las formas que conozcas:

a) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{x-4}{3}$ ***b)*** $\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$

a) Ecuación paramétrica $\begin{cases} x=2+t \\ y=2-t \\ z=4+3t \end{cases},\ t\in R$

Ecuación como intersección de dos planos: $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x-z=2 \end{cases}$

b) Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x=-1+5t \\ y=-2+2t \\ z=t \end{cases},\ t\in R$

Ecuación continua: $\frac{x+1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$

c) Ecuación continua: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$

Ecuación como intersección de dos planos: $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-z=1 \end{cases}$

6 Determina *m* y *n*, sabiendo que los tres puntos (1, 2, 0), (2, 3, 1) y (*m*, 1, *n*) están alineados.

La recta determinada por los puntos (1, 2, 0) y (2, 3, 1) tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$$

Para que (*m*, 1, *n*) esté alineado con los otros dos puntos, debe cumplirse:

$$\frac{m-1}{1}=\frac{1-2}{1}=\frac{n}{1}\text{; por tanto, } m=0 \text{ y } n=-1$$

7 Halla las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices *A* (1, 1, 1), *B* (3, 5, 7) y *C* (0, 3, 0).

La mediana correspondiente al vértice *A* pasa por *A* (1, 1, 1) y *A'* (3/2, 4, 7/2), y su ecuación es:

$$\frac{x-1}{1/2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5/2}$$

La mediana correspondiente al vértice *B* pasa por *B* (3, 5, 7) y *B'* (1/2, 2, 1/2), y su ecuación es:

$$\frac{x-3}{-5/2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-7}{-13/2}$$

La mediana correspondiente al vértice *C* pasa por *C* (0, 3, 0) y *C'* (2, 3, 4), y su ecuación es:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{4}$$

8 Dados los puntos (1, 3, –2) y (2, 3, 5), halla *m* y *n* para que el punto (*m* +1, 3, *n*) esté alineado con los otros dos.

La recta determinada por los puntos (1, 3, –2) y (2, 3, 5) tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{7}$$

Para que el punto (*m* + 1, 3, *n*) pertenezca a la recta anterior, debe cumplirse:

$$\frac{m+1-1}{1}=\frac{3-3}{0}=\frac{n+2}{7}$$

Por tanto, la relación entre *m* y *n* debe ser $7m-n=2$.

9 Halla la ecuación de los planos, en todas las formas que conozcas, determinados por las condiciones:

a) **Plano que pasa por el punto *P* (2, –3, 5) y tiene como vectores direccionales a $\overline{u}$ = (1, 1, 2) y $\overline{v}$ = (3, –2, 1).**

b) **Plano que pasa por los puntos *P* (3, –1, 0) y *Q* (1, –1, 3) y contiene el vector $\overline{v}$ = (1, 2, 3).**

c) **Plano que pasa por los puntos *A* (1, 2, 3), *B* (–1, 0, 2) y *C* (2, –1, 0).**

a) La ecuación es:

$$0=\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=x+y-z+6$$

b) El plano viene determinado por el punto *P* (3, –1, 0) y los vectores $\overline{u}=\overline{PQ}$ = (–2, 0, 3) y $\overline{v}$ = (1, 2, 3). Su ecuación es:

$$0=\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ -z & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=6x-9y+4z-27$$

c) El plano viene determinado por el punto A (1, 2, 3) y los vectores $\overline{u} = \overline{AB} = (-2, -2, -1)$ y $\overline{v} = \overline{AC} = (1, -3, -3)$. Su ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 3x - 7y + 8z - 13$$

10 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P (2, –4, 0) y contiene a la recta

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$$

El haz de planos cuya arista es la recta dada tiene por expresión:

$$(x + y - 4) + \lambda\,(3x - z - 2) = 0$$

Haciendo que el haz incida en el punto (2, –4, 0) se obtiene $\lambda = 3/2$. Sustituyendo este valor en el haz, obtenemos el plano buscado de ecuación $11x + 2y - 3z - 14 = 0$.

11 Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$r: \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

El plano viene determinado por un punto de una de las rectas, por ejemplo, P (–1, –2, 0) de la recta r, y por los vectores direccionales de ambas rectas que son: $\overline{u} = (5, 2, 1)$ y $\overline{v} = (8, -7, -5)$.
La ecuación del plano es:

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z \\ 5 & 2 & 1 \\ 8 & -7 & -5 \end{vmatrix} x - 11y + 17z - 21$$

12 Halla las ecuaciones de los ejes coordenados y de los planos coordenados del sistema de referencia ortonormal *OXYZ*.

Los planos coordenados tienen por ecuaciones las que siguen:
- *OXY*, $z = 0$
- *OXZ*, $y = 0$
- *OYZ*, $x = 0$

Las ecuaciones de los ejes coordenados son:

- *OX*, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- *OY*, $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- *OZ*, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

13 Halla la ecuación del plano que corta a los ejes coordenados en puntos situados a distancia d del origen. Hallar el valor de d para que el plano sea $x + y + z - 7 = 0$.

Los puntos de los ejes coordenados situados a una distancia d del origen son:

$$(d, 0, 0),\ (0, d, 0) \text{ y } (0, 0, d)$$

El plano que pasa por los puntos anteriores tiene por ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} x-d & y & z \\ -d & d & 0 \\ -d & 0 & d \end{vmatrix} = x + y + z - d = 0$$

Por tanto, será $d = 7$ para que el plano anterior coincida con $x + y + z - 7 = 0$.

14 Escribe las ecuaciones paramétricas del plano $3x - y + 2z = 10$.

Pueden ser: $\begin{cases} x = t \\ y = -10 + 3t + 2s \\ z = s \end{cases}$, con t y $s \in R$

15 Escribe la ecuación implícita o general del plano: $x = 3 - t, y = 2 + s, z = t + s$.

La ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z - 1$$

16 Prueba que $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 3y + 7z = 6 \end{cases}$ y $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ representan la misma recta.

Ambas rectas poseen vectores proporcionales y el punto (3, -1, 0) pertenece a la primera recta.

17 Sean las rectas r: $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{0}$ y

$$s: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Halla la ecuación de un plano que pasa por A (–1, –1, 0) y es paralelo a las dos rectas. Halla la intersección de dicho plano con los ejes coordenados.

El plano viene determinado por el punto A (–1, –1, 0) y los vectores directores de las rectas que son $\overline{u} = (-5, 2, 0)$ y $\overline{v} = (-1, 4, 7)$, y su ecuación es

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ -5 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 14x + 35y - 18z + 49$$

18 **Dados los puntos A (1, 0, 2), B (0, 1, 3), C (–1, 2, 0) y D (2, –1, 3), halla la ecuación del plano π que contiene a la recta que pasa por AB y es paralelo a la recta que pasa por CD.**

El plano viene determinado por el punto A (1, 0, 2) y los vectores $\overline{u} = \overline{AB} = (-1, 1, 1)$ y $\overline{v} = \overline{CD} = (3, -3, 3)$. Su ecuación es

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = x + y - 1$$

19 **Determina la posición relativa al plano $3x - 2x + z = 3$ y la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{1}$**

Se cortan en el punto (5/2, 1, –5/2).

20 **Estudia la posición relativa de los planos, para cada uno de los siguientes casos:**

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x = 1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 7x + 8y - z = 0 \\ x - y = -4 \\ 2x + 3y - 5z = -1 \\ x + y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$

a) Se cortan en la recta $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x = 1 \end{cases}$

b) Se cortan tres a tres en puntos.

c) Se cortan en el origen.

21 **Determina la posición relativa de las rectas r: $x = -y = -z$ y s: $z = 2$, $y = x + 2$.**

Las rectas se cruzan.

22 **Averigua para qué valor de m la recta**

r: $\begin{cases} x + 2y + z = m \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$

se corta con la recta s: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{5}$

Para el valor de $m = \frac{25}{4}$, las rectas se cortan en el punto $x = 3/2$, $y = -1/4$, $z = 21/4$.

23 **Estudia si las rectas**

r: $\begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$

se cortan, son paralelas o se cruzan. Halla el plano que contiene a s y es paralelo a r.

Las rectas se cruzan.

El plano que contiene a s y es paralelo a r viene determinado por el punto (–1, 1, 1) y los vectores direccionales de las rectas $\overline{u} = (-1, 0, 2)$ y $\overline{v} = (2, -2, 3)$. Su ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & x-1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4x + 7y - 2z - 5$$

24 **Determina m para que las rectas**

r: $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$

estén situadas en un mismo plano. Halla la ecuación de este plano.

Para que ambas rectas estén en un mismo plano, el rango de la matriz ampliada del sistema

$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$ debe ser 3

Por tanto, será nulo el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \end{vmatrix} = 4m + 16$$

Luego $m = -4$.

El plano viene determinado por el punto (1, 2, 0) de r y los vectores direccionales de r y s: $\overline{u} = (2, 1, 1)$ y $\overline{v}$ (4, -1, -3). Su ecuación es

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = x - 5y + 3z + 9$$

25 **Determina m y n para que los planos de ecuaciones**

$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 3 \\ 3x - y - mz = n \end{cases}$ **se corten en una recta.**

Halla también la ecuación del plano que contiene a la recta anterior y pasa por el punto P (2, 1, 3).

Para que los planos se corten en una recta, los determinantes que siguen deben ser nulos.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -m \end{vmatrix} = m + 1 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & n \end{vmatrix} = -n + 4$$

Por tanto, $m = -1$ y $n = 4$.

El haz de planos de arista de la recta anterior tiene por expresión:

$$(2x - y + z - 3) + \lambda\,(x - y + z - 2) = 0$$

Haciendo que el haz incida con el punto (2, 1, 3), se obtiene $\lambda = -3/2$.

Para este valor de λ, se obtiene el plano de ecuación $x + y - z = 0$.

26 **Dadas las rectas** $r: \begin{cases} x - z = 1 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} x - 5z = 4 \\ y - 4z = -3 \end{cases}$

a) **Deduce si se cortan, son paralelas o se cruzan.**

b) **Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen y corta a las rectas dadas.**

a) Las rectas se cortan.

b) La recta que se apoya en r y s es la recta que pasa por dos puntos genéricos $P(-1 + t, 2 - 3t, t)$ de r y $Q(4 + 5s, -3 + 4s, s)$ de s.

La recta determinada por P y Q tiene de ecuación:

$$\frac{x - (-1 + t)}{(4 + 5s) - (-1 + t)} = \frac{y - (2 - 3t)}{(-3 + 4s) - (2 - 3t)} = \frac{z - t}{s - t}$$

Al hacer que la recta incida con el origen (0, 0, 0), se obtienen los valores $t = 0$, $s = 0$.

Con estos valores se obtiene la recta

$$\frac{x + 1}{5} = \frac{y - 2}{-5} = \frac{z}{0}$$

27 **Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de $x + y + z = 3$ con los ejes *OX* y *OY*. Determina el plano que pasa por los puntos de corte del plano anterior con los ejes coordenados.**

Los puntos de corte de $x + y + z = 3$ con los ejes OX y OY son los puntos (3, 0, 0) y (0, 3, 0).

La recta que pasa por los puntos anteriores es:

$$\frac{x - 3}{-3} = \frac{y}{3} = \frac{z}{0}$$

Los puntos de corte de $x + y + z = 3$ con los ejes coordenados son los puntos (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3).

El plano que pasa por los puntos anteriores es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = x + y + z - 3$$

28 **Sean $A(1, -5, a)$, $B(3, a, -1)$ y $C(a, -5, 2)$ los tres vértices del triángulo *ABC*. Determina el valor de a para que el triángulo sea rectángulo en el vértice *C*.**

Debe cumplirse que los vectores $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son perpendiculares. Es decir, el producto escalar de ambos debe ser nulo.

$$\overrightarrow{CA} = (1 - a, 0, a - 2), \quad \overline{CB} = (3 - a, a + 5, -3)$$

De $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$ se obtiene $a^2 - 7a + 9 = 0$.

Las soluciones de la ecuación son:

$$a = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \text{ y } a = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$$

29 **Dados los puntos $A(1, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$, comprueba:**

a) **Que no está alineado y halla la ecuación del plano que determinan.**

b) **Que el plano obtenido en el apartado a) y el formado por los puntos $D(3, 0, 0)$, $E(0, 6, 0)$ y $F(0, 0, 3)$ son paralelos.**

a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es:

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$$

El punto C no pertenece a dicha recta, al cumplirse

$$\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{2} \neq \frac{1}{0}$$

La ecuación del plano que determinan A, B y C es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x + y + 2z - 2 = 0$$

b) El plano determinado por los puntos D, E y F tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 18x + 9y + 18z - 54 = 0$$

Los planos $2x + y + 2z - 2 = 0$ y $2x + y + 2z - 6 = 0$ son paralelos.

30 **Justifica que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, -1)$, $C(5, 2, 1)$ y $D(4, 3, 3)$ son los vértices consecutivos de un paralelogramo y obtén la ecuación del plano que los contiene. Razona si es o no rectángulo.**

Los puntos A, B, C y D son los vértices de un paralelogramo al cumplirse:

$$\overline{AB} = (1, -1, -1) \text{ y } \overline{DC} = (1, -1, -2);$$

$$\overline{AD} = (3, 2, 2) \text{ y } \overline{BC} = (3, 2, 2).$$

No es un rectángulo, ya que $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = 3 - 2 - 4 = -3 \neq 0$.

La ecuación del plano que contiene a los puntos es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2x - 8y + 5z + 1 = 0$$

31 **Halla la ecuación del plano que contiene la recta**

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 4}{3}$$

y es paralelo a la recta $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z}{1}$

El plano viene determinado por el punto (2, 2, 4) de la primera recta y por los vectores $\overline{u} = (1, -1, 3)$ y $\overline{v} = (3, 2, 1)$.

Su ecuación es $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7x - 8y - 5z + 22 = 0$

32 Calcula razonadamente el valor de *a* para que los siguientes cuatro puntos estén en un mismo plano del espacio: (*a*, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 2, 3) y (7, 2, 1). Calcula también, de una manera razonada, la ecuación del plano que los contiene.

El plano determinado por los puntos (0, 1, 2), (1, 2, 3), (7, 2, 1) tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x - 4y + 3z - 2 = 0$$

Para que el punto (*a*, 0, 1) esté en el plano anterior debe cumplirse que $a - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 = 0$, es decir, $a = -1$.

33 Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, –1, 2) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1, 0, 1), (3, 2, 1) y (2, –1, 0). Exprésala como intersección de dos planos.

La ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 4z - 5 = 0$$

La recta está determinada por el punto (1, –1, 2) y el vector normal al plano $\overline{v} = (2, -2, 4)$. La ecuación de la recta es

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{4}$$

Expresada como intersección de dos planos: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

34 Halla la ecuación del plano que contiene la recta de ecuaciones

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

y es paralela a la recta que pasa por los puntos (2, 0, 0) y (0, 1, 0).

El plano viene determinado por el punto (1, 1, 0) y los vectores direccionales de ambas rectas $\overline{u} = (2, 2, 1)$ y $\overline{v}$ (-2, 1, 0).

Su ecuación es $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ z & z & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x + 2y - 6z - 3 = 0$

35 Dado el plano π: $2x - 3y + z = 0$ y la recta

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2},$$

halla la ecuación del plano que contiene la recta *r* y es perpendicular al plano π.

El plano viene determinado por el punto de la recta (1, 2, –1), el vector direccional de la recta $\overline{u} = (1, -1, 2)$ y el normal al plano $\overline{v} = (2, -3, 1)$.

Su ecuación es $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5x + 3y - z - 12 = 0$

36 Dados los puntos:
***A* (1, 0, 1), *B* (1, 1, 0), *C* (0, 1, 1) y *D* (*p*, *q*, *r*):**
***a)* ¿Qué relación deben cumplir *p*, *q* y *r* para que los puntos *A*, *B* y *D* estén alineados?**
***b)* ¿Qué relación deben cumplir *p*, *q* y *r* para que los puntos *A*, *B*, *C* y *D* sean coplanarios?**

a) La recta que pasa por los puntos *A* y *B* tiene de ecuación:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$

Si el punto *D* (*p, q, r*) debe estar en la recta anterior, se cumplirá

$$\frac{p-1}{0} = \frac{q}{-1} = \frac{r-1}{-1}, \text{ es decir, } p = 1 \text{ y } q - r = -1$$

b) El plano determinado por los puntos *A, B* y *C* tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x + y + z - 2 = 0$$

Si el punto *D* (*p, q, r*) debe estar en el plano, se cumplirá

$$p + q + r - 2 = 0$$

37 Determina *m* y *n* para que los planos $6x - my + 4z + 9 = 0$ y $9x - 3y + nz - n = 0$ sean paralelos.

El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 6 & -m & 4 \\ 9 & -3 & n \end{pmatrix}$ debe ser dos. Por tanto,

- $\begin{vmatrix} 6 & -m \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 9m = 0, \quad m = 2$
- $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & n \end{vmatrix} = 6n - 36 = 0, \quad n = 6$

38 Estudia la posición relativa de los planos, en cada uno de los casos siguientes:

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -7 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 7x + 8y - 7z = -13 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x + y - z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ x = 2y + 2z = 4 \end{cases}$

a) La matriz de los coeficientes tiene rango dos, y la matriz ampliada tiene rango dos. Por tanto, los tres planos se cortan en la misma recta.

b) El rango de la matriz de los coeficientes es dos y el de la ampliado es tres. Por tanto, los tres planos se cortan dos a dos.

c) El rango de la matriz de los coeficientes es tres y, por tanto, los tres planos se cortan en el punto (0, 5, 7).

39 **Estudia la posición relativa de los cuatro planos del espacio:**

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y + mz = 1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ nx - 2y + z = -3 \end{cases}$$

- Si $n \neq -2$, los planos dos a dos se cortan en dos rectas que se cruzan.
- Si $n = -2$ y $m \neq -1/2$, los planos se cortan en un punto.
- Si $n = -2$ y $m = -1/2$, los planos se cortan dos a dos en dos rectas que son paralelas.

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

40 **Consideremos la recta *r*, el plano π y el punto *P*, siendo:**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-2}{5}$$

$$\pi: 2x - y + 3z = 1; \quad P\,(1, 0, 4)$$

Obtén una recta *s* paralela a *r* que pase por el punto *P*. Calcula el punto de intersección de π y *s*.

La ecuación de la recta *s* es: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{5}$

La intersección de *s* con el plano π es el punto

$$\left(-\frac{5}{8}, -\frac{39}{16}, -\frac{1}{16}\right)$$

41 **Halla las ecuaciones de la recta paralela a los planos $x + y = 1$, $x + z = 0$ y que pasa por el punto (2, 0, 0).**

El vector direccional de la recta $\bar{v} = (a, b, c)$ debe ser perpendicular a los vectores normales de los planos. Por tanto,

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 0, 1) = 0 \Rightarrow a + c = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene el vector $\bar{v} = (a, b, c) = (a, -a, -a) = a\,(1, -1, -1)$.

La ecuación de la recta es: $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$

42 **Halla las ecuaciones de la recta que es paralela a la recta $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ y pasa por el punto (4, 5, 6).**

La recta viene determinada por el punto (4, 5, 6) y el vector $\bar{v} = (1, 3, 1)$, y su ecuación es: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-6}{1}$

43 **Dos vértices consecutivos de un rectángulo lo constituyen los puntos *P* (1, 1, 3) y *Q* (–1, 0, 0) y los otros dos vértices pertenecen a la recta *r* que pasa por el punto *C* (4, 3, –5). Se pide:**

***a)* Halla la ecuación de la recta *r* y el plano π que contiene el rectángulo.**

***b)* Hallar las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.**

a) La recta *r* viene determinada por el punto *C* (4, 3, -5) y por el vector $\bar{v} = \overline{QP} = (+2, 1, 3)$, y su ecuación es:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$$

b) Los otros vértices del rectángulo son los puntos

$$\left(\frac{44}{7}, \frac{29}{7}, -\frac{11}{7}\right) \text{ y } (0, 1, -11)$$

44 **Dado un tetraedro *ABCD* de vértices *A* (1, 2, 0), *B* (2, 6, 0), *C* (5, 3, 0) y *D* (3, 4, 3):**

***a)* Comprueba que los puntos medios de las aristas *AB, BC, CD* y *CA* están en un mismo plano, y halla su ecuación.**

***b)* El plano obtenido es paralelo a las otras dos aristas *CB* y *AD*.**

a) La ecuación del plano que pasa por los puntos medios (3/2, 4, 0), (5/2, 5, 3/2), (4, 7/2, 3/2) y (3, 5/2, 0) es $2x + 2y - 4z - 11 = 0$.

b) La arista *CB* tiene por ecuación: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z}{0}$

La otra arista *AD* tiene por ecuación: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$

El plano del apartado a) es paralelo a las rectas anteriores, ya que se cumple:

$$(2, 2, -4) \cdot (3, -3, 0) = 6 + (-6) + 0 = 0$$
$$(2, 2, -4) \cdot (2, 2, 3) = 6 + 6 + (-12) = 0$$

45 **Siendo *r* la recta determinada por las ecuaciones**

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

y el plano π definido por $2x + y + mz = n$, determina *m* y *n*, de modo que:

***a)* *r* corte a π.**

***b)* *r* y π sean paralelos.**

***c)* *r* esté contenida en π.**

a) La recta *r* corta al plano π si $m \neq -32/7$.

b) La recta y el plano son paralelos si $m = -32/7$ y $n \neq 9/7$.

c) La recta está contenida en el plano si $m = -32/7$ y $n = 9/7$.

46 **Halla la ecuación del plano que pasa por (0, 0, 1) y contiene a la recta *r*: $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$**

El haz de planos de arista *r* tiene por ecuación:

$$(5x - 3y + 2y - 5) + \lambda\,(2x - y - z - 1) = 0$$

Si el haz incide con el punto (0, 0, 1), se cumple:

$$2 - 5 + \lambda(-1 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -3/2$$

Para este valor $\lambda = -3/2$, el plano buscado es:

$$4x - 3y + 7z - 7 = 0$$

47 Divide el segmento de extremos *A* (1, 2, 1), *B* (–1, 0, 3) en tres partes iguales mediante dos planos α y β perpendiculares a la recta determinada por los puntos *A* y *B*. Da las ecuaciones de dichos planos.

Los puntos P y Q que dividen al segmento AB en tres partes iguales tienen por coordenadas: P (1/3, 4/3, 5/3) y Q (–1/3, 2/3, 7/3).

Los planos α y β pasan, respectivamente, por P y Q, y tienen como vector normal el vector $\overline{AB} = (-2, -2, 2)$.

La ecuación del plano α es:

$$(-2, -2, 2) \cdot (x - 1/3, y - 4/3, z - 5/3) = 0$$

Operando, $x + y - z = 0$

La ecuación del plano β es:

$$(-2, -2, 2) \cdot (x + 1/3, y - 2/3, z - 7/3) = 0$$

Operando, $3x + 3y - 3z + 4 = 0$

48 Estudia la posición relativa de las rectas

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 2 \end{cases}.$$

Las rectas se cruzan en el espacio al ser rango de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \text{ es cuatro}$$

49 Estudia, según los valores del parámetro *m*, la posición relativa de las rectas:

$$r: \{x - 2z = 1, y - z = 2\} \text{ y } s: \{x + y + z = 1, z - 2y + 2z = m\}$$

Si $m = -4$, las rectas se cortan en el punto $x = 0$, $y = 3/2$, $z = -1/2$.

Si $m \neq -4$ las rectas se cruzan en el espacio.

50 Estudia, para los diferentes valores de *m*, la posición relativa de los planos:

$$a) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y + mz = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} mx + z = 1 \\ my + z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ mx + 10y + 4z = 11 \end{cases}$$

a) Si $m \neq -2$, se cortan en un punto.
Si $m = 2$, se cortan dos a dos.

b) Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, se cortan en un punto.
Si $m = 0$, dos planos son paralelos y el otro corta a los anteriores.
Si $m = 1$, se cortan dos a dos.

c) Si $m \neq 7$, se cortan en un punto.
Si $m \neq 7$, se cortan en una recta.

51 Prueba que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera (en el espacio) son siempre los vértices de un paralelogramo.

Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ y $P_4(x_4, y_4, z_4)$, cuatro puntos cualesquiera del espacio. Los puntos medios de los lados del cuadrilátero formado por P_1, P_2, P_3 y P_4 tienen por coordenadas:

$$M_1 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$$M_2 = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}\right)$$

$$M_3 = \left(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2}, \frac{z_3 + z_4}{2}\right)$$

$$M_4 = \left(\frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 + y_1}{2}, \frac{z_4 + z_1}{2}\right)$$

Los vértices M_1, M_2, M_3 y M_4 forman un paralelogramo, ya que los vectores $\overline{M_1 M_2}$, y $\overline{M_4 M_3}$ son iguales; de igual forma que $\overline{M_4 M_1}$ y $\overline{M_2 M_3}$.

Los vectores anteriores tienen por coordenadas:

$$\overline{M_1 M_2} = \overline{M_4 M_3} = \left(\frac{x_3 - x_1}{2}, \frac{y_3 - y_1}{2}, \frac{z_3 - z_1}{2}\right)$$

$$\overline{M_4 M_1} = \overline{M_2 M_3} = \left(\frac{x_4 - x_2}{2}, \frac{y_4 - y_2}{2}, \frac{z_4 - z_2}{2}\right)$$

Resolución de problemas

1. SUMAS. Razona si es o no cierta la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{999 \cdot 1001} = 0,\overparen{498501}$$

El término general de la sucesión formada por los sumandos es $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Descomponiendo éste en fracciones simples, obtenemos:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} + \frac{-1/2}{2n+1}$$

Aplicando esta igualdad a cada uno de los sumandos, obtenemos:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{3}$$

$$\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1/2}{3} + \frac{-1/2}{5}$$

$$\frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1/2}{5} + \frac{-1/2}{7}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\frac{1}{997 \cdot 999} = \frac{1/2}{997} + \frac{-1/2}{999}$$

$$\frac{1}{999 \cdot 1001} = \frac{1/2}{999} + \frac{-1/2}{1001}$$

Sumando todas estas igualdades, obtenemos:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{999 \cdot 1001} = \frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{1001} =$$

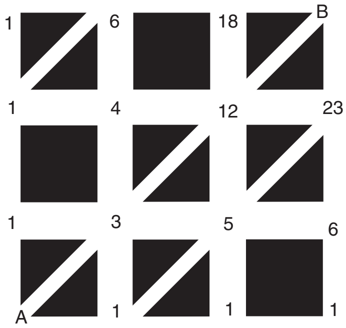
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2002} = \frac{1000}{2002} = \frac{500}{1001} = 0,\overparen{499500}$$

Fácilmente se comprueba la igualdad sin más que poner el número decimal periódico puro dado en forma de fracción:

$$0,\overparen{499500} = \frac{499500}{999999} = \frac{500 \cdot 27 \cdot 37}{1001 \cdot 27 \cdot 37} = \frac{500}{1001}$$

Por tanto, la igualdad que plantea el problema es verdadera.

2. PLANO DE CIUDAD. La figura representa el plano de una ciudad. ¿De cuántas formas se puede ir desde A hasta B de manera que nunca retrocedamos?



Solamente consideremos los caminos en vertical hacia arriba que denotamos como V, en diagonal hacia arriba que denotamos con D y en horizontan hacia la derecha que denotamos con H.
En la figura tenemos señalados el número de caminos que hay desde A a cada esquina. Fácilmente se llegan a encontrar esos números sin más que ir trazando caminos, así en el cruce que hay un 3 se llega a él desde A por tres caminos V – – D – H; en el cruce que hay 5 = 3 + 1 + 1 se llega a él por cinco caminos: HHV – HD – DH – VH – HVH.
Observamos que el número que nos aparece en cada cruce es suma de los de las dos esquinas contiguas si el cuadrado es cerrado y de las tres esquinas si el cuadrado es abierto.

3. TRAMA TRIANGULAR. Resuelve el problema análogo al que figura en la página anterior, considerando que en este caso los triángulos equiláteros que debes contar son lo que tienen el vértice hacia abajo.

Procediendo de forma análoga a la del problema de la página anterior, obtenemos:

	N.º triángulos de lado 1	N.º triángulos de lado 2	N.º triángulos de lado 3	N.º triángulos de lado 4	N.º triángulos de lado 5	TOTAL
Trama n= 2	1					1
Trama n= 3	3					3
Trama n= 4	6	1				7
Trama n= 5	10	3				13
Trama n= 6	15	6	1			22
Trama n= 7	21	10	3			34
Trama n= 8	28	15	6	1		50

Observamos que aparecen dos sucesiones según sea n = par o n = impar.

- Si n = par, obtenemos la sucesión:

1, 7, 22, 50, 95, 161, ...

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general vale:

$$\frac{n \cdot (n+2) \cdot (2n-1)}{24}$$

- Si n es impar obtenemos la sucesión:

3, 13, 34, 70, 125, ...

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general vale:

$$\frac{(n-1)\,(n+1)\,(2n+3)}{24}$$

Por tanto, el número de triángulos equiláteros con el vértice hacia abajo que podemos contar en una trama triangular de n-unidades de lado es:

$$\begin{cases} \dfrac{n\,(n+2)\,(2n-1)}{24} & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{(n-1)\,(n+1)\,(2n+3)}{24} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

- En una trama de lado n hay:

I. $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + \ldots = \binom{n}{n-2}$ triángulos de lado 1 con $n \geq 2$

II. $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots = \binom{n-2}{n-4}$ triángulos de lado 2 con $n \leq 4$.

III. $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots = \binom{n-2}{n-4}$ triángulos de lado 3 con $n \geq 6$.

Así sucesivamente.

En general es $\binom{n+2-2k}{n-2k}$ con $k = 1, 2, \ldots n$

k = n.º unidades de lado.

4. PRIMOS. Demuestra que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre un número múltiplo de 24.

Hemos de demostrar que $p^2 - q^2 = 24$ siendo p, q números primos mayores que 3.
Para demostrarlo, veamos primeramente que si p es un número primo mayor que 3, entonces $p^2 - 1 = 24$.

$p^2 - 1 = (p - 1)\,(p + 1)$

Los números están colocados:

$$\begin{array}{ccc} p-1 & p & p+1 \\ & \downarrow & \\ & \text{primo} & \end{array}$$

Como p es primo $\Rightarrow p - 1$ y $p + 1$ son múltiplos de 2 y uno de ellos también es múltiplo de 4 pues en tres números consecutivos mayores que 3 con los extremos pares a la fuerza uno de estos extremos es múltiplo de 4. También $(p - 1)$ o $(p + 1)$ han de ser múltiplos de 3, puesto que son tres números consecutivos. Por, tanto se cumple que $p^2 - 1 = \dot{2} \cdot \dot{4} \cdot \dot{3} = \dot{24}$. Además como $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) \Rightarrow p^2 - q^2 = \dot{24} - \dot{24} = \dot{24}$. Por tanto, se cumple que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre múltiplo de 24.

5. TABLERO DE AJEDREZ. ¿Cuántos rectángulos de lados desiguales hay en un tablero de ajedrez?

Comenzamos particularizando con tableros de diferentes tamaños:

Tipo de tablero	TIPOS DE RECTANGULOS										TOTAL
	1 x 1	1 x 2	1 x 3	1 x 4	2 x 2	2 x 3	2 x 4	3 x 3	3 x 4	4 x 4	
1 x 1	1										1
2 x 2	4	4			1						9
3 x 3	9	12	6		4	4		1			36
4 x 4	16	24	16	8	9	12	6	4	4	1	100
5 x 5	25	40	30	20	16	24	16	9	12	4	225

Observamos la sucesión del número total de rectángulos (incluidos como tales los cuadrados):

$$1, 9, 36, 100, 225, 441, \ldots$$
$$1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2, 21^2, \ldots$$

En un tablero 8 x 8, que es un tablero de ajedrez, hay $36^2 = 1.296$ rectángulos.

Si nos quedamos sólo con los no cuadrados, habría 1.296 – 204 cuadrados = 1.092 rectángulos no cuadrados en un tablero 8 · 8.